AICTE ଅନୁମୋଦିତ ନମୁନା ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଅନୁସାରେ

ପରିଣାମ ଆଧାରିତ ଶିକ୍ଷା ସହିତ ସମାନ୍ତରାଳ

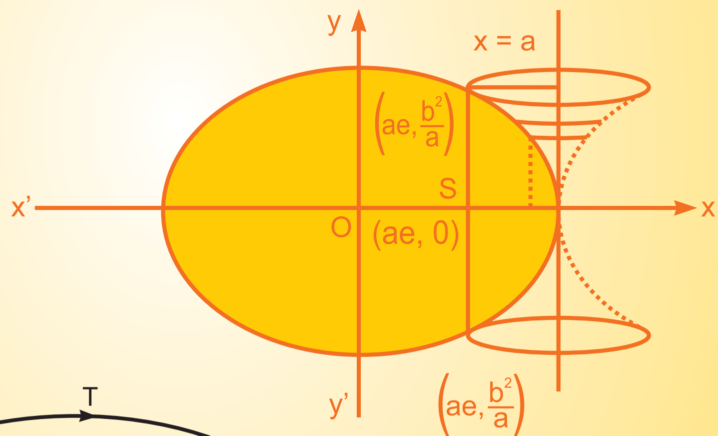
ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷାନୀତି -୨୦୨୦

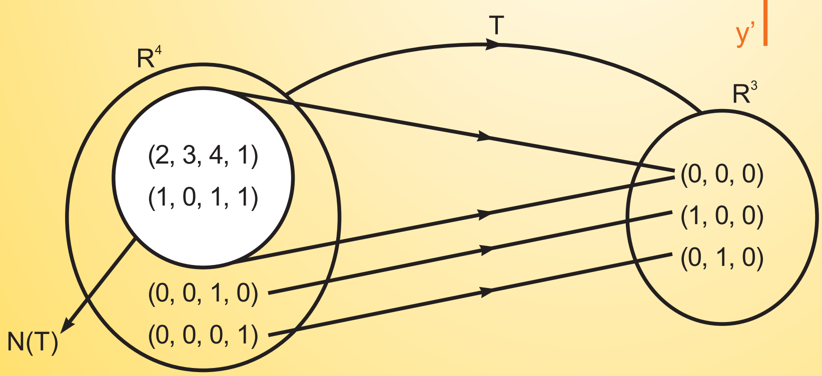
Vol. 1

ଗଣିତ – ୧

କଳନ ଏବଂ ରୈଖିକ ବୀଜଗଣିତ

କମ୍ପୁଟର ଏବଂ ଇଂଜିନିୟରିଂ ବିଭାଗପାଇଁ





UNDERGRADUATE COURSE BOOK

ମୂଳ ଇଂରାଜୀ ରଚନା

ରୀନା ଗର୍ଗ

ଓଡ଼ିଆ ଅନୁବାଦ

କିଶୋର କୁମାର ମିଶ୍ର

UNDERGRADUATE COURSE BOOK

ଗଣିତ – ୧

କଳନ ଏବଂ ରୈଖିକ ବୀଜଗଣିତ

କମ୍ପୁଟର ଏବଂ ଇଂଜିନିୟରିଂ ବିଭାଗପାଇଁ

କିଶୋର କୁମାର ମିଶ୍ର

ଗଣିତ -୧
କଳନ ଏବଂ ରୈଖିକ ବୀଜ ଗଣିତ

କମ୍ପ୍ୟୁଟର ଏବଂ ଇଂଜିନିୟରିଂ ବିଭାଗପାଇଁ

ମୂଳ ଇଂରାଜୀ ରଚନା

ରୀନା ଗର୍ଗ

ଓଡ଼ିଆ ଅନୁବାଦ

କିଶୋର କୁମାର ମିଶ୍ର

Published by: **Institute of Odia Studies and Research,**
3R9, BJB Nagar, Bhubaneswar,
ଓଡ଼ିଆ ଅଧ୍ୟୟନ ଓ ଗବେଷଣା ସଂସ୍ଥା, ୩ଆର୯, ବିଜେବି ନଗର ଭୁବନେଶ୍ୱର, ଓଡ଼ିଶା

ISBN: 978-93-91638-30-6

Book Code: UG008OD

[English Edition]

Mathematics - I (Calculus and Linear Algebra)

Computer Science Engineering Branches

Author: Reena Garg

[Odia Edition]

Ganita-1(Kalana ebam Raikhika Bijaganita)

Computer Science Engineering Branches

TRANSLATOR: Prof. Dr. Kishore Kumar Mishra

First Edition: 2022

Published by:

Institute of Odia Studies and Research.
3 R 9, BJB Nagar, Bhubaneswar, Odisha
Email: iosrodishaaicte@gmail.com
Phone: 0674-3550224, Mob: 9090465758

ଗଣିତ -୧ (କଳନ ଏବଂ ରୈଖିକ ବୀଜଗଣିତ)

ଓଡିଆ ଅନୁବାଦ:

ପ୍ରଫେସର ଡକ୍ଟର କିଶୋର କୁମାର ମିଶ୍ର
ବିଭାଗୀୟ ମୁଖ୍ୟ, ଗଣିତ ବିଭାଗ, ଗୀତା ବୈଷୟିକ ମହାବିଦ୍ୟାଳୟ,
ଭୁବନେଶ୍ୱର, ଓଡ଼ିଶା

ଓଡିଆ ଭାଷା ବିଶେଷଜ୍ଞ:
ଡକ୍ଟର ସୁବ୍ରତ କୁମାର ପୃଷ୍ଟି
ସଦସ୍ୟ ସଚିବ, ଓଡିଆ ଅଧ୍ୟୟନ ଓ ଗବେଷଣା ସଂସ୍ଥା,
ଭୁବନେଶ୍ୱର, ଓଡିଶା

ବିଷୟ ସମୀକ୍ଷକ:
ପ୍ର. ଡ. ବିଷ୍ଣୁ ପ୍ରସନ୍ନ ଆଚାର୍ଯ୍ୟ
ଅବସରପ୍ରାପ୍ତ ପ୍ରଫେସର, ଗଣିତ ବିଭାଗ, ଉତ୍କଳ ବିଶ୍ୱବିଦ୍ୟାଳୟ,
ଭୁବନେଶ୍ୱର, ଓଡ଼ିଶା

ଓଡିଆ ଭାଷା ସମୀକ୍ଷକ:

ଡକ୍ଟର ଲୋକନାଥ ସେଠୀ,
ବରିଷ୍ଠ ପ୍ରାଧ୍ୟାପକ, ପିପିଲି ମହାବିଦ୍ୟାଳୟ, ପୁରୀ

Printed in India by: BK Publications Pvt.Ltd, Bhubaneswar,

Copyright © Reserved by AICTE

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without prior permission of the publisher.

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade, be lent, re-sold, hired out or otherwise disposed of without the publisher’s consent, in any form of binding or cover other than that in which it is published.

Disclaimer: The website links provided by the author in this book are placed for informational, educational & reference purpose only. The Publisher do not endorse these website links or the views of the speaker/ content of the said weblinks. In case of any dispute, all legal matters to be settled under New Delhi Jurisdiction only.

ISBN 978-93-91638-30-6

9 789391 638306

प्रो. अनिल डी. सहस्रबुद्धे
अध्यक्ष
Prof. Anil D. Sahasrabudhe
Chairman

सत्यमेव जयते

अखिल भारतीय तकनीकी शिक्षा परिषद्
(भारत सरकार का एक सांविधिक निकाय)
(शिक्षा मंत्रालय, भारत सरकार)
नेल्सन मंडेला मार्ग, वसंत कुंज, नई दिल्ली-110070
दूरभाष : 011-26131498
ई-मेल : chairman@aicte-india.org

ALL INDIA COUNCIL FOR TECHNICAL EDUCATION
(A STATUTORY BODY OF THE GOVT. OF INDIA)
(Ministry of Education, Govt. of India)
Nelson Mandela Marg, Vasant Kunj, New Delhi-110070
Phone : 011-26131498
E-mail : chairman@aicte-india.org

ପ୍ରାକ୍‌କଥନ

ଶହଶହ ବର୍ଷ ଧରି ମାନବଜାତି ଓ ସମାଜର ଅଗ୍ରଗତି ଏବଂ ବିସ୍ତାରରେ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଛି। ଭାରତୀୟ ଉପମହାଦେଶରେ ସୃଷ୍ଟ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ଚିନ୍ତାଧାରା ଜଗତ ଉପରେ ଏକ ଚିନ୍ତାଶୀଳ ପ୍ରଭାବ ପକାଇଛି।

ଅଖିଳ ଭାରତୀୟ ବୈଷୟିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ [All India Council for technical Education (AICTE)] 1987ରେ ଆରମ୍ଭ ହେବା ପରଠାରୁ ବୈଷୟିକ ଶିକ୍ଷାର ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କୁ ସାହାଯ୍ୟ କରିବାରେ ସର୍ବଦା ଅଗ୍ରଣୀ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରି ଆସିଛି। AICTEର ଲକ୍ଷ୍ୟ ହେଉଛି ଗୁଣାତ୍ମକ ବୈଷୟିକ ଶିକ୍ଷାକୁ ପ୍ରୋତ୍ସାହିତ କରିବା ଏବଂ ଏହା ମାଧ୍ୟମରେ ଶିଳ୍ପ ଜଗତକୁ ଶୀର୍ଷ ସ୍ଥାନରେ ପହଞ୍ଚାଇବା। ସର୍ବୋପରି ଆମର ପ୍ରିୟ ମାତୃଭୂମି ଭାରତକୁ ଏକ ଆଧୁନିକ ବିକଶିତ ରାଷ୍ଟ୍ରରେ ପରିଣତ କରିବା। ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖ କରିବା ଅନୁଚିତ ହେବ ନାହିଁ ଯେ ଯନ୍ତ୍ରୀମାନେ ଆଧୁନିକ ସମାଜର ମେରୁଦଣ୍ଡ। ଉତ୍ତମ ଯନ୍ତ୍ରୀ ଅର୍ଥାତ୍ ଉତ୍ତମ ଶିଳ୍ପ ଏବଂ ଉତ୍ତମ ରାଷ୍ଟ୍ର।

ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷାନୀତି-୨୦୨୦ର ପରିକଳ୍ପନା ହେଉଛି ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀଙ୍କୁ ଭାରତର ସାମ୍ବିଧାନିକ ବ୍ୟବସ୍ଥା ଅନୁଯାୟୀ ନିଜ ଭାଷାରେ ଶିକ୍ଷା ପ୍ରଦାନ କରିବା, ଯାହାଦ୍ୱାରା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ ଜ୍ଞାନାର୍ଜ୍ଜନରେ ଯଥେଷ୍ଟ ସମର୍ଥ ଓ ଦକ୍ଷ ହୋଇପାରିବେ ଏବଂ ଜାତୀୟ ଅଭିବୃଦ୍ଧି ତଥା ବିକାଶ ଦିଗରେ ସହଯୋଗ କରିପାରିବେ।

ଗତ କିଛି ବର୍ଷରୁ AICTE ନିରନ୍ତର ଭାବରେ କାର୍ଯ୍ୟ କରୁଥିବା କ୍ଷେତ୍ରଗୁଡିକ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ହେଉଛି ଏହାର ସମସ୍ତ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀଙ୍କୁ ଭାରତୀୟ ଭାଷାରେ ଉଚ୍ଚମାନ ତଥା ଉଚିତ ମୂଲ୍ୟର ଆନ୍ତର୍ଜାତୀୟ ପୁସ୍ତକ ପ୍ରଦାନ କରିବା। ଏହି ପୁସ୍ତକଗୁଡ଼ିକ କେବଳ ସହଜ ଭାଷା, ବାସ୍ତବ ଜୀବନ ସମ୍ବଳିତ ଉଦାହରଣ, ସମୃଦ୍ଧ ବିଷୟବସ୍ତୁକୁ ଧ୍ୟାନରେ ରଖି ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଯାଇନାହିଁ ବରଂ ଏହି ନିତିଦିନିଆ ପରିବର୍ତ୍ତନଶୀଳ ଦୁନିଆରେ ଶିଳ୍ପର ଆବଶ୍ୟକତାକୁ ମଧ୍ୟ ଦୃଷ୍ଟିରେ ରଖାଯାଇ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଯାଇଛି। ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ଏବଂ ଟେକ୍ନୋଲୋଜି- 2018ର AICTE ମଡେଲ୍ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଅନୁଯାୟୀ ଏହି ପୁସ୍ତକଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରସ୍ତୁତ ହୋଇଛି।

ବହୁ ଜ୍ଞାନ ଏବଂ ଅଭିଜ୍ଞତା ଥିବା ସମଗ୍ର ଭାରତବର୍ଷର କୋଣ ଅନୁକୋଣର ବିଶିଷ୍ଟ ପ୍ରଫେସରମାନେ ଶିକ୍ଷାବ୍ୟବସ୍ଥାର ସୁଲଭତା ଓ ସୁଗମତାପାଇଁ ଏହି ପୁସ୍ତକଗୁଡ଼ିକ ଲେଖିଛନ୍ତି। AICTE ନିଶ୍ଚିତ ଯେ ସମୃଦ୍ଧ ବିଷୟବସ୍ତୁ ସହିତ ଏହି ପୁସ୍ତକଗୁଡ଼ିକ ବୈଷୟିକ ଶିକ୍ଷାର ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନଙ୍କୁ ସହଜରେ ଗୁଣାତ୍ମକ ଜ୍ଞାନ ପ୍ରଦାନରେ ସହାୟକ ହେବ।

ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ବିଷୟଗୁଡ଼ିକୁ ଅଧିକ ପ୍ରାଞ୍ଜଳ କରିବାରେ ପ୍ରୟାସ କରିଥିବା ମୂଳ ଲେଖକ, ସଂଯୋଜକ ଏବଂ ଅନୁବାଦକଙ୍କ କଠିନ ପରିଶ୍ରମକୁ AICTE ପ୍ରଶଂସା କରୁଛି।

(Anil D. Sahasrabudhe)

ଅନୁବାଦକଙ୍କ କଲମରୁ...

ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷାନୀତି ୨୦୨୦ରେ ଭାରତୀୟ ଭାଷାରେ ଶିକ୍ଷାଦାନକୁ ଗୁରୁତ୍ୱ ଦିଆଯାଇ ସମସ୍ତ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ପୁସ୍ତକକୁ ଭାରତୀୟ ଭାଷାରେ ଅନୁବାଦ କରିବାପାଇଁ ଅଖିଳ ଭାରତୀୟ ବୈଷୟିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ ଅଭିନବ ଉଦ୍ୟମ ଆରମ୍ଭ କରିଛି। ଓଡିଆ ଭାଷାରେ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ପ୍ରସ୍ତୁତ ହେଉଥିବାରୁ ଅଖିଳ ଭାରତୀୟ ବୈଷୟିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦର ଅଧ୍ୟକ୍ଷ ପ୍ରଫେସର ଅନିଲ ଡି. ସହସ୍ରବୁଧେ, ଉପାଧ୍ୟକ୍ଷ ପ୍ରଫେସର ଏମ୍. ପି. ପୁନିଆ, ସଦସ୍ୟ-ସଚିବ ପ୍ରଫେସର ରାଜୀବ କୁମାର, ମୁଖ୍ୟ ସମନ୍ୱୟ ଅଧିକାରୀ ବୁଦ୍ଧ ଚନ୍ଦ୍ରଶେଖର, ପ୍ରାକ୍ତନ ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ କର୍ଣ୍ଣେଲ ବି ଭେଙ୍କଟ, ବର୍ତ୍ତମାନର ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ଡକ୍ଟର ଅମିତ କୁମାର ଶ୍ରୀବାସ୍ତବ ଏବଂ ଓଡିଆ ଅଧ୍ୟୟନ ଓ ଗବେଷଣା ସଂସ୍ଥାର ଅଧ୍ୟକ୍ଷ ଆମ୍ବାସଡର ଅବସର ବେଉରିଆ, ଉପାଧ୍ୟକ୍ଷ ନଟବର ଶତପଥୀ (ଶିକ୍ଷା ଓ ଗବେଷଣା), ଉପାଧ୍ୟକ୍ଷ ଡକ୍ଟର ସିପ୍ରା ମଲ୍ଲିକ (ପରିଚାଳନା), ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ପ୍ରଫେସର ବ୍ରଜେନ୍ଦ୍ର ପ୍ରସାଦ ଦାସ ଏବଂ ସଦସ୍ୟ ସଚିବ ଡକ୍ଟର ସୁବ୍ରତ କୁମାର ପୃଷ୍ଟିଙ୍କୁ ମୁଁ କୃତଜ୍ଞତା ଜଣାଉଅଛି।

କିଛିବର୍ଷ ପୂର୍ବରୁ ବୈଷୟିକ ଶିକ୍ଷାକୁ ଭାରତୀୟ ଭାଷାରେ ପ୍ରଚଳନ ହେବା କଥାକୁ କିଛି ବୈଷୟିକ ବୁଦ୍ଧିଜୀବୀ ହସି ଉଡାଉଥିଲେ। ଆଧୁନିକ ଶିଳ୍ପ ସଭ୍ୟତା ୟୁରୋପରୁ ଭାରତକୁ ଆସିଥିବାରୁ ଇଂରାଜୀ ବ୍ୟତୀତ ଆଧୁନିକ ଏସିୟ ଦେଶ ଚୀନ, ଜାପାନ, କୋରିଆର ଆଦି ବିକଶିତ ଦେଶମାନଙ୍କରେ ତାଙ୍କ ନିଜ ଭାଷାରେ ବୈଷୟିକ ଶିକ୍ଷାର ବିକଶିତ ହୋଇଥିବା ଯୁକ୍ତି ମଧ୍ୟ ଗ୍ରହଣୀୟ ନ ଥିଲା। କିନ୍ତୁ ନୂଆ ଶିକ୍ଷାନୀତି ପ୍ରଚଳନଦ୍ୱାରା ଭାରତୀୟ ଭାଷାରେ ଶିକ୍ଷାପ୍ରାପ୍ତ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ସୁବିଧାପାଇଁ ବୈଷୟିକ ଶିକ୍ଷାକୁ ନିଜ ଭାଷାରେ ପଢ଼ିବାର ସୁଯୋଗ ପ୍ରଦାନ କରାଗଲା। ତେଣୁ AICTE ଦ୍ୱାରା ପ୍ରସ୍ତୁତ ନମୁନା ପୁସ୍ତକକୁ ଓଡିଆ ସମେତ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବାର ଗୋଟି ଭାରତୀୟ ଭାଷାରେ ଅନୁବାଦ କରାଯାଉଛି। ଯେଉଁମାନେ ବିଶ୍ୱାସ କରୁଥିଲେ ଯେ, ମାତୃଭାଷା ଓଡିଆରେ ବୈଷୟିକ ଶିକ୍ଷା ଦିଆଯାଇ ପାରିବନାହିଁ, ସେମାନଙ୍କ ସମସ୍ତ ଅପପ୍ରଚାରକୁ ଧୂଳିସାତ କରି ମାନ୍ୟବର କେନ୍ଦ୍ର ଶିକ୍ଷାମନ୍ତ୍ରୀ ମାନନୀୟ **ଶ୍ରୀଯୁକ୍ତ ଧର୍ମେନ୍ଦ୍ର ପ୍ରଧାନ** ମହୋଦୟଙ୍କ ପ୍ରଚେଷ୍ଟାକ୍ରମେ ଓଡ଼ିଆମାନଙ୍କର ସ୍ୱପ୍ନ ସାକାର ହେବାକୁ ଯାଉଛି । ଏହାର ଶ୍ରେୟ **ଓଡିଆ ଅଧ୍ୟୟନ ଓ ଗବେଷଣା ସଂସ୍ଥା(IOSR)** ଏବଂ ଏହାର ସଦସ୍ୟ ସଚିବ **ଡକ୍ଟର ସୁବ୍ରତ କୁମାର ପୃଷ୍ଟି** ପାଇବାପାଇଁ ହକଦାର।

ପୂର୍ବରୁ IOSR ସହିତ କୌଣସି ସମ୍ପର୍କ କିମ୍ବା ଯୋଗାଯୋଗ ନ ଥିଲେ ମଧ୍ୟ ଇଂଜିନିଅରିଂ ଶିକ୍ଷାର ମୂଳଦୂଆ ରୂପେ ପରିଗଣିତ "କଳନ ଏବଂ ରୈଖିକ ବୀଜଗଣିତ" ବିଷୟର ଅନୁବାଦ କରିବା ଗୁରୁଦାୟିତ୍ୱ ପ୍ରଦାନ କରିଥିବାରୁ IOSR ନିକଟରେ କୃତଜ୍ଞ। ଉକ୍ତ ପୁସ୍ତକର ବିଷୟ ସମୀକ୍ଷକ **ପ୍ର. ବିଷ୍ଣୁପ୍ରସନ୍ନ ଆଚାର୍ଯ୍ୟ** ଓ ଏହାର ଭାଷା ସମୀକ୍ଷକ **ଡକ୍ଟର ଲୋକନାଥ ସେଠୀ** ମୂଳଲେଖାର ଏହି ଅନୁବାଦ କାର୍ଯ୍ୟକୁ ସମୀକ୍ଷା କରି ଲେଖାର ଗୁଣାତ୍ମକ ମାନ ବୃଦ୍ଧି କରିରେ ସାହାଯ୍ୟ କରିଥିବାରୁ ମୁଁ ଉଭୟଙ୍କ ନିକଟରେ ମଧ୍ୟ କୃତଜ୍ଞ।

ଏହି ପୁସ୍ତକକୁ ଓଡିଆରେ ଅନୁବାଦ କରିବାରେ ଆମକୁ ଅନେକ ବାଧାବିଘ୍ନର ସମ୍ମୁଖୀନ ହେବାକୁ ପଡିଛି- ବିଶେଷତଃ ଓଡିଆ ପ୍ରତିଶବ୍ଦ ପାଇବାରେ ପୁସ୍ତକଟି ଇଂଜିନିଅରିଂ ପାଠ୍ୟକ୍ରମର ସମସ୍ତ ବିଭାଗର ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କର ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ହୋଇଥିବାରୁ, ସମସ୍ତଙ୍କ ବୁଝିବା ଭଳି ଭାଷାର ସରଳତା ଉପରେ ଧ୍ୟାନ ଦେବାକୁ ପଡିଛି । ଅନେକ ସ୍ଥାନରେ ଅନିଚ୍ଛା ସତ୍ତ୍ୱେ ମୂଳରଚନାରେ ଥିବା ଇଂରାଜୀ ଶବ୍ଦ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଛି । ଏଥିରେ ଆମ୍ଭେ କେତେ ଦୂର ସଫଳ ହୋଇଛୁ- ତାହା ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ, ଅଭିଭାବକ ଓ ଶିକ୍ଷକବୃନ୍ଦ ବିଚାର କରିବେ । ଏହି ପୁସ୍ତକର ଉନ୍ନତିପାଇଁ ବୈଷୟିକ ଜ୍ଞାନ ସମ୍ପନ୍ନ ବୁଦ୍ଧିଜୀବୀମାନଙ୍କଠାରୁ ସମାଲୋଚନା ଏବଂ ମତାମତ ସାଦରେ ଗ୍ରହଣୀୟ ।

କିଶୋର କୁମାର ମିଶ୍ର

କୃତଜ୍ଞତା

ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ଏବଂ ଟେକ୍ନୋଲୋଜି ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନଙ୍କ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟରେ ବୈଷୟିକ ପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶନପାଇଁ ଅଖିଳ ଭାରତୀୟ ବୈଷୟିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ(AICTE)ର କର୍ତ୍ତୃପକ୍ଷ, ବିଶେଷ କରି ଅଧ୍ୟକ୍ଷ ପ୍ରଫେସର ଅନିଲ ଡି ସହସ୍ରବୁଧେ, ଉପାଧ୍ୟକ୍ଷ ପ୍ରଫେସର ମହାବୀର ପ୍ରସାଦ ପୁନିଆ, ସଦସ୍ୟ-ସଚିବ ପ୍ରଫେସର ରାଜୀବ କୁମାର, ଏବଂ ଅଧ୍ୟାପକ ବିକାଶ ସେଲର ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ କର୍ଣ୍ଣେଲ ବି ଭେଙ୍କଟଙ୍କ ନିକଟରେ ଲେଖକ ଗଭୀର କୃତଜ୍ଞ । ଯନ୍ତ୍ର ଏବଂ ପ୍ରଦ୍ୟୋଗିକ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କପାଇଁ 'ଗଣିତ' ଏବଂ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବୈଷୟିକ ପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶନ ଯୋଜନା ଏବଂ କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ କରିଥିବା ଯୋଗୁଁ ମୂଳ ଲେଖକଙ୍କ ନିକଟରେ ଲେଖକ ତାଙ୍କର ମୂଲ୍ୟବାନ ଅବଦାନପାଇଁ ଗଭୀର କୃତଜ୍ଞତା ପ୍ରକାଶ କରୁଛି। ଏହାକୁ ଛାତ୍ରମାନଙ୍କପାଇଁ ସହଜ କରିବା ଏବଂ କଳାତ୍ମକ ଢଙ୍ଗରେ ଏକ ଉତ୍ତମ ରୂପ ଦେବାପାଇଁ ପୁସ୍ତକର ସମୀକ୍ଷକଙ୍କ ମୂଲ୍ୟବାନ ଅବଦାନକୁ ଆନ୍ତରିକତାର ସହ ସ୍ୱୀକାର କରୁଛି ।

ମୋପାଇଁ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଗର୍ବର ବିଷୟ ଯେ ଜାତୀୟ ନୀତି - 2020ର ନିର୍ଦ୍ଦେଶାବଳୀ ଅନୁଯାୟୀ ଏଆଇସିଟିଇର ମଡେଲ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଏବଂ ଶିକ୍ଷା ଉପରେ ଏହି ପୁସ୍ତକ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଯାଇଛି । ଭାରତୀୟ ଭାଷାରେ ଶିକ୍ଷାକୁ ପ୍ରୋତ୍ସାହିତ କରିବାପାଇଁ ଏହି ପୁସ୍ତକକୁ ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ଭାଷାରେ ମଧ୍ୟ ଅନୁବାଦ କରାଯାଉଛି । ଏହି ପୁସ୍ତକକୁ ଓଡଆ ଭାଷାରେ ଅନୁବାଦ କରିଥିବା ଡକ୍ଟର କିଶୋର କୁମାର ମିଶ୍ର ବିଷୟ ସମୀକ୍ଷା ପାଇଁ ଡକ୍ଟର ବିଷ୍ଣୁ ପ୍ରସନ୍ନ ଆଚାର୍ଯ୍ୟ ଏବଂ ଭାଷା ସମୀକ୍ଷା ପାଇଁ ଡକ୍ଟର ଲୋକନାଥ ସେଠୀ କୃତଜ୍ଞତା ପ୍ରକାଶ କରୁଛି । ମୁଖ୍ୟ ସମନ୍ୱୟ ଅଧିକାରୀ (ସିସିଓ) ଶ୍ରୀ ବୁଦ୍ଧ ଚନ୍ଦ୍ରଶେଖରଙ୍କଦ୍ୱାରା ବିକଶିତ କୃତ୍ରିମ ବୁଦ୍ଧିମତା(ଏଆଇ) ଆଧାରିତ ଅନୁବାଦ ଉପକରଣ ଅନୁବାଦ ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇଥିବାରୁ ହୃଦୟରୁ ଗଭୀର ସମ୍ମାନ ବ୍ୟକ୍ତ କରୁଛି |

ଏହି ପୁସ୍ତକଟି ଏଆଇସିଟିଇର ସଦସ୍ୟ, ବିଶେଷଜ୍ଞ ଏବଂ ଲେଖକଙ୍କ ବିଭିନ୍ନ ପରାମର୍ଶର ଫଳାଫଳ। ସେମାନେ ଆମ ଦେଶରେ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ଶିକ୍ଷାକୁ ଆହୁରି ବିକଶିତ କରିବାକୁ ସେମାନଙ୍କର ସୁଚିନ୍ତିତ ମତାମତ ରଖିଥିଲେ। ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଯୋଗଦାନକାରୀ ଏବଂ ବିଭିନ୍ନ କର୍ମୀମାନଙ୍କପାଇଁ ସ୍ୱୀକୃତି ଦିଆଯାଇଛି ଯାହାର ପ୍ରକାଶିତ ପୁସ୍ତକ, ସମୀକ୍ଷା ପ୍ରବନ୍ଧ, ପତ୍ରିକା, ଫଟୋଗ୍ରାଫ୍, ଟିପ୍ପଣୀ, ରେଫରେନ୍ସ ଏବଂ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ମୂଲ୍ୟବାନ ସୂଚନା, ଯାହା ପୁସ୍ତକ ଲେଖିବା ସମୟରେ ଆମକୁ ସମୃଦ୍ଧ କରିଥିଲା।

ଶେଷରେ, ଆମେ ନୂଆଦିଲ୍ଲୀସ୍ଥିତ ଖାନ୍ନା ପବ୍ଲିସିଂ ହାଉସର ପ୍ରକାଶକ ଶ୍ରୀ ମୁକୁଲ ସେଠଙ୍କୁ ଆନ୍ତରିକତାର ସହ ଧନ୍ୟବାଦ ଜଣାଇବାକୁ ଚାହୁଁଛୁ, ଯାହାର କର୍ମୀମାନେ ପ୍ରକାଶନର ସମସ୍ତ ଦିଗରେ ସହଯୋଗ କରିବାକୁ ସର୍ବଦା ପ୍ରସ୍ତୁତ ଥିଲେ ।

ରୀନା ଗର୍ଗ

ମୁଖବନ୍ଧ

ଗଣିତ, ବୈଜ୍ଞାନିକ ଜ୍ଞାନ ପ୍ରାପ୍ତିପାଇଁ ଏକ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ମାର୍ଗ, ଯାହା ମାନସିକ ଦକ୍ଷତାର ନୂତନ ଆଭିମୁଖ୍ୟ ଦେଖାଇଥାଏ। ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ଗଣିତ, ତତ୍ତ୍ୱ ଏବଂ ଅଭ୍ୟାସର ଏକ ସନ୍ତୁଳନ ପ୍ରଦାନ କରେ। ଯାହା ବୌଦ୍ଧିକ ଭାବରେ ଉତ୍ସାହପ୍ରଦ ଅଟେ। ବାସ୍ତବ ଦୁନିଆର ସମସ୍ୟାରେ, ଗଣିତ ପ୍ରୟୋଗର କଳା ଶିଖିବା ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନଙ୍କୁ ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନ କରିବାରେ ସାହାଯ୍ୟ କରେ।

କଳନ ଏବଂ ରୈଖିକ ବୀଜଗଣିତ ମୁଖ୍ୟତଃ ଏକବିଂଶ ଶତାବ୍ଦୀର ବି.ଟେକ୍ (CSE)ର ଉପସ୍ନାତକ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନଙ୍କପାଇଁ ଲକ୍ଷ୍ୟ ହେଉଛି, ଗଣିତ ବିଷୟରେ ଏକ ଭଲ ଶିକ୍ଷା ପ୍ରଦାନ କରିବା। ଫଳାଫଳ ଆଧାରିତ ଶିକ୍ଷା(OBE) ଏବଂ ବ୍ଲୁମ୍‌ଙ୍କ ବର୍ଗୀକରଣ ଉପରେ ଆଧାରିତ ନୂତନ ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷାନୀତି ଅନୁଯାୟୀ ଛାତ୍ର କୈନ୍ଦ୍ରିକ ସ୍ୱୟଂ ଶିକ୍ଷଣ କାର୍ଯ୍ୟକଳାପକୁ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ କରି, ଅଖିଳ ଭାରତୀୟ ବୈଷୟିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ (AICTE)ର ନମୁନା ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଆଧାରିତ ଏହି ପୁସ୍ତକ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଯାଇଛି। ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ଏବଂ ବିଜ୍ଞାନ ବିଭାଗରେ ଗାଣିତିକ ଉପକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଅଧ୍ୟୟନ ଏବଂ ପ୍ରୟୋଗ କରିବାକୁ ପାଠକମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଆଗ୍ରହ ସୃଷ୍ଟି କରିବାକୁ, ସମସ୍ତ ବିଷୟ ଏକ ବ୍ୟବସ୍ଥିତ ଢଙ୍ଗରେ ଦିଆଯାଇଛି। ଏହି ପୁସ୍ତକ ମୁଖ୍ୟତଃ, ଅଧ୍ୟାୟଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟବହାରିକ ପ୍ରୟୋଗ ଉପରେ ଗୁରୁତ୍ୱ ଦେଇଥାଏ ଯାହା ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନଙ୍କୁ ସମସ୍ୟା ସମାଧାନ କୌଶଳ ଉପରେ ଧ୍ୟାନ ଦେବାରେ ସାହାଯ୍ୟ କରେ।

ଏହି ପୁସ୍ତକରେ 5ଟି ଅଧ୍ୟାୟ ଅଛି। ବିଷୟକୁ ଭଲଭାବରେ ବୁଝିବାପାଇଁ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଧ୍ୟାୟ ଶେଷରେ ବହୁ ସଂଖ୍ୟକ ଅପେକ୍ଷାକୃତ ପ୍ରତିଯୋଗୀ ପ୍ରଶ୍ନ, ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନ, ନିୟୋଜନ ପ୍ରଶ୍ନ (ଆସାଇନମେଣ୍ଟ), ଏକାଧିକ ପସନ୍ଦ ପ୍ରଶ୍ନ ଏବଂ ଅଧିକ ଜାଣିବା ଇତ୍ୟାଦି ଦିଆଯାଇଛି। ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନଙ୍କର ଦକ୍ଷତା ବୃଦ୍ଧି ଏବଂ ଦଳଗତ କାର୍ଯ୍ୟର ଭାବନାକୁ ବଢାଇବାପାଇଁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଧ୍ୟାୟରେ ବ୍ୟବହାରିକ/ପ୍ରକଳ୍ପ/କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ ମଧ୍ୟ ଦିଆଯାଇଛି। ବିଷୟକୁ ସ୍ପଷ୍ଟ କରିବାକୁ ଟିପ୍ପଣୀ, ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ ଏବଂ ମନ୍ତବ୍ୟ ମାଧ୍ୟମରେ ପାଠ୍ୟକୁ ଯୋଡା ଯାଇଛି, ଯେଉଁରେ ସମ୍ଭବ ଜ୍ୟାମିତିର ସର୍ବାଧିକ ବ୍ୟବହାର ମାଧ୍ୟମରେ ବିଷୟଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିବାକୁ ଏକ ପ୍ରୟାସ କରାଯାଇଛି।

ଅଧ୍ୟାୟ-1 ରେ ଅବକଳନର ପ୍ରୟୋଗ, ବକ୍ରତା, ସୀମାଯୁକ୍ତ ଏବଂ ଅସଂଗତ ସମାକଳନ, ବିଟା-ଗାମା ଫଳନର ଗୁଣଧର୍ମ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ।

ଅଧ୍ୟାୟ-2 ରେ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ, ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ, ଟେଲର୍ ଓ ମ୍ୟାକଲରିନଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ, ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ଓ ଗରିଷ୍ଠ-ଲଘିଷ୍ଠ ଏକ ଚଳପାଇଁ, ବ୍ୟବହାର ମାଧ୍ୟମରେ ସମାଧାନ ପାଇବା।

ଅଧ୍ୟାୟ-3 ରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ମାଟ୍ରିକ୍ସ, ଡିଟର୍‌ମିନାଣ୍ଟ, ବିଭିନ୍ନ ପଦ୍ଧତିଦ୍ୱାରା ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ ସମାଧାନ, ରାଙ୍କ, କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ, ଗସ୍ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି, ଓ ଗସ୍-ଜୋର୍ଡାନ ପଦ୍ଧତି, ଉଦାହରଣ ସହିତ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି।

ଅଧ୍ୟାୟ-4 ରେ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍, ନିର୍ଭରଶୀଳତା, ଭେକ୍ଟରର ସ୍ୱାତନ୍ତ୍ର୍ୟ, ଆଧାର, ମାତ୍ରା, ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ, ରାଙ୍କ-ନଲିଟି ଉପପାଦ୍ୟ, ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସହିତ ରୈଖିକ ମ୍ୟାପର ମିଶ୍ରଣ ଉପରେ ଆଧାରିତ ପ୍ରଶ୍ନ ଅଛି।

ଅଧ୍ୟାୟ-5 ରେ ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ, ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର, କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ, ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ୍, ଗ୍ରାମ-ସ୍କିମିଡ ଲାମ୍ବିକୀକରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଏବଂ ସମମିତ ଓ ବିଷମ ସମମିତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଉପରେ ଆଧାରିତ ଉପପାଦ୍ୟ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି।

ଗଣିତ ହେଉଛି ଏକ ବିଷୟ ଯାହା କେବଳ କଠିନ ପରିଶ୍ରମ ଏବଂ ଅଭ୍ୟାସଦ୍ୱାରା ଆୟତ୍ତ ହୋଇପାରିବ। ଗଣିତ ଶିକ୍ଷଣ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ଅଭ୍ୟାସ ହେଉଛି ଏକମାତ୍ର ମୁଖ୍ୟ ଶବ୍ଦ।

ମୋର ଆଶା ଯେ ଏହି ପୁସ୍ତକ ସମସ୍ତ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନଙ୍କର ଆବଶ୍ୟକତା ଏବଂ ଆଶା ପୂରଣ କରିବ। ଯଦିଓ ମୁଦ୍ରଣ ତ୍ରୁଟି ଓ ଭୁଲରୁ ରକ୍ଷା ପାଇବାପାଇଁ ପ୍ରଚେଷ୍ଟା କରାଯାଇଛି, ତଥାପି ସିଦ୍ଧତା ଦାବି କରିବା କଷ୍ଟକର। ମୁଁ ଶିକ୍ଷକ ଓ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନଙ୍କଠାରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ମନ୍ତବ୍ୟ ଏବଂ ପରାମର୍ଶକୁ କୃତଜ୍ଞତାର ସହିତ ଗ୍ରହଣ କରିବି ଏବଂ ସ୍ୱୀକାର କରିବି, ଯାହା ଫଳରେ ପାଠ୍ୟ ଏବଂ ସମାଧାନ ହୋଇଥିବା ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକରେ ଉନ୍ନତି ଆଣିବାପାଇଁ ସେଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରୟାସ କରାଯାଇ ପାରିବ।

ରୀନା ଗର୍ଗ

ଫଳାଫଳ ଆଧାରିତ ଶିକ୍ଷା

ଫଳାଫଳ ଆଧାରିତ ଶିକ୍ଷା(outcome based education)ର କାର୍ଯ୍ୟକାରିତାପାଇଁ ପ୍ରାଥମିକ ଆବଶ୍ୟକତା ହେଉଛି, ଏକ ଫଳାଫଳ ଆଧାରିତ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ(outcome based curriculum)କୁ ବିକଶିତ କରିବା ଏବଂ ଶିକ୍ଷା ବ୍ୟବସ୍ଥାରେ ଏକ ଫଳାଫଳ ଆଧାରିତ ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ(outcome based assessment) ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ କରିବା। ଫଳାଫଳ ଆଧାରିତ ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ମାଧମରେ ଛାତ୍ରମାନେ ନିଶ୍ଚିତ ମାନକ, ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଏବଂ ପରିମାପଯୋଗ୍ୟ ଫଳାଫଳ ହାସଲ କରିଛନ୍ତି କି ନାହିଁ ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନକାରୀମାନେ(evaluators) ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କରିବାକୁ ସକ୍ଷମ ହେବେ। ଫଳାଫଳ ଆଧାରିତ ଶିକ୍ଷାର ଉପଯୁକ୍ତ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତୀକରଣ ସହିତ କୌଣସି ସ୍ତରରେ ସମର୍ପଣ ନ କରି, ସମସ୍ତ ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀଙ୍କପାଇଁ ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନକ ହାସଲ କରିବାକୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପ୍ରତିବଦ୍ଧତା ରହିବ। ଫଳାଫଳ ଆଧାରିତ ଶିକ୍ଷା ସହାୟତାରେ ଚାଲୁଥିବା କାର୍ଯ୍ୟକ୍ରମ ଶେଷରେ, ଜଣେ ଛାତ୍ର ନିମ୍ନଲିଖିତ ଫଳାଫଳରେ ପହଞ୍ଚିବାକୁ ସକ୍ଷମ ହେବ:

PO-1: ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ଜ୍ଞାନ(Engineering knowledge): ଜଟିଳ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନପାଇଁ ଗଣିତ, ବିଜ୍ଞାନ, ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ମୌଳିକତା ଏବଂ ଏକ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ବିଶେଷତା ବିଷୟରେ ଜ୍ଞାନ ପ୍ରୟୋଗ।

PO-2: ସମସ୍ୟା ବିଶ୍ଳେଷଣ(Problem analysis): ଗଣିତ, ପ୍ରାକୃତିକ ବିଜ୍ଞାନ ଏବଂ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ବିଜ୍ଞାନର ପ୍ରଥମ ନୀତି ବ୍ୟବହାର କରି ପ୍ରମାଣିତ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିବାପାଇଁ ଚିହ୍ନଟ, ସୂତ୍ରପ୍ରସ୍ତୁତ, ଅନୁସନ୍ଧାନ ସହିତ ସମୀକ୍ଷା ଏବଂ ଜଟିଳ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ସମସ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ବିଶ୍ଳେଷଣ ।

PO-3: ସମାଧାନର ପରିକଳ୍ପନା / ବିକାଶ(Design/development of solutions): ଜଟିଳ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ସମସ୍ୟାର ପରିକଳ୍ପନା ଏବଂ ସିଷ୍ଟମ୍ ଉପାଦାନର ପରିକଳ୍ପନା କିମ୍ବା ପ୍ରକ୍ରିୟା ଯାହା ଜନସ୍ୱାସ୍ଥ୍ୟ ଓ ନିରାପତ୍ତା ଏବଂ ସାଂସ୍କୃତିକ, ସାମାଜିକ ଏବଂ ପରିବେଶ ବିଚାର ପାଇଁ ଉପଯୁକ୍ତ ବିଚାର ସହିତ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଆବଶ୍ୟକତାପୂରଣ କରିବାର ପରିକଳ୍ପନା।

PO-4: ଜଟିଳ ସମସ୍ୟାର ଅନୁସନ୍ଧାନ କରିବା(Conduct investigations of complex problems): ବିଧିମାନ୍ୟ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ପ୍ରଦାନ କରିବା ପାଇଁ, ପରୀକ୍ଷଣର ପରିକଳ୍ପନା, ବ୍ୟାଖ୍ୟା , ଡାଟାର ବିଶ୍ଳେଷଣ ଏବଂ ସୂଚନାର ସଂଶ୍ଳେଷଣ ସହିତ ଗବେଷଣା-ଆଧାରିତ ଜ୍ଞାନ ଏବଂ ଗବେଷଣା ପଦ୍ଧତିର ବ୍ୟବହାର।

PO-5: ଆଧୁନିକ ଉପକରଣ ବ୍ୟବହାର(Modern tool usage): ସୀମିତତାର ବୁଝାମଣା ସହିତ, ଜଟିଳ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ କାର୍ଯ୍ୟକଳାପଗୁଡିକୁ, ପ୍ରାକ୍ ଉକ୍ତି ଏବଂ ପ୍ରତିରୂପାୟଣ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ କରି, ଉପଯୁକ୍ତ କୌଶଳ, ଉତ୍ସ, ଏବଂ ଆଧୁନିକ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ଏବଂ ଆଇଟି ଉପକରଣର ସୃଷ୍ଟି, ଚୟନ ଏବଂ ପ୍ରୟୋଗ।

PO-6 : ଇଞ୍ଜିନିୟର ଏବଂ ସମାଜ(The engineer and society): ସାମାଜିକ, ସ୍ୱାସ୍ଥ୍ୟ, ନିରାପତ୍ତା, ଆଇନଗତ ଏବଂ ସାଂସ୍କୃତିକ ପ୍ରସଙ୍ଗ ଏବଂ ବୃତ୍ତିଗତ ବୈଷୟିକ ଅଭ୍ୟାସ ପାଇଁ ପ୍ରାସଙ୍ଗିକ ଦାୟିତ୍ୱ ଆକଳନ କରିବାପାଇଁ ପ୍ରାସଙ୍ଗିକ ଜ୍ଞାନ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ଯୁକ୍ତି ପ୍ରୟୋଗ।

PO-7: ପରିବେଶ ଏବଂ ସ୍ଥାୟୀତ୍ୱ(Environment and sustainability): ସାମାଜିକ ଏବଂ ପରିବେଶ ପ୍ରସଙ୍ଗରେ ବୃତ୍ତିଗତ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ସମାଧାନର ପ୍ରଭାବକୁ ବୁଝିବା ସହିତ ଜ୍ଞାନର ଏବଂ ନିରନ୍ତର ବିକାଶର ଆବଶ୍ୟକତା ପ୍ରଦର୍ଶନ।

PO-8 : ନୈତିକତା(Ethics): ନୈତିକ ନୀତି ପ୍ରୟୋଗ, ବୃତ୍ତିଗତ ନୈତିକତା ଏବଂ ଦାୟିତ୍ୱ ତଥା ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ଅଭ୍ୟାସର ମାନଦଣ୍ଡ ପ୍ରତି ସମର୍ପିତ ଭାବନା ଜାଗ୍ରତ।

PO-9: ବ୍ୟକ୍ତିଗତ ଏବଂ ଦଳଗତ କାର୍ଯ୍ୟ(Individual and team work): ବିବିଧ ଦଳରେ ଏବଂ ବହୁମୁଖୀ ପୃଷ୍ଠଭୂମିରେ ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତିଗତ ବା ସଦସ୍ୟ ଭାବରେ କିମ୍ବା ମୁଖ୍ୟ ଭାବରେ ପ୍ରଭାବଶାଳୀ ଢଙ୍ଗରେ କାର୍ଯ୍ୟ କରିବା।

PO-10: ଯୋଗାଯୋଗ(Communication): ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ଏବଂ ସମାଜ ସହିତ ଜଟିଳ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ ଉପରେ ପ୍ରଭାବଶାଳୀ ଭାବରେ ଯୋଗାଯୋଗ ବୃଦ୍ଧି, ଯେପରିକି ପ୍ରଭାବଶାଳୀ ବିବୃତି ଲେଖିବା, ଦସ୍ତାବିଜ ରୂପରେଖ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବା ଏବଂ ବୁଝିବାରେ ସକ୍ଷମ ହେବା, ପ୍ରଭାବଶାଳୀ ଉପସ୍ଥାପନା କରିବା, ସ୍ୱଷ୍ଟ ନିର୍ଦ୍ଦେଶାବଳୀ ଦେବା ଏବଂ ଗ୍ରହଣ କରିବା ଇତ୍ୟାଦି।

PO-11 : ପ୍ରକଳ୍ପ ଏବଂ ଅର୍ଥ ପରିଚାଳନା (Project management and finance): ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ଏବଂ ପରିଚାଳନା ନୀତି ବିଷୟରେ ଜ୍ଞାନ ଏବଂ ବୁଝାମଣା ପ୍ରଦର୍ଶନ। ଏହାକୁ ନିଜ କାର୍ଯ୍ୟରେ, ପ୍ରକଳ୍ପ ପରିଚାଳନା କରିବାରେ ଏବଂ ବହୁମୁଖୀ ପରିବେଶରେ ଏକ ଦଳର ସଦସ୍ୟା ବା ମୁଖ୍ୟ ଭାବେ ପ୍ରୟୋଗ।

PO-12: ଜୀବନବ୍ୟାପୀ ଶିକ୍ଷା(Life-long learning): ଆବଶ୍ୟକତା ଚିହ୍ନଟ ସହିତ ବୈଷୟିକ ପରିବର୍ତ୍ତନର ବ୍ୟାପକତା ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ସ୍ୱାଧୀନଭାବେ ଜୀବନବ୍ୟାପି ଶିକ୍ଷାରେ ଜଡିତ ହେବାର ପ୍ରସ୍ତୁତି ଏବଂ ଦକ୍ଷତା ଅର୍ଜନ ।

ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳ

ଏହି ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ସମାପ୍ତ ହେବାପରେ, ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସକ୍ଷମ ହେବେ:

CO-1: ବକ୍ରତାର ଧାରଣାକୁ ଅବକଳନ ଓ ସମାକଳନ ଗଣିତରେ ପ୍ରୟୋଗ, ସଠିକ ଗାଣିତିକ ସୀମା ବ୍ୟବହାର କରି, ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର ଓ ଅସଂଗତ ସମାକଳନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବେ। ଏହି ପ୍ରୟୋଗଗୁଡିକ ବ୍ୟତୀତ ସେମାନଙ୍କର ବୀଟା ଓ ଗାମା ଫଳନ ବିଷୟରେ ଏକ ମୌଳିକ ଭାବନା ରହିବ।

CO-2: ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଓ ଅବୀଜୀୟ ଫଳନ ଗୁଡିକର ଆଚରଣ ଦତ୍ତ ଅନ୍ତରାଳ ଓ ବିସ୍ତାରେ ପରୀକ୍ଷା କରିପାରିବେ।

CO-3: ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହରେ ଆଧାରିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡିକରେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଧାରଣା ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିପାରିବେ, ବିଶ୍ଳେଷଣ, ସମାଧାନ ଏବଂ କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ କରିପାରିବେ ଓ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ସହିତ ଜଡିତ କରିପାରିବେ ।

CO-4: ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକର ରୈଖିକ ସ୍ୱାତନ୍ତ୍ର୍ୟ ଓ ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳତା ଶ୍ରେଣୀଭୁକ୍ତ କରିପାରିବେ ଏବଂ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍‌ର ରାଙ୍କ, ଆଧାର ଓ ମାତ୍ରାର ଧାରଣା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିପାରିବେ, ଏହା ବ୍ୟତୀତ ରୈଖିକ ମ୍ୟାପ ସଂଯୋଗ ଏବଂ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସହିତ ଏହାର ସମ୍ପର୍କ ଜାଣିପାରିବେ ।

CO-5: ରୈଖିକ ବୀଜଗଣିତ ସାହାର୍ଯ୍ୟରେ, ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ, ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର, ଆଇଗନ୍ ଆଧାର, କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ ଓ ଲାମ୍ବିକୀ କରଣ ଉପରେ ଆଧାର କରି ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡିକର ସମାଧାନ ପାଇଁ, ଅତ୍ୟାବଶ୍ୟକ ଉପକରଣ ପ୍ରୟୋଗ କରିପାରିବେ । ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟର ଗୁଣଧର୍ମ ଯାହା ଇଂଜିନିୟରିଂ ବିଭିନ୍ନ ଶାଖାରେ ଅନେକ ଜଟିଳ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ । ଏହା ସହିତ ଏକ ଭେକ୍ଟର ମାନକ, ଅର୍ଥୋନାର୍ମାଲ ଏବଂ ଲମ୍ବୀୟ ଭେକ୍ଟର ବିଷୟରେ ସଚେତନ ହୋଇପାରିବେ ।

ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳ (COs)	ପ୍ରୋଗ୍ରାମ୍ ଫଳାଫଳ ସହିତ ଆଶା କରାଯାଉଥିବା ମ୍ୟାପିଂ (PO) (1- ଦୁର୍ବଳ ସହସମ୍ବନ୍ଧ; 2- ମଧ୍ୟମ ସହସମ୍ବନ୍ଧ; 3- ଦୃଢ ସହସମ୍ବନ୍ଧ)											
	PO-1	**PO-2**	**PO-3**	**PO-4**	**PO-5**	**PO-6**	**PO-7**	**PO-8**	**PO-9**	**PO-10**	**PO-11**	**PO-12**
CO-1	3	2	2	1	1	-	2	-	-	-	-	-
CO-2	3	2	2	2	-	-	-	-	-	-	-	1
CO-3	3	3	3	2	2	2	-	-	1	1	-	1
CO-4	3	2	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-
CO-5	3	2	2	2	2	1	-	-	-	-	1	-

ସଂକ୍ଷେପଣ ଓ ପ୍ରତୀକ

ପ୍ରତୀକ ଏବଂ ସୂତ୍ରଗୁଡିକ

1- ସଂଖ୍ୟା ପ୍ରଣାଳୀ

N - ଗଣନା ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍
Z - ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍
Q - ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍
I - ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍
R - ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍
C - ସମ୍ମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍
R^n - n-ଟପଲ୍ ସେଟ୍

2- ଗ୍ରୀକ ଅକ୍ଷର

α - ଆଲଫା
β - ବିଟା
γ - ଗାମା
Γ - ଗାମା ଫଳନ
δ - ଡେଲ୍ଟା
Δ - ବଡ଼ ଡେଲ୍ଟା
ε - ଏପ୍ସିଲୋନ୍
ι - ଆୟୋଟା
θ - ଥିଟା
λ - ଲାମ୍ବଡା
μ - ମ୍ୟୁ
ϕ - ଫାଇ
ψ - ସାଇ
η - ଇଟା
π - ପାଇ
ρ - ରୋ
κ - କାପା

3- ସେଟ୍‌ରେ ସଙ୍କେତ

$\in$ - ସଦସ୍ୟ ଅଟେ
$\notin$ $\not\in$ - ସଦସ୍ୟ ନୁହେଁ
$\cup$ - ସଂଯୋଗ
$\cap$ - ପ୍ରତିଚ୍ଛେଦ
$(\ )$ - ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳ
$[\ ]$ - ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ
$\subseteq$ - ସବସେଟ୍
$\not\subseteq$ - ଏକ ସେଟ୍ ନୁହେଁ
$\subset$ - ଉପଯୁକ୍ତ ସେଟ୍
$\not\subset$ - ଉପଯୁକ୍ତ ସେଟ୍ ନୁହେଁ
$\supset$ - ସୁପରସେଟ୍
$\{\ \}$ - ସେଟ୍
ϕ - ରିକ୍ତ ସେଟ୍
$<$ - ଠାରୁ ଛୋଟ
$>$ - ଠାରୁ ବଡ
$\leq$ - ଠାରୁ ଛୋଟ ଏବଂ ସମାନ
$\geq$ - ଠାରୁ ବଡ଼ ଏବଂ ସମାନ

4- ଅନ୍ୟ କିଛି ଉପଯୋଗୀ ପ୍ରତୀକ

$\sim$ - ସମରୂପୀ
$\leftrightarrow$ - ବିନିମୟ
∞ - ଅନନ୍ତ
$\int$ - ସମାକଳନ
$!$ - ଫେକ୍ଟୋରିୟଲ(କ୍ରମ ଗୁଣିତ)
$\Rightarrow$ - ସୂଚିତ କରେ
$\forall$ - ସମସ୍ତଙ୍କ ପାଇଁ
$\Leftrightarrow$ - ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି
$\|\ \|$ - ମାନକ ଦୈର୍ଘ୍ୟ
$|\ |$ - ମୋଡୁଲସ୍/ମାପାଙ୍କ
$:$ - କୋଲୋନ୍/ବିଭାଗ
$;$ - ସେମିକୋଲୋନ୍/ଅର୍ଦ୍ଧବିଭାଗ
$[A : B]$ or $[A/B]$-ଅଗ୍‌ମେଣ୍ଟେଡେ ମାଟ୍ରିକ୍ସ

5- ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳର ପ୍ରକୃତି

ଯଦି $ax^2 + bx + c = 0$ ହେଉଛି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ, ସେହି ସମୟରେ

(a) ଏହାର ମୂଳ $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ହେଉଛି।

(b) ମୂଳମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ $= -b/a$

(c) ମୂଳମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ $= c/a$

(d) ଯଦି $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ ମୂଳ ସମାନ ଅଟେ

(e) ଯଦି $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ ମୂଳ ବାସ୍ତବ ଏବଂ ଭିନ୍ନ ଅଟେ

(f) ଯଦି $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ ମୂଳ ସମ୍ମିଶ୍ର ହେବ

(g) ଯଦି $b^2 - 4ac$ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗ, ତେଣୁ, ମୂଳ ହେଉଛି ପରିମେୟ ।

6- ଲଗାରିଦମ୍ ର ଗୁଣଧର୍ମ

(a) $\log_a 1 = 0, \log_a 0 = \infty, a > 1$ ପାଇଁ

$\log_a a = 1,$

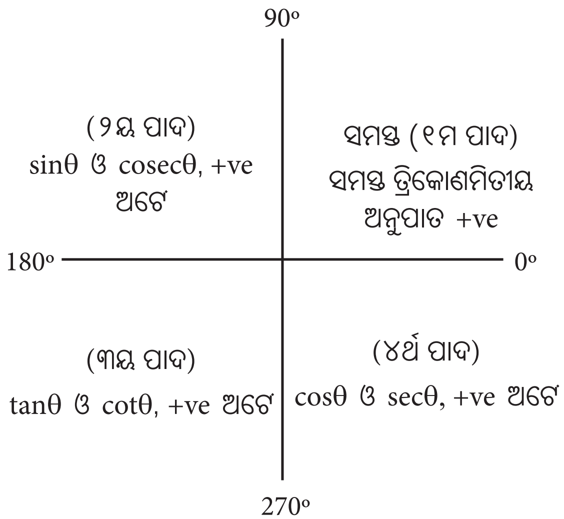
$\log_e 2 = 0.6931, \log_{10} e = 0.4343$

(b) $\log_a p + \log_a q = \log_a pq$

(c) $\log_a p - \log_a q = \log_a \dfrac{p}{q}$

(d) $\log_a p^q = q \log_a p$

7- ଚତୁର୍ଥାଂଶରେ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଅନୁପାତର ପ୍ରକୃତି



8- ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଫଳନପାଇଁ ଗୁଣଫଳ ଓ ଯୋଗର ସୂତ୍ର

(a) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(b) $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

(c) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

(d) $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

(e) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

(f) $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

(g) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \dfrac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$

(h) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$

$= 2\cos^2 A - 1 = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

(i) $\tan 2A = \dfrac{\sin 2A}{\cos 2A} = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

(j) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(k) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(l) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

(m) $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

(n) $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

(o) $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

(p) $\cos A - \cos B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{B-A}{2}$

(q) $\sin A \cos B = \dfrac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$

(r) $\cos A \sin B = \dfrac{1}{2}\left[\sin(A+B) - \sin(A-B)\right]$

(s) $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]$

(t) $\sin A \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$

(u) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, n \in Z$

(v) $\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = (4n \pm 1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

(w) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

(x) $\cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = 2n\pi$ और

$x = (2n+1)\pi, n \in Z$

(y) $e^{ax} \neq 0, \forall x \in R; a \in R$

9- ଅବକଳନର ମୌଳିକ ସୂତ୍ର

(a) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

(b) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

(c) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

(d) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

(e) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

(f) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

(g) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(h) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$

(i) $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \log_e a}$

(j) $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$

(k) $\frac{d}{dx}(ax+b)^n = na(ax+b)^{n-1}$

(l) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1$

(m) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1$

(n) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$

(o) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

(p) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x \neq 0, \pm 1$

(q) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x \neq 0, \pm 1$

(r) $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

(s) $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

10- ସମାକଳନର ମୌଳିକ ସୂତ୍ର

(a) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

(b) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

(c) $\int \tan x \, dx = -\log \cos x + c = \log \sec x + c$

(d) $\int \cot x \, dx = \log \sin x + c$

(e) $\int \sec x \, dx = \log(\sec x + \tan x) + c$

(f) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log(\operatorname{cosec} x - \cot x) + c$

(g) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

(h) $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$

(i) $\int e^x \, dx = e^x + c$

(j) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c; a > 0, a \neq 1$

(k) $\int \frac{1}{x} dx = \log_e x + c$

(l) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$

(m) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

(n) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + c$

(o) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{x-a}{x-a}\right) + c$

(p) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

(q) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + c$

$= \log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c$

(r) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + c$

$= \log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + c$

(s) $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)$

(t) $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx + b\sin bx\right)$

ସଂକ୍ଷେପଣ

lim - ସୀମା

$\therefore$ - ତେଣୁ

$\because$ - ଯେହେତୁ

i,e, - ଅର୍ଥାତ୍

$f^n(a)$ - a ରେ f ର nତମ ଅବକଳନ

Sup. - ସୁପ୍ରୀମମ-(କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଉଚ୍ଚ ପରିବନ୍ଧ)

Inf. - ଇଂଫୀମମ-(ଗରିଷ୍ଠ ନିମ୍ନ ପରିବନ୍ଧ)

$Lf'(a)$ - $x = a$ ରେ f ର ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱର ଅବକଳନ

$Rf'(a)$ - $x = a$ ରେ f ର ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱର ଅବକଳନ

$Lf(a)$ - $x = a$ ରେ f ର ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱର ସୀମା

$Rf(a)$ - $x = a$ ରେ f ର ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱର ସୀମା

diag. - କର୍ଣ୍ଣ

L.H.S. - ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ

R.H.S. - ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

dim - ମାତ୍ରା

adj(A) - ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Aର ଆଡ୍‌ଜଏଣ୍ଟ

min. - ନ୍ୟୁନତମ

max. - ସର୍ବାଧିକ

L.C. - ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ

L.D. - ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳତା

L.I. - ରୈଖିକ ସ୍ୱାତନ୍ତ୍ର୍ୟ

ଚିତ୍ର ସୂଚୀ

ଅଧ୍ୟାୟ 1: କଳନ ଗଣିତ -I

		ପୃଷ୍ଠା ସଂଖ୍ୟା
ଚିତ୍ର 1.1	ବକ୍ରର ବଙ୍କା	3
ଚିତ୍ର 1.2	ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା	3
ଚିତ୍ର 1.3	ବକ୍ରତାର ଗାଣିତିକ ସଂଜ୍ଞା	4
ଚିତ୍ର 1.4	ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତାର ବିଶେଷତ୍ୱ	4
ଚିତ୍ର 1.5	ଡେକାର୍ଟୀୟ ବକ୍ର ପାଇଁ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ	5
ଚିତ୍ର 1.6	ପୋଲାର ବକ୍ର ପାଇଁ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ	6
ଚିତ୍ର 1.9	ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର	16
ଚିତ୍ର 1.10	କେନ୍ଦ୍ରଜ (ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ)	18
ଚିତ୍ର 1.11	ଏକ ବୃତ୍ତର ପ୍ରତିକେନ୍ଦ୍ରଜ (ଇନ୍‌ଭୋଲ୍ୟୁଟ)	19
ଚିତ୍ର 1.12	ଏକ କାଟାନେରୀର ପ୍ରତିକେନ୍ଦ୍ରଜ (ଇନ୍‌ଭୋଲ୍ୟୁଟ)	19
ଚିତ୍ର 1.13	ଡେଲଟଏଡର ର ଇନ୍‌ଭୋଲ୍ୟୁଟ	20
ଚିତ୍ର 1.14	ପାରାବୋଲାର ପ୍ରତିକେନ୍ଦ୍ରଜ (ଇନ୍‌ଭୋଲ୍ୟୁଟ)	20
ଚିତ୍ର 1.15	ଏଲିପ୍ସର ପ୍ରତିକେନ୍ଦ୍ରଜ (ଇନ୍‌ଭୋଲ୍ୟୁଟ)	20
ଚିତ୍ର 1.17	ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିକ୍ରମଣ	88
ଚିତ୍ର 1.18	ବୃତ୍ତର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ	88
ଚିତ୍ର 1.19	ବର୍ଗର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ	88
ଚିତ୍ର 1.20	ଡେକାର୍ଟୀୟ ବକ୍ରର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ	89

ଅଧ୍ୟାୟ 2: କଳନ ଗଣିତ-II

ଚିତ୍ର 2.1	ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ	122
ଚିତ୍ର 2.5	ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧମାନ ଉପପାଦ୍ୟ	129
ଚିତ୍ର 2.6	କୋଶୀଙ୍କ ମାଧମାନ ଉପପାଦ୍ୟ	135
ଚିତ୍ର 2.7	ଗରିଷ୍ଠ-ଲଘିଷ୍ଠ	178
ଚିତ୍ର 2.8	ଚରମ ମୂଲ୍ୟପାଇଁ ପରୀକ୍ଷା	179
ଚିତ୍ର 2.9	ସ୍ଥାନୀୟ ଚରମ ମୂଲ୍ୟ	180

ଅଧ୍ୟାୟ 3: ମାଟ୍ରିକ୍ସ

ଚିତ୍ର 3.1	ଏକକ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରୟୋଗ	187
ଚିତ୍ର 3.2	ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ	205

ଶିକ୍ଷକମାନଙ୍କପାଇଁ ନିର୍ଦ୍ଦେଶାବଳୀ

ଫଳାଫଳ ଆଧାରିତ ଶିକ୍ଷା(Outcome Based Education-OBE)ର କାର୍ଯ୍ୟକାରିତାପାଇଁ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କର ଜ୍ଞାନ ଏବଂ ଦକ୍ଷତାର ସ୍ତରକୁ ବୃଦ୍ଧି କରାଯିବା ଉଚିତ୍। ଏହାର ଉପଯୁକ୍ତ କାର୍ଯ୍ୟକାରିତାପାଇଁ ଶିକ୍ଷକବୃନ୍ଦ ପ୍ରମୁଖ ଦାୟିତ୍ୱ ବହନ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ। ଏହି OBE ପ୍ରଣାଳୀରେ ଶିକ୍ଷକମାନଙ୍କର ଦାୟିତ୍ୱ ମଧ୍ୟରୁ ନିମ୍ନରେ କିଛି ବର୍ଣ୍ଣନା କରାଯାଇଅଛି:

- ସମସ୍ତ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ସର୍ବୋତ୍ତମ ସୁବିଧାପାଇଁ ସୀମିତ ପ୍ରତିବନ୍ଧକ ମଧ୍ୟରେ ସେମାନେ ସମୟର ଉପଯୋଗ କରିବା ଉଚିତ୍।
- ସେମାନେ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କର ଅନ୍ୟ କୌଣସି ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଅଯୋଗ୍ୟତାକୁ ବିଚାରକୁ ନେଇ ଭେଦଭାବ ନ କରି କେବଳ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମାନଦଣ୍ଡ ଉପରେ ଆକଳନ କରିବା ଉଚିତ୍।
- ସେମାନେ ଅନୁଷ୍ଠାନ ଛାଡିବା ପୂର୍ବରୁ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କ ଶିକ୍ଷଣ ଦକ୍ଷତାକୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସ୍ତରକୁ ବୃଦ୍ଧି କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରିବା ଉଚିତ୍।
- ସମସ୍ତ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନେ ସେମାନଙ୍କର ଶିକ୍ଷା ସମାପ୍ତ କରିବା ପରେ ଗୁଣାତ୍ମକ ଜ୍ଞାନ ଏବଂ ଦକ୍ଷତା ବୃଦ୍ଧି କରିପାରୁଥିବାର ସେମାନେ ନିଶ୍ଚିତ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ।
- ସେମାନେ ସର୍ବଦା ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କୁ ସେମାନଙ୍କର ଚରମ କାର୍ଯ୍ୟଦକ୍ଷତା କ୍ଷମତାକୁ ବିକଶିତ କରିବାରେ ଉତ୍ସାହିତ କରିବା ଉଚିତ୍।
- ନୂତନ ଆଭିମୁଖ୍ୟକୁ ଏକତ୍ର କରିବାପାଇଁ ସେମାନେ ଗୋଷ୍ଠୀ କାର୍ଯ୍ୟ ଏବଂ ଦଳ କାର୍ଯ୍ୟକୁ ସୁଗମ ଏବଂ ଉତ୍ସାହିତ କରିବା ଉଚିତ୍।
- ସେମାନେ ବ୍ଲୁମଙ୍କ ଟ୍ୟାକ୍ସୋନୋମିକୁ ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନର ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନୁସରଣ କରିବା ଉଚିତ୍।

1. ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ:

ବ୍ଲୁମଙ୍କ ବର୍ଗୀକରଣ(Bloom's Taxonomy)

ସ୍ତର	ଶିକ୍ଷକ ପରୀକ୍ଷା କରିବା ଉଚିତ	ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ ସକ୍ଷମ ହେବା ଉଚିତ	ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନର ସମ୍ଭାବ୍ୟ ମୋଡ୍
ସୃଷ୍ଟି କରିବା Creating	ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କର ସୃଷ୍ଟି କରିବାର ଦକ୍ଷତା	ଡିଜାଇନ୍ କିମ୍ବା ସୃଷ୍ଟି କରିବା	କ୍ଷୁଦ୍ର ପ୍ରକଳ୍ପ
ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କରିବା Evaluating	ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କର ଯଥାର୍ଥତା ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କରିବାର ଦକ୍ଷତା	ଯୁକ୍ତି କିମ୍ବା ରକ୍ଷା କରିବା	ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କାର୍ଯ୍ୟ
ବିଶ୍ଳେଷଣ କରିବା Analyzing	ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କର ଭିନ୍ନ କରିବାର ଦକ୍ଷତା	ଭିନ୍ନ କିମ୍ବା ଅଲଗା କରିବା	ପ୍ରକଳ୍ପ / ଲ୍ୟାବ୍ ପଦ୍ଧତି
ଆବେଦନ କରିବା Applying	ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କର ସୂଚନା ବ୍ୟବହାର କରିବାର ଦକ୍ଷତା	ସଞ୍ଚାଳନ କିମ୍ବା ପ୍ରଦର୍ଶନ କରିବା	ବୈଷୟିକ ଉପସ୍ଥାପନା / ପ୍ରଦର୍ଶନ
ବୁଝାମଣା Understanding	ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କର ଧାରଣାକୁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିବାର ଦକ୍ଷତା	ବ୍ୟାଖ୍ୟା କିମ୍ବା ଶ୍ରେଣୀଭୁକ୍ତ କରିବା	ଉପସ୍ଥାପନା / ସେମିନାର
ସ୍ମରଣ କରିବା Remembering	ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କର ମନେ ପକାଇବାର ଦକ୍ଷତା	ବ୍ୟାଖ୍ୟା କିମ୍ବା ମନେ ରଖିବା	ପ୍ରଶ୍ନୋତ୍ତରୀ

ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନଙ୍କପାଇଁ ନିର୍ଦ୍ଦେଶାବଳୀ

ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ମଧ୍ୟ OBE କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ କରିବାପାଇଁ ସମାନ ଭାବେ ଦାୟିତ୍ୱ ନେବା ଉଚିତ। ସେମାନଙ୍କ ଦାୟିତ୍ୱଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ନିମ୍ନରେ କିଛି ବର୍ଣ୍ଣନା କରାଯାଇଅଛି:

- ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାଠ୍ୟକ୍ରମରେ ଏକ ଅଧ୍ୟାୟ ଆରମ୍ଭ ହେବା ପୂର୍ବରୁ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ (Unit Outcome - UO) ବିଷୟରେ ଭଲ ଭାବରେ ଅବଗତ ହେବା ଉଚିତ୍।
- ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଆରମ୍ଭ ହେବା ପୂର୍ବରୁ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳ (Course Outcome - CO) ବିଷୟରେ ଭଲ ଭାବରେ ଅବଗତ ହେବା ଉଚିତ୍।
- କାର୍ଯ୍ୟକ୍ରମ ଆରମ୍ଭ ହେବା ପୂର୍ବରୁ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କାର୍ଯ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳ (Programme Outcome - PO) ବିଷୟରେ ଭଲ ଭାବରେ ଅବଗତ ହେବା ଉଚିତ୍।
- ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନେ ଉପଯୁକ୍ତ ପ୍ରତିଫଳନ ଏବଂ କାର୍ଯ୍ୟ ସହିତ ସମାଲୋଚନା ଏବଂ ଯୁକ୍ତିଯୁକ୍ତ ଭାବରେ ଚିନ୍ତା କରିବା ଉଚିତ୍।
- ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀଙ୍କର ଶିକ୍ଷାଗ୍ରହଣ ଦୈନନ୍ଦିନ ଏବଂ ବାସ୍ତବିକ ଜୀବନର ପରିଣାମ ସହିତ ସଂଯୁକ୍ତ ଏବଂ ଏକୀକୃତ ହେବା ଉଚିତ୍।
- ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ OBEର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ତରରେ ସେମାନଙ୍କର ଦକ୍ଷତା ବିଷୟରେ ଭଲ ଭାବରେ ଅବଗତ ହେବା ଉଚିତ୍।

ବିଷୟ ସୂଚୀ

ପ୍ରାକ୍‌କଥନ iii
ଅନୁବାଦକଙ୍କ କଲମରୁ v
କୃତଜ୍ଞତା vii
ମୁଖବନ୍ଧ ix
ଫଳାଫଳ ଆଧାରିତ ଶିକ୍ଷା xi
ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳ xiii
ସଂକ୍ଷେପଣ ଓ ପ୍ରତୀକ xv
ଚିତ୍ରସୂଚୀ xix
ଶିକ୍ଷକମାନଙ୍କପାଇଁ ନିର୍ଦ୍ଦେଶାବଳୀ xx
ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନଙ୍କପାଇଁ ନିର୍ଦ୍ଦେଶାବଳୀ xxi

1. କଳନ ଗଣିତ-୧ 1–116

ଅଧ୍ୟାୟ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ 1
ଯୁକ୍ତିଯୁକ୍ତତା 1
ପ୍ରାକ୍-ଆବଶ୍ୟକତା 2
ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ ସହିତ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳର ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ 2
ଇତିହାସ 3
1.1 ବକ୍ରତା 3
1.1.1 ବକ୍ରତାର ଗାଣିତିକ ସଂଜ୍ଞା 4
1.1.2 ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 4
1.1.3 ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର, ବକ୍ରତା ବୃତ୍ତ 16
1.1.4 ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ 16
1.1.5 ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ 18
1.1.6 ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ 19
1.1.7 ଏନ୍‌ଭଲପ୍ 21
1.2 ସୀମାଯୁକ୍ତ ଓ ଅସଂଗତ ସମାକଳଜର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ 39
1.2.1 ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜ 39
1.2.2 ସମାକଳନ ଗଣିତର ପ୍ରଥମ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ 41
1.2.3 ସମାକଳନ ଗଣିତର ଦ୍ୱିତୀୟ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ 42
1.2.4 ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳର ଗୁଣଧର୍ମ 44

1.2.5 ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ 50
1.2.6 ଅସଂଗତ ସମାକଳର ପ୍ରକାର 50
1.2.7 $\int_a^b f(x)dx$, $x = a$ ରେ ଅଭିସରଣ ପାଇଁ ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା 56
1.2.8 ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଉପପାଦ୍ୟ 57
1.2.9 ∞ ରେ ଅଭିସରଣ ପାଇଁ ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା 61
1.2.10 ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଉପପାଦ୍ୟ 62
1.2.11 ପରମ ଅଭିସରଣ 64
1.3 ବିଟା , ଗାମା ଫଳନ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କ ଗୁଣଧର୍ମ 67
1.3.1 ଗାମା ଫଳନ 67
1.3.2 ବିଟା ଫଳନ 71
1.3.3 ବିଟା ଏବଂ ଗାମା ଫଳନ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ 74
1.3.4 ଅନୁରୂପ ସୂତ୍ର 80
1.4 ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା 88
1.4.1 ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଘନର ଘନଫଳ 89
1.4.2 ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଘନର ପୃଷ୍ଠ ତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 90
ଆକର୍ଷଣୀୟ ତଥ୍ୟ 100
ଭିଡିଓ ସଂଯୋଗ 100
ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ 100
ସାରାଂଶ 108
ପ୍ରକଳ୍ପ / ବ୍ୟବହାରିକ/ କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ 113
ଅଧିକ ଜାଣନ୍ତୁ 114
ସହାୟକ ଏବଂ ପରାମର୍ଶ ମୂଳକ ପଠନ 115

2. କଳନ ଗଣିତ-୨ 117–206

ଅଧ୍ୟାୟ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ 117
ଯୁକ୍ତି ଯୁକ୍ତତା 117
ପ୍ରାକ୍-ଆବଶ୍ୟକତା 118
ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ ସହିତ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳର ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ 118
ଇତିହାସ 119
2.1 ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ 119
2.1.1 ରୋଲଙ୍କର ପ୍ରମେୟ ଜ୍ୟାମିତିକ ବ୍ୟାଖ୍ୟା 122
2.1.2 ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ 128

2.1.3 ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜୀଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ଜ୍ୟାମିତିକ ବ୍ୟାଖ୍ୟା 129
2.1.4 କୋଶୀଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଇପପାଦ୍ୟ 134
2.1.5 କୋଶୀଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ଜ୍ୟାମିତିକ ବ୍ୟାଖ୍ୟା 135
2.2 ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ 140
2.2.1 ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜୀଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପ ସହିତ ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ 140
2.2.2 ମ୍ୟାକଲରିନଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସହିତ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପ 141
2.2.3 ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସହିତ କୋଶୀଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପ 142
2.2.4 ମ୍ୟାକଲରିନ୍‌ଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସହିତ କୋଶୀଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପ 144
2.3 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ ଏବଂ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ 151
2.3.1 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ $\frac{0}{0}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ପାଇଁ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ (ପ୍ରକାର-1) 152
2.3.2 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ $\frac{\infty}{\infty}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ପାଇଁ, ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ (ପ୍ରକାର-2) 160
2.3.3 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ $0 \times \infty$ ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ପାଇଁ, ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ (ପ୍ରକାର-3) 161
2.3.4 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ $\infty - \infty$ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ପାଇଁ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ (ପ୍ରକାର-4) 163
2.3.5 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ 0^0 ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ପାଇଁ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ(ପ୍ରକାର-5) 167
2.3.6 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ 1^∞ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ପାଇଁ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ (ପ୍ରକାର-6) 169
2.3.7 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ ∞^0 ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ପାଇଁ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ (ପ୍ରକାର-7) 171
2.4 ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠ 178
2.4.1 ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠ ପାଇଁ ସର୍ତ୍ତ 178
2.4.2 ଚରମମାନ (ଗରିଷ୍ଠ କିମ୍ବା ଲଘିଷ୍ଠ) ପାଇଁ ପ୍ରଥମ ଅବକଳଜ ପରୀକ୍ଷା 179
2.4.3 ଚରମ ମାନ ପାଇଁ ଦ୍ୱିତୀୟ ଅବକଳଜ ପରୀକ୍ଷା (ଗରିଷ୍ଠ କିମ୍ବା ଲଘିଷ୍ଠ) 183
ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ 192
ସାରାଂଶ 199
ପ୍ରକଳ୍ପ/ବ୍ୟବହାରିକ/କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ 201
ଅଧିକ ଜାଣନ୍ତୁ 205
ସହାୟକ ଏବଂ ପରାମର୍ଶମୂଳକ ପଠନ 206

3. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 207–320

ଅଧ୍ୟାୟ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ 207
ଯୁକ୍ତିଯୁକ୍ତତା 207
ପ୍ରାକ୍-ଆବଶ୍ୟକତା 207
ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ
ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ ସହିତ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳର ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ 207

ଇତିହାସ 209

ଉପକ୍ରମ 209

3.1 ସଂଜ୍ଞା 210

3.1.1 ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ମାଟ୍ରିକ୍ସ 211

3.1.2 ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରେ ପ୍ରକ୍ରିୟା 217

3.2 ଭେକ୍ଟର 221

3.2.1 ଭେକ୍ଟର ରେ ପ୍ରକ୍ରିୟା 222

3.3 ପ୍ରାଥମିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା (ରୂପାନ୍ତରଣ) 224

3.3.1 ପ୍ରାଥମିକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ 224

3.4 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଇକେଲନ୍ ରୂପ 225

3.4.1 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଧାଡି ଇକେଲନ୍ ରୂପ 225

3.4.2 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଧାଡି ହ୍ରାସକରଣ ଇକେଲନ୍ ରୂପ 225

3.4.3 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସ୍ତମ୍ଭ- ହ୍ରାସକରଣ ଇକେଲନ୍ ରୂପ 225

3.4.4 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସ୍ତମ୍ଭ ସମାନୀୟ ଇକେଲନ୍ ରୂପ 225

3.5 ଡିଟର୍‌ମିନାଣ୍ଟ 226

3.5.1 ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡରର ଡିଟର୍‌ମିନାଣ୍ଟର ବ୍ୟାଖ୍ୟା 226

3.5.2 ତୃତୀୟ ଅର୍ଡର ଡିଟର୍‌ମିନାଣ୍ଟର ସଂପ୍ରସାରଣ 227

3.5.3 ଡିଟର୍‌ମିନାଣ୍ଟର ଗୁଣଧର୍ମ 230

3.5.4 ଡିଟର୍‌ମିନାଣ୍ଟର ର ପ୍ରୟୋଗ 237

3.5.5 ମାଇନର ଏବଂ କୋ- ଫାକ୍ଟର 241

3.5.6 ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଡ୍‌ଜଏଣ୍ଟ 242

3.6 ମାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କ 250

3.6.1 ମାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାପଇଁ ଅନ୍ୟ ଏକ ଉପାୟ 251

3.7 ମାଟ୍ରିକ୍ସର ନର୍ମାଲ ରୂପ (କାନନିକାଲ ରୂପ) 256

3.7.1 P ଓ Q କୁ ଗଣନା ଯେଉଁଠାରେ $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 262

3.8 ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ 269

3.8.1 ରୈଖିକ ସମୀକରଣର ପ୍ରକାର 270

3.8.1.2 ସମଘାତୀ ସମୀକରଣ 280

3.9 ଡିଟର୍‌ମିନାଣ୍ଟ ଦ୍ୱାରା ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ ସମାଧାନ 285

3.9.1 କ୍ରାମଙ୍କର ନିୟମ 285

3.9.2 ଗସ୍ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି (ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ ସମାଧାନ) 289

3.9.3 ଗସ୍-ଜୋର୍ଡାନ ପଦ୍ଧତି (ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ ସମାଧାନ) 294

3.9.4 ଗସ୍ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା ମାଟ୍ରିକ୍ସର ନିର୍ଣ୍ଣୟ 299
3.9.5 ଗସ୍-ଜୋର୍ଡାନ ପଦ୍ଧତିଦ୍ୱାରା ମାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ 303
ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ 306
ସାରାଂଶ 315
ପ୍ରକଳ୍ପ/ବ୍ୟବହାରିକ/କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ 315
ଅଧିକ ଜାଣନ୍ତୁ 319
ସହାୟକ ଏବଂ ପରାମର୍ଶ ମୂଳକ ପଠନ 320

4. ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ I **321–395**

ଅଧ୍ୟାୟ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ 321
ପ୍ରାକ୍-ଆବଶ୍ୟକତା 321
ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ *(UOs)* 322
ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳ ସହିତ ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳର ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ 322
ଇତିହାସ 322
4.1 ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ 323
4.1.1 R^n ରେ ଭେକ୍ଟର 323
4.1.2 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସରେ ଭେକ୍ଟର 324
4.1.3 ସର୍ବାଧିକ n ଘାତ ପଲିନୋମିଆଲରେ ଭେକ୍ଟର 324
4.2 ଭେକ୍ଟର ର ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳତା ଏବଂ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ରତା 330
4.3 ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ 335
4.3.1 ରୈଖିକ ବିସ୍ତୃତି 340
4.3.2 ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ର ଆଧାର 342
4.3.3 ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ର ମାତ୍ରା 343
4.4 ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ 350
4.5 ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ସହିତ ଜଡିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 357
4.5.1 କ୍ରମିତ ଆଧାର ଭିତ୍ତିରେ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ମାଟ୍ରିକ୍ସ 357
4.6 ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ସଂଯୋଗ (ଗୁଣଫଳ) 365
4.6.1 ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ (ଅପରେଟ)ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ 367
4.7 ଶୂନ ସ୍ପେଶ୍ କିମ୍ବା ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର କର୍ଣ୍ଣେଲ 371
4.8 ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ବ୍ୟାପ୍ତି କିମ୍ବା ପ୍ରତିବିମ୍ବ 371
4.9 ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ରାଙ୍କ ଓ ନଲିଟି (ଶୂନ୍ୟତା) 371
4.9.1 ସିଲଭେଷ୍ଟରଙ୍କ ନିୟମ/ରାଙ୍କ-ନଲିଟି ଉପପାଦ୍ୟ 371

ସାରାଂଶ 388
ଅଧିକ ଜାଣନ୍ତୁ 393
ସହାୟକ ଏବଂ ପରାମର୍ଶ ମୂଳକ ପଠନ 395
5. ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍-**II** **396-462**
ଅଧ୍ୟାୟ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ 396
ଯୁକ୍ତି ଯୁକ୍ତତା 396
ପ୍ରାକ୍-ଆବଶ୍ୟକତା 396
ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ *(UOs)* 397
ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ ସହିତ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳର ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ 397
ଇତିହାସ 398
5.1 ରୈଖିକ ଅପରେଟର ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଓ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର 398
5.2 ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଓ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର 398
5.2.1 ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟର ଗୁଣଧର୍ମ 400
5.2.2 ଆଇଗନ ସ୍ପେଶ୍ 401
5.2.3 ଆଇଗନ ଆଧାର 401
5.3 ସମମିତ ଓ ବିଷମ ସମମିତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପପାଦ୍ୟ 418
5.4 ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 423
5.4.1 ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୁଣଧର୍ମ 423
5.5 ରୈଖିକ ଅପରେଟରର କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ 429
5.5.1 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ 429
5.6 ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ୍ 436
5.6.1 ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ୍‌ର ଗୁଣଧର୍ମ 437
5.6.2 ଭେକ୍ଟରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (ନର୍ମ) 438
5.6.3 ଲମ୍ବୀୟ ଭେକ୍ଟର 442
5.6.4 ଆର୍ଥୋନର୍ମାଲ ଭେକ୍ଟର 442
5.7 ଗ୍ରାମ-ସ୍କିମିଡ ଲାମ୍ବିକୀକରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା 444
ବାସ୍ତବ ଜୀବନର ପ୍ରୟୋଗ 451
ସାରାଂଶ 457
ପ୍ରକଳ୍ପ/ବ୍ୟବହାରିକ/କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ 461
ଅଧିକ ଜାଣନ୍ତୁ 462
ସହାୟକ ଏବଂ ପରାମର୍ଶ ମୂଳକ ପଠନ 462
CO ଓ PO ପ୍ରାପ୍ତି ସାରଣୀ 463
ଅନୁକ୍ରମଣିକା 464
ପରିଭାଷା 465-466

1 କଳନ ଗଣିତ 1 (Calculus-1)

ଅଧ୍ୟାୟ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ:

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ବକ୍ରତା, ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ, ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର, ବୃତ୍ତର ବକ୍ରତା, ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ, ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ, ଏନ୍‌ଭଲପ, ସୀମାଯୁକ୍ତ ଓ ଅସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ, ବିଟା ଓ ଗାମା ଫଳନ ଏବଂ ଏହାର ଗୁଣଧର୍ମ, ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏବଂ ଘନଫଳ ଜାଣିବା ନିମିତ୍ତ ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳନର ପ୍ରୟୋଗ ବିଷୟରେ ବିସ୍ତୃତ ଭାବରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଉପରୋକ୍ତ ସମସ୍ତ ବିଷୟ ବସ୍ତୁ ଗୁଡିକୁ ଅନେକ ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି, ଯେପରି ଭାବେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ମାନେ ସମସ୍ତ ସିଦ୍ଧାନ୍ତର ପ୍ରୟୋଗକୁ ସ୍ୱଷ୍ଟ ଭାବରେ ବୁଝିପାରିବେ । ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀଙ୍କ ପାଇଁ ଯେଉଁରେ ଆବଶ୍ୟକତା ଅଛି ବିଷୟବସ୍ତୁକୁ ଦୃଷ୍ଟିଗୋଚର କରିବା ପାଇଁ ଚିତ୍ରଗୁଡିକୁ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ କରାଯାଇଛି ।

ଯୁକ୍ତିଯୁକ୍ତତା:

ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ (ପ୍ରତିକେନ୍ଦ୍ରଜ) ଓ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ (କେନ୍ଦ୍ରଜ) ଅବକଳନ ଜ୍ୟାମିତିର ଏକ ଅଂଶ, ଯାହାକି ବିଜ୍ଞାନ, କୃତ୍ରିମ ବୁଦ୍ଧିମତା (artificial intelligence) ଏବଂ ଯନ୍ତ୍ରମାନବ ଶାସ୍ତ୍ର (Robotics)ରେ କାମ କରୁଥିବା ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନଙ୍କ ପାଇଁ ଏକ ମହତ୍ତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଧାରଣା । ଏହାର ଅନେକ ପ୍ରୟୋଗ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନ ଶୈଳୀରେ ପରିଲକ୍ଷିତ ।

ବୃତ୍ତର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟର ଅନେକ ମହତ୍ତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରୟୋଗର ମଧ୍ୟରୁ ଗାଡ଼ିର ଗିଅର ନକ୍ସା ଅଙ୍କନ ହେଉଛି ଅନ୍ୟତମ ଅଟେ । ଏହାର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଅଂଶରେ ନିର୍ମିତ ଗିଅର ଦନ୍ତଟି ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ ଆକାର ପରି ହୋଇଥାଏ ।

ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟର ମୂଳ ପ୍ରୟୋଗ ଦୋଳନ ଘଡ଼ି ଓ ଖେଳନା ନିର୍ମାଣରେ ହୋଇଥାଏ, ଯେଉଁରେ ଏକ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଚାବି ଏକ ସ୍ପ୍ରିଙ୍ଗକୁ ବୃତ୍ତୀୟ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ ପଥରେ ଗତି ଦେବାପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ ।

ଆମେ ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳନକୁ ଉପଯୋଗ କରି ଯେତେବେଳେ ଜଳଭଣ୍ଡାର ପୂର୍ଣ୍ଣ ଥାଏ, ବନ୍ଧ ଉପରେ ପଡୁଥିବା ଚାପର କଳନା କରିଥାଉ, ଏବଂ ଆମେ ମଧ୍ୟ ଯାଞ୍ଚ କରୁ ଯେ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ଜଳସ୍ତର, ଶକ୍ତିକୁ କିପରି ପ୍ରଭାବିତ କରେ ।

ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜ ଏକ ଶକ୍ତିଶାଳୀ ସାଧନ ଯାହା ସାହାଯ୍ୟରେ ଆମେ ପୃଷ୍ଠ ତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ଘନଫଳ, ବସ୍ତୁତ୍ୱ ଓ ଆୟତନ,ବୃଦ୍ଧି ଓ କ୍ଷୟ ଆଦିକୁ ବୁଝିବାରେ ସମର୍ଥ ହେଉ ।

ଅସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ସୀମାବଦ୍ଧ ବକ୍ରଗୁଡିକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିଥାଉ ।

ଗାମା ଫଳନର ଉପଯୋଗ ଗାମା ବଣ୍ଟନରେ କରାଯାଇଥାଏ, ଯାହାକୁ ସମୟ ଆଧାରିତ ଘଟଣା ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ କରିବାପାଇଁ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ, ଯଥା ଇଲେକ୍ଟ୍ରୋନିକ ଉପାଦାନର ଜୀବନ ଅବଧି ।

ପ୍ରାକ୍-ଆବଶ୍ୟକତା

1. ସମାକଳନ ଓ ଅବକଳନର ମୌଳିକ ଜ୍ଞାନ।
2. ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ବକ୍ର, ଯଥା ବୃତ୍ତ, ଏଲିପ୍ସ, ହାଇପରବୋଲା ଇତ୍ୟାଦିରେ ଜ୍ଞାନ।
3. କ୍ରମ ଗୁଣିତ ବିଷୟରେ ଧାରଣା।
4. ସମାକଳନକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଦୁଇ କିମ୍ବା ଅଧିକ ବକ୍ର ଦ୍ୱାରା ସୀମାବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା।

ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟକୁ ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଧ୍ୟୟନ କଲାପରେ, ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ନିମ୍ନଲିଖିତରେ ସକ୍ଷମ ହେବେ।

U1-01: ବକ୍ରତା ଏବଂ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଉପରେ ଧାରଣାକୁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିପାରିବେ, ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ବକ୍ରର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବେ।

U1-02: ସମାକଳଜ ପରୀକ୍ଷଣକୁ ବିଭିନ୍ନ ଫଳନ ପାଇଁ ପ୍ରୟୋଗକରି ସେମାନଙ୍କର ଅଭିସରଣ ଓ ଅପସରଣ ପ୍ରକୃତି ବିଷୟରେ ଜ୍ଞାନ ପାଇପାରିବେ।

U1-03: ବିଟା-ଗାମା ଫଳନର ଧାରଣା ସହିତ ପରିଚିତ ହେଲାପରେ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ କରି ବିଭିନ୍ନ ସମାକଳଜର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କରିପାରିବେ।

U1-04: ଡେକାର୍ଟୀୟ, ପାରାମିଟରୀୟ ଏବଂ ଧ୍ରୁବୀୟ ବକ୍ର ପାଇଁ ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏବଂ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟିହେଉଥିବା ଘନାକୃତି ବସ୍ତୁର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବେ।

ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ (UOs) ସହ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳ (COs)ର ମ୍ୟାପିଂ

ଅଧ୍ୟାୟ 1ର ଫଳାଫଳ (COs)	ପାଠ୍ୟକ୍ରକ ଫଳାଫଳ (COs) ସହିତ ଆଶା କରାଯାଉଥିବା ମ୍ୟାପିଂ *(1- ଦୁର୍ବଳ ସହସମ୍ବନ୍ଧ; 2-ମଧ୍ୟମ ସହସମ୍ବନ୍ଧ; 3-ଦୃଢ ସହସମ୍ବନ୍ଧ)*				
	CO-1	**CO-2**	**CO-3**	**CO-4**	**CO-5**
U1-01	3	1	-	-	1
U1-02	2	3	-	-	-
U1-03	3	-	-	-	-
U1-04	2	-	-	-	1

ଇତିହାସ:

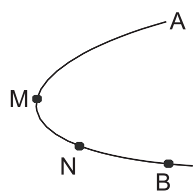
"ମୁଁ ବିଶ୍ୱାସ କରେ ଯେ ଆମେ ନିଶ୍ଚିତ ଭାବରେ କିଛି ଜାଣିନାହୁଁ, ବୋଧେହୁଏ ସବୁକିଛି" – **ଖ୍ରୀଷ୍ଟିଆନ ହାଇଜେନ୍**

ଆପୋଲୋନିୟସ (ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ 262-190)ରେ ପରୋକ୍ଷ ଭାବରେ କୋନିକ ସେକସନର ବକ୍ରତା 'ଗଣନା' କରିଥିଲେ, ଯେତେବେଳେ ପୁସ୍ତକ (କୋନିକା V) ରେ ଅଭିଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରିବା ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡିକର ସମାଧାନ କରୁଥିଲେ, କିନ୍ତୁ ସେ ଏହାକୁ ବକ୍ରର ଗୁଣ ଭାବରେ ଚିନ୍ତା କରିନଥିଲେ । ତାଙ୍କର 'ଗଣନା' କେବଳ ଛେଦର ସୃଷ୍ଟି ପାଇଁ ଥିଲା । ଡେକାର୍ଟେଙ୍କ ପୂର୍ବରୁ ନିକୋଲେ ଓରେସ୍ମେ (ଖ୍ରୀ 1320-1382) ସର୍ବପ୍ରଥମେ ବକ୍ରତାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିଥିଲେ, ଯେତେବେଳେ ସେ ସ୍ଥାନାଙ୍କର ବ୍ୟବହାର କରିଥିଲେ । ସେ ଏହାକୁ ବକ୍ରର ବଙ୍କାଇବାର ସ୍ଥାନୀୟମାପ ହିସାବରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିଥିଲେ, ଏବଂ ଲାଟିନ ଭାଷାରେ 'କରଭିଟାସ' (Curvitas) ବୋଲି ନାମ ଦେଇଥିଲେ । ପରେ ସେ ପ୍ରସ୍ତାବ ରଖିଥିଲେ ଯେ ବୃତ୍ତ ପାଇଁ ଏହା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ଭାବରେ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇ ପାରିବ, ଯାହା ଆମର ଆଧୁନିକ ପ୍ରଚଳିତରୀତି ଅଟେ ।

ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ନିକଟତମ ବୃତ୍ତକୁ ବିଚାର କରି ସାଧାରଣ ବକ୍ରଗୁଡିକ ପାଇଁ ବକ୍ରତାକୁ କିପରି ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯିବ, ତାହା କେପଲର(Kepler) ଅସ୍ପଷ୍ଟ ଭାବରେ ପରାମର୍ଶ ଦେଇଥିଲେ, ଯାହାକୁ 1680 ମସିହାରେ ଲେବିନିଜ୍(Leibnitz) ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ବୃତ୍ତ ବୋଲି ନାମକରଣ କରିଥିଲେ । କିନ୍ତୁ ହାଇଜେନ୍(Huygens) ସର୍ବପ୍ରଥମେ ସାଧାରଣ ବକ୍ରଗୁଡ଼ିକ ପାଇଁ ବକ୍ରତା ଗଣନା କରିବାର ଏକ ଉପାୟ ପାଇଥିଲେ, ଏବଂ ନ୍ୟୁଟନ୍(Newton) ଏହି ଧାରଣାର ଆଧୁନିକ ରୂପ ପ୍ରଦାନ କରିଥିଲେ ।

1.1 ବକ୍ରତା (Curvature)

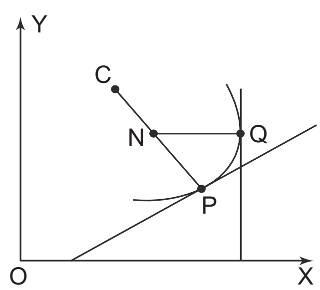
ଚିତ୍ର 1.1 ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ଯେ ବକ୍ରରେଖା AMNB, N ବିନ୍ଦୁ ତୁଳନାରେ M ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଅଧିକ ତୀବ୍ର ଭାବରେ ବକ୍ର ହୋଇଛି । ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରରେଖାର ବକ୍ର ପ୍ରବୃତ୍ତିକୁ ସେହି ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରରେଖାର ବକ୍ରତା କୁହାଯାଏ । ତେଣୁ N ବିନ୍ଦୁ ଅପେକ୍ଷା M ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା ଅଧିକ । ଏହା ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ବଙ୍କା ହେବାର ତୀକ୍ଷ୍ଣତାର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସାଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ମାପକୁ ଦର୍ଶାଇବ ।



ଚିତ୍ର 1.1

ଚିତ୍ର 1.2, ମନେକର P ଓ Q ଏକ ବକ୍ରରେଖାର ଦୁଇଟି ପାଖାପାଖି ବିନ୍ଦୁ । ଚାପ PQ ଏହାର ଜ୍ୟା ଆଡକୁ ଅବତଳ ଅଟେ । ମନେକର P ଓ Q ପ୍ରତି ଲମ୍ବ N ରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଛି ।

ଯେତେବେଳେ $Q \rightarrow P$, N ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସ୍ଥିତି C କୁ ଚାଲିଯାଏ, ତାହାକୁ ବକ୍ରର P ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର କୁହାଯାଏ। CP ଦୂରତାକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରରେଖାର ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ r (Rho)(ରୋ) ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଯେଉଁ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର C ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ CP, ତାହାକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା ବୃତ୍ତ କୁହାଯାଏ । P

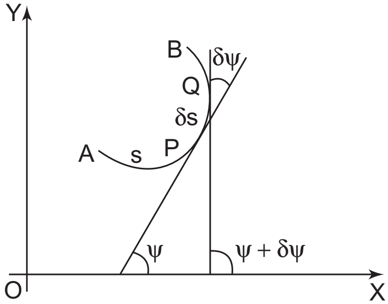


ଚିତ୍ର 1.2

ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟାକୁ ବକ୍ରତା ଜ୍ୟା କୁହାଯାଏ । ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ବକ୍ରରେଖାର P ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା (Curvature) କୁହାଯାଏ । ଏହା K(କାପା) ଦ୍ଵାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

1.1.1 ବକ୍ରତାର ଗାଣିତିକ ସଂଜ୍ଞା (Mathematical definition of a curvature)

ମନେକର AB ଏକ ବକ୍ର ଏବଂ ଏହି ବକ୍ର ଉପରେ P, Q ଦୁଇଟି ପାଖାପାଖି ବିନ୍ଦୁ । ମନେକର ଚାପ AP = s ଏବଂ ଚାପ AQ = s+ds । ବକ୍ର ଉପରେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ A ଠାରୁ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପକରାଯାଇଛି । ମନେକର P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶରେଖା x-ଅକ୍ଷ ସହିତ y ଏବଂ y+dy କୋଣ ସୃଷ୍ଟି କରୁଛି । ଏରେ



ଚିତ୍ର 1.3

i. ସ୍ପର୍ଶରେଖାର ମିଳନ ବିନ୍ଦୁ, ଚାପ PQ ର ଗତି ପଥରେ ସ୍ପର୍ଶକର dy କୋଣର ଘୂର୍ଣ୍ଣନକୁ ସମୁଦାୟ ବକ୍ରତା କୁହାଯାଏ ।

ii. ଅନୁପାତ, dy/ds କୁ ହାରାହାରି ବକ୍ରତା କୁହାଯାଏ।

iii. ଯେତେବେଳେ $Q \to P$ ହାରାହାରି ବକ୍ରତାର ସୀମାନ୍ତ ମାନକୁ ବକ୍ରରେଖାର P ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା କୁହାଯାଏ । ତେଣୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା(κ) $\mathop{Lt}_{Q\to P} \frac{\delta\Psi}{\delta s} = \mathop{Lt}_{\delta s\to 0} \frac{\delta\Psi}{\delta s} = \frac{d\Psi}{ds}$ ଅଟେ।

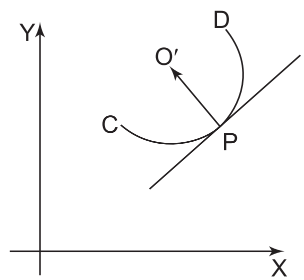
iv. ବକ୍ରରେଖାର P ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତାର ବ୍ୟୁତକ୍ରମକୁ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କୁହାଯାଏ । ଯେଉଁରେ ବକ୍ରତାର ମୂଲ୍ୟ ଶୁନ ହୋଇ ନଥିବ । ଏହାକୁ r ଦ୍ଵାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । $r = \frac{1}{\kappa} = \frac{ds}{d\Psi}$

ମନ୍ତବ୍ୟ: (1) ଏକ ସରଳରେଖା କେବେ ବଙ୍କା ହୋଇନଥାଏ ଏହା ସର୍ବଦା ସିଧା।
(ଯେହେତୁ y ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ରାଶି $\frac{d\Psi}{ds} = 0$) ତେଣୁ ସରଳରେଖାର ବକ୍ରତା ହେଉଛି ଶୂନ ।
(2) ବୃତ୍ତର ବକ୍ରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ସହିତ ସମାନ ।

1.1.2 ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (Radius of Curvature)

ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତାର ବ୍ୟୁତକ୍ରମକୁ ସେହି ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କୁହାଯାଏ । ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧକୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଭାବରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିବା ପାଇଁ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା ଶୂନ୍ୟ ହେବା ଉଚିତ୍ ନୁହେଁ । ଏହାକୁ r ଦ୍ଵାରା ସୂଚିତ କରାଯାଇଥାଏ ।

ତେଣୁ P ବିନ୍ଦୁରେ $r = \frac{1}{\kappa} = \frac{ds}{d\Psi}$



ଚିତ୍ର 1.4

ଚିତ୍ରରେ ପରିପ୍ରକାଶ

ବକ୍ର CD ପାଇଁ, P ବିନ୍ଦୁରେ ଯଦି r ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହୁଏ ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁରେ ଏକ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରାଯାଏ ତେବେ O'P ଦୂରତା ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହିତ ସମାନ।

A. ଡେକାର୍ଟୀୟ ବକ୍ର ପାଇଁ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ

ଏରେ r ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯିବ ଯେତେବେଳେ ବକ୍ରର ସମୀକରଣ ଡେକାର୍ଟୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କରେ ଦିଆଯାଇଥାଏ। ମନେକର $y = f(x)$ ଏକ ଡେକାର୍ଟୀୟ ବକ୍ର। $P(x, y)$ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶରେଖା X-ଅକ୍ଷ ଦିଗରେ y କୋଣ ସୃଷ୍ଟି କରୁଛି।

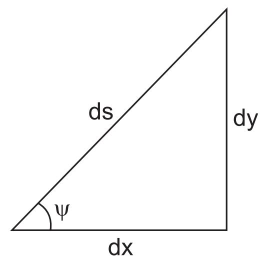
ତେଣୁ ଆମେ ପାଇବା।

$$\sin y = \frac{dy}{ds}, \cos y = \frac{dx}{ds} \text{ ଏବଂ } \tan y = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad y = \tan^{-1}(y_1), \text{ ଯେଉଁରେ } y_1 = \frac{dy}{dx}$$

x ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{1+y_1^2} \cdot y_2 \qquad \left\{\because y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}\right\}$$



ଚିତ୍ର 1.5

ବର୍ତ୍ତମାନ
$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{y_2}{1+y_1^2} \cdot \cos\psi$$

$$= \quad = \frac{y_2}{1+y_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y_1^2}}$$

$$\left[\because \cos\psi = \frac{1}{\sec\psi} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right]$$

ତେଣୁ,
$$\frac{1}{\rho} = \frac{y_2}{\left(1+y_1^2\right)^{3/2}}$$

$$\rho = \frac{\left[1+y_1^2\right]^{3/2}}{y_2}, \text{ ଯେଉଁରେ } y_2 \neq 0$$

B. ପାରାମିଟରୀୟ ବକ୍ର ପାଇଁ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (Radius of Curvature for Parametric curve)

ଯେତେବେଳେ ବକ୍ରର ସମୀକରଣ $x = f(t), y = \phi(t)$ ρର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯିବ। ଏରେ $x = f(t), y = \phi(t)$, ଯେଉଁରେ t ହେଉଛି ପାରାମିଟର।

ଆମେ ଜାଣୁ, $$x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}$$

ଏବଂ $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$

ତେଣୁ, $y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'}$ ...(1)

ସମୀକରଣ 1କୁ x ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ,

ଆମେ ପାଉ, $y_2 = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}$ $\left[\because \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'}\right]$

$\rho = \frac{\left[1+y_1^2\right]^{3/2}}{y_2}$ ରେ ମାନ ବ୍ୟବହାର କରିବା ପରେ ଆମେ ପାଇବା

$$\rho = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}$$

C. ଧ୍ରୁବୀୟ(polar) ବକ୍ର ପାଇଁ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ

ବକ୍ର r = f(q) କିମ୍ବା f(r, q)=0 ପାଇଁ r ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ମନେକର P(r, q) ବିନ୍ଦୁରେ, ସ୍ପର୍ଶ ରେଖା OP ସହ ϕ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କଲେ ଆମେ ପାଉ

$\tan f = r\frac{d\theta}{dr}]\ \sin f = r\frac{d\theta}{ds}$ ଏବଂ $\cos f = \frac{dr}{ds}$ ...(1)

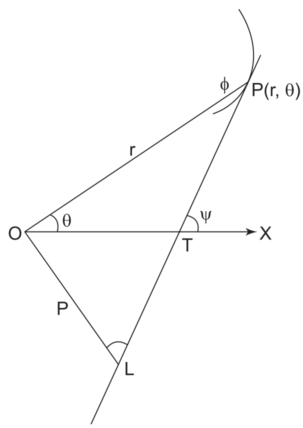
ପୁନର୍ବାର ଯଦି P(r, q) ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶରେଖା OX-ଅକ୍ଷ ସହ y କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ, ତେବେ

$y = q + f$

$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{ds}$

$= \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds}$

$= \frac{d\theta}{ds}\left[1 + \frac{d\phi}{d\theta}\right]$ ...(2)



ଚିତ୍ର 1.6

ସମୀକରଣ (1), ରୁ

$\tan f = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$

ଏବଂ $\tan f = \frac{r}{r_1}$ ଯେଉଁରେ $r_1 = \frac{dr}{d\theta}$

θ ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$\sec^2\phi.\frac{d\phi}{d\theta}=\frac{r_1.r_1-r\,r_2}{r_1^2}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d\phi}{d\theta}=\frac{r_1^2-r\,r_2}{r_1^2}.\frac{1}{\sec^2\phi}$$

$$=\frac{r_1^2-r\,r_2}{r_1^2}.\frac{1}{1+\tan^2\phi}$$

$$=\frac{r_1^2-r\,r_2}{r_1^2}.\frac{r_1^2}{r_1^2+r^2}\qquad\left[\because\ \tan\phi=\frac{r}{r_1}\right]$$

$$=\frac{r_1^2-r\,r_2}{r_1^2+r^2}\qquad ...(3)$$

ପୁନର୍ବାର: ସମୀକରଣ(1), ରୁ $r\frac{d\theta}{ds}=\sin f=\frac{1}{\operatorname{cosec}\phi}$

$$\Rightarrow\quad \frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{r}.\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\phi}}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r_1^2}}$$

ସମୀକରଣ (2), (3), (4) ରୁ, ଆମେ ପାଉ ...(4)

$$\frac{d\psi}{ds}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r_1^2}}.\left[1+\frac{r_1^2-r\,r_2}{r_1^2+r^2}\right]$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{2r_1^2+r^2-r\,r_2}{\left(r^2+r_1^2\right)^{3/2}}\qquad\left[\because\frac{1}{\rho}=\frac{ds}{d\psi}\right]$$

$$\Rightarrow\quad \rho=\frac{ds}{d\psi}=\frac{\left(r^2+r_1^2\right)^{3/2}}{2r_1^2+r^2-r\,r_2}$$

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 1.1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ବକ୍ରର ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର:

(a) $y = 4\sin x - \sin 2x$, ବିନ୍ଦୁ $x=\frac{\pi}{2}$ (b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ ବିନ୍ଦୁ $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

ସମାଧାନ: (a) ଦତ୍ତ: $y = 4\sin x - \sin 2x$ ...(1)

ସମୀକରଣ (1)କୁ 'x' ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ,

$$\frac{dy}{dx}=4\cos x-2\cos 2x$$

ଏବଂ $$\frac{d^2y}{dx^2} = -4\sin x + 4\sin 2x$$

ଆମେ ଜାଣୁ, $$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1+(4\cos x - 2\cos 2x)^2\right]^{3/2}}{-4\sin x + 4\sin 2x}$$

$$(\rho)_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left[1+\left(4\cos\frac{\pi}{2} - 2\cos\pi\right)^2\right]^{3/2}}{-4\sin\frac{\pi}{2} + 4\sin\pi} = \frac{(1+4)^{3/2}}{-4}$$ (ରଣାତ୍ମକ ଚିହ୍ନକୁ ଗ୍ରହଣ ନ କରି)

$$= \frac{5^{3/2}}{4}$$ **(ଉତ୍ତର)**

(b) ଦତ୍ତ: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ ... *(1)*

ସମୀକରଣ (1)କୁ 'x' ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$= \quad -1$ ବିନ୍ଦୁ $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ ରେ

ସେହିପରି ଭାବେ, ଆମେ ପାଉ $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} - \sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}$$

$$= \frac{\left[\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\left(-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right]}{x} = \frac{\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right]}{x}$$

$$= -\left[\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}\right] = \frac{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)}$$ ବିନ୍ଦୁ $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ ରେ

$$= -4$$

ଆମେ ଜାଣୁ, $\rho = \dfrac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} = -\dfrac{(1+1)^{3/2}}{4} = \dfrac{2^{3/2}}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 1.2. ବକ୍ର $y = log\, x,\ x > 0$ ପାଇଁ। ρ। ର ନ୍ୟୁନତମ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର: $y = log\, x$ ...(1)

ସମୀକରଣ (1)କୁ 'x' ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{ ଏବଂ } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

ଆମେ ଜାଣୁ $\rho = \dfrac{\left[1+y_1^2\right]^{3/2}}{y_2} = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{3/2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$

$$= -\frac{(x^2+1)^{3/2}}{x}$$

ମନେକର $|\rho| = f(x) = \dfrac{(x^2+1)^{3/2}}{x}$

$f(x)$ ର ନ୍ୟୁନତମ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ ପାଇଁ, ଆମକୁ $f'(x)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ।

$$f'(x) = \frac{x.\frac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\,2x - (x^2+1)^{3/2}}{x^2}$$

$$= \frac{3x^2\sqrt{x^2+1} - (x^2+1)^{3/2}}{x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}\,(3x^2-x^2-1)}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+1}\,(2x^2-1)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$, ରୁ ଆମେ ପାଉଛୁ $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ଏବଂ $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ହେଲେ $f''(x)$ ର ମୂଲ୍ୟ ଧନାତ୍ମକ ଅଟେ।

ତେଣୁ $|\rho|$ ର ମୂଲ୍ୟ ନ୍ୟୁନତମ ଯେତେବେଳେ $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $(\therefore x > 0)$

$$\Rightarrow \quad |\rho|_{min} = \left[\frac{(x^2+1)^{3/2}}{x}\right]_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\left(\frac{1}{2}+1\right)^{3/2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ $|\rho|$ ର ନ୍ୟୁନତମ ମୂଲ୍ୟ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 1.3. ଆୟତୀୟ ହାଇପରବୋଲା $xy = c^2$ ର (x,y) ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସଙ୍କେତ $y = \frac{c^2}{x}$, ନିଆଯାଉ **ଉତ୍ତର:** $\frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{2c^2}$ । ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କର।

ଉଦାହରଣ 1.4. ବକ୍ରର ଦୁଇ ଶାଖା $x = 1 - t^2$, $y = t - t^3$ ର ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ମୂଳବିନ୍ଦୁରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ମୂଳବିନ୍ଦୁ (0, 0) ରେ 't'ର ଦୁଇଟି ସାଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ହେଉଛି 1 ଏବଂ -1 ।

$[\therefore\ x = 1 - t^2,\ 0 = 1 - t^2 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1]$

ତେଣୁ, ବକ୍ରର ଦୁଇଟି ଶାଖା ପାଇଁ, t ର ମୂଲ୍ୟ 1 ଏବଂ -1

ଦତ୍ତ: $x = 1 - t^2,\ y = t - t^3$

ଉପରୋକ୍ତକୁ 't' ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 3t^2,\quad \frac{dx}{dt} = -2t$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1-3t^2}{2t} = -\frac{1}{2t} + \frac{3}{2}t \qquad \ldots (1)$$

ପୁନଶ୍ଚ ସମୀକରଣ (1) କୁ 'x' ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{1}{2t^2} + \frac{3}{2}\right).\frac{dt}{dx} = \frac{\left(\frac{1}{2t^2} + \frac{3}{2}\right)}{-2t}$$

$$= -\frac{1}{4t^3} - \frac{3}{4t}$$

ଆମେ ପାଉ $$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

ଏବଂ

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=1} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$$

ସେହିପରି, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=-1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

ଏବଂ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=-1} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

ତେଣୁ $$(\rho)_{t=1} = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1+1)^{3/2}}{-1} = -2\sqrt{2}$$

ଏବଂ $$(\rho)_{t=-1} = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1+1)^{3/2}}{1} = 2\sqrt{2}$$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 1.5. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ କ୍ୟାଟେନାରୀ $y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ ପାଇଁ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ, ବକ୍ର ଏବଂ x-ଅକ୍ଷ ମଧ୍ୟରେ ଅଭିଲମ୍ବର ଛେଦାଂଶ ସହିତ ସମାନ ଏବଂ କୋଟିର ବର୍ଗ ରୂପରେ ଏହାର ମୂଲ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୋଇଥାଏ ।

ସମାଧାନ: ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କର।

ଉଦାହରଣ 1.6. ଯଦି ପାରାବୋଲା $y^2 = 4ax$ ର ନାଭୀୟ ଜ୍ୟାର ପ୍ରାନ୍ତରେ ଦୁଇଟି ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ρ_1 ଓ ρ_2, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\rho_1^{-2/3} + \rho_2^{-2/3} = (2a)^{-2/3}$.

ସମାଧାନ: ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $y^2 = 4ax$, ଏହାର ପାରାମିଟରୀୟ ସମୀକରଣ ହେଉଛି $x = at^2, y = 2at$

ଯଦି $(at_1^2, 2at_1)$ ଓ $(at_2^2, 2at_2)$ ପାରାବୋଲାର ନାଭୀୟ ଜ୍ୟା ର ଦୁଇଟି ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି, ତେବେ ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ

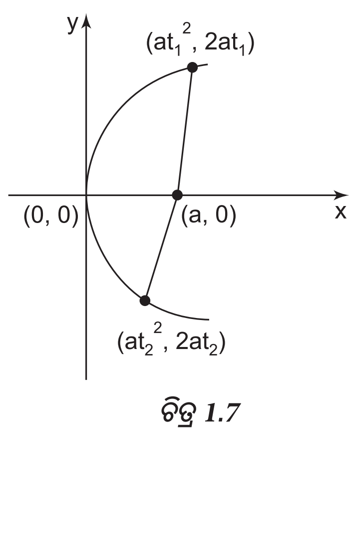
$$t_1 t_2 = -1$$

$x = at^2, y = 2at$ ପାଇଁ

ଏଥିରୁ ଆମେ ପାଉ, $\frac{dx}{dt} = 2at, \quad \frac{dy}{dt} = 2a$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$

ଏବଂ $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{t^2}.\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2at^3}$



ଚିତ୍ର 1.7

ଆମେ ଜାଣୁ, $$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1+\frac{1}{t^2}\right]^{3/2}}{-\frac{1}{2at^3}}$$

$$= -2a\left(t^2+1\right)^{3/2}$$

$\therefore$ $$\rho\left(at_1^2, 2at_1\right) = -2a\left(t_1^2+1\right)^{3/2}$$

ଏବଂ $$\rho\left(at_2^2, 2at_2\right) = -2a\left(t_2^2+1\right)^{3/2}$$

$\therefore$ $$\rho_1^{-2/3}+\rho_2^{-2/3} = \left[2a\left(t_1^2+1\right)^{3/2}\right]^{-2/3}+\left[2a\left(t_2^2+1\right)^{3/2}\right]^{-2/3}$$

$$= (2a)^{-2/3}\left[\frac{1}{t_1^2+1}+\frac{1}{t_2^2+1}\right] = (2a)^{-2/3}\left[\frac{t_2^2+1+t_1^2+1}{\left(t_1^2+1\right)\left(t_2^2+1\right)}\right]$$

$$= (2a)^{-2/3}\left[\frac{t_1^2+t_2^2+2}{t_1^2+t_2^2+(-1)^2+1}\right] = (2a)^{-2/3} \qquad [\because t_1 t_2 = -1]$$ ପ୍ରମାଣିତ

ଉଦାହରଣ 1.7. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଏଲିପ୍ସିସ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ର ଦୀର୍ଘ ଅକ୍ଷର ପ୍ରାନ୍ତରେ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଏବଂ ଅର୍ଦ୍ଧ- ନାଭିଲମ୍ବ ସମାନ।

ସମାଧାନ: ଏଲିପ୍ସର ପାରାମିଟରୀୟ ସମୀକରଣ, $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ ଅଟେ,

ଏବଂ ଦୀର୍ଘ ଅକ୍ଷର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ $(\pm$ a, 0) ଅଟନ୍ତି।

ଏହାକୁ 't' ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ,

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t,\quad \frac{dy}{dt} = b\cos t$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cot$$

ଏବଂ $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{a}\cos ec^2 t\,\frac{dt}{dx} = \frac{b}{a}\text{cosec}^2 t\times\frac{1}{-a\sin t}$$

$$= -\frac{b}{a^2}\text{cosec}^3 t$$

ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ, $$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1+\frac{b^2\cos^2 t}{a^2\sin^2 t}\right]^{3/2}}{-\frac{b}{a^2}\text{cosec}^3 t}$$

$$= \frac{1}{ab}\left(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t\right)^{3/2}$$ (ଋଣାତ୍ମକ ଚିହ୍ନକୁ ଗ୍ରହଣ ନକରି)

$$\rho(a, 0) = \frac{1}{ab}\left(a^2 \sin^2 0 + b^2 \cos^2 0\right)^{3/2}$$

$$= \frac{b^2}{a}$$ (ଏଲିପ୍ସର ଅର୍ଦ୍ଧ ନାଭିଲମ୍ବ) (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ 1.8. ବକ୍ର $x = c\log\left(s + \sqrt{s^2 + c^2}\right)$, $y = \sqrt{s^2 + c^2}$ ପାଇଁ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ: $x = c\log\left(s + \sqrt{s^2 + c^2}\right), y = \sqrt{s^2 + c^2}$ ...*(1)*

ସମୀକରଣ 1 କୁ 's' ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{c}{s + \sqrt{s^2 + c^2}}\left(1 + \frac{2s}{2\sqrt{s^2 + c^2}}\right) = \frac{c}{\sqrt{s^2 + c^2}}$$

ଏବଂ

$$\frac{dy}{ds} = \frac{2s}{2\sqrt{s^2 + c^2}} = \frac{s}{\sqrt{s^2 + c^2}}$$

∴

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{s}{c}$$ ... (1)

ଆମେ ଜାଣୁ

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx}$$

$$s = c\tan\psi$$ [ସମୀକରଣ (1) ରୁ]

∴ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ,

$$\frac{ds}{d\psi} = c\sec^2\psi$$

$$= c\left(1 + \tan^2\psi\right)$$

$$= c\left(1 + \frac{s^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{c^2 + s^2}{c}$$ (ଉତ୍ତର)

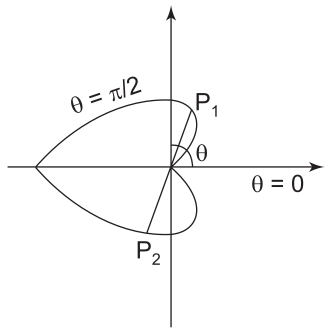
ଉଦାହରଣ 1.9. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବକ୍ର $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ ରେ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଭେକ୍ଟର ସହିତ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୋଇଥାଏ।

ସମାଧାନ: ନିଜେ ସମାଧାନ କର ।

ଉଦାହରଣ 1.10. ଯଦି କାଡୟଡ୍ $r = a(1-\cos\theta)$ ର ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯେକୌଣସି ଜ୍ୟା ର ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ ଦୁଇଟି ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r_1 ଏବଂ r_2 ଅଛି। ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\rho_1^2 + \rho_2^2 = \dfrac{16a^2}{9}$.

ସମାଧାନ: ଚିତ୍ର (1.8)ରେ କାଡୟଡ୍ $r = a(1-\cos\theta)$ (1) ଦର୍ଶାଯାଇଛି।

ଯଦି P_1 (r_1, q) ହୁଏ ତେବେ P_2 $(r_2, p + q)$ ହେବ କାରଣ P_1 ଏବଂ P_2 ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଜ୍ୟାର ଦୁଇଟି ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ।



ଚିତ୍ର 1.8

ଏରେ, $$\frac{dr}{d\theta} = r_1 = a\sin\theta$$

ଏବଂ $$\frac{d^2r}{d\theta^2} = r_2 = a\cos\theta$$

ତେଣୁ, $$\rho = \frac{\left(r^2 + r_1^2\right)^{3/2}}{r^2 + 2r_1^2 - r\,r_2}$$

$$= \frac{\left[a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta\right]^{3/2}}{a^2(1-\cos\theta)^2 + 2a^2\sin^2\theta - a^2(1-\cos\theta)\cos\theta}$$

$$= \frac{a^3(1-\cos\theta)^{3/2}\,2\sqrt{2}}{3a^2(1-\cos\theta)} = \frac{a}{3}2\sqrt{2}(1-\cos\theta)^{1/2}$$

∴ $$\rho_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}a(1-\cos\theta)^{1/2}$$ [P_1 (r_1, q) ବିନ୍ଦୁରେ]

ଏବଂ $$\rho_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}a\left(1-\cos(\theta+\pi)\right)^{1/2}$$ [P_2 $(r_2, p + q)$ ବିନ୍ଦୁରେ]

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}a(1+\cos\theta)^{1/2}$$

∴ $$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{8a^2}{9}(1-\cos\theta+1+\cos\theta) = \frac{16a^2}{9}$$

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{16a^2}{9}$$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 1.1

ନିମ୍ନଲିଖିତ ବକ୍ରଗୁଡିକର ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ରେ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର:

1. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, ବିନ୍ଦୁ $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ ରେ

2. $x^3+y^3=3axy,$ ବିନ୍ଦୁ $\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)$ ରେ

3. $y^2=\frac{a^2(a-x)}{x}$, ବିନ୍ଦୁ $(a,0)$ ରେ [ସଂକେତ: ବକ୍ରତାର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $x=\frac{a^2}{y^2+a^2}$]

4. $x^2y=a\left(x^2+y^2\right)$ ବିନ୍ଦୁ $(-2a,2a)$ ରେ

5. ବକ୍ର $y=e^x$ ର y-ଅକ୍ଷର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

6. କାଟେନାରି $y=c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ ର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ (0, c)ରେ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

7. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ପାରାବୋଲା $y^2=4ax$ ପାଇଁ, $\rho_2 \propto$ (SP)3 ଯେଉଁରେ ρ ହେଉଛି ପାରାବୋଲାର P ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଏବଂ S ପାରାବୋଲାର ନାଭି।

8. ସାଇକ୍ଲଇଡ୍ $x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$ ଉପରେ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ରେ ସ୍ପର୍ଶକ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟନ୍ତି। ଯଦି ρ_1, ρ_2 ସେହି ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଅଟନ୍ତି ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\rho_1^2+\rho_2^2=16a^2$

9. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଆଷ୍ଟ୍ରୋଏଡ୍ $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ ର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ମୂଳ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ସେହି ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକର ଅଭିଲମ୍ବର ତିନି ଗୁଣ ଅଟେ।

10. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏଲିପ୍ସ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ପାଇଁ $\rho=\frac{a^2b^2}{P^3}$ ଯେଉଁରେ *P* ହେଉଛି କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁରୁ *(x, y)* ରେ ସ୍ପର୍ଶକ ପ୍ରତି ଅଭି ଲମ୍ବ।

11. ପାରାବୋଲା $y^2 = 8x$ ଉପରେ ବିନ୍ଦୁଗୁଡିକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁରେ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $7\frac{13}{16}$ ଅଟେ।

12. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ବକ୍ର; $x=a\cos\theta(1+\sin\theta),\ y=a\sin\theta(1+\cos\theta),$ ପାଇଁ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ, $\theta=-\frac{\pi}{4}$ ରେ *a* ଅଟେ।

ନିମ୍ନଲିଖିତ ବକ୍ରଗୁଡିକ ପାଇଁ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର:

13. $r=a\cos n\theta$

14. $r^m=a^m\sin m\theta$

15. $r^2\cos 2\theta=a^2$

16. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ବକ୍ର $r=a\cos n\theta$ ପାଇଁ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହେଉଛି $\frac{a}{1+n^2}$, ଯେଉଁରେ *r* = *a* ଅଟେ।

17. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ବକ୍ର $\theta = \dfrac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - \cos^{-1}\left(\dfrac{a}{r}\right)$ ପାଇଁ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହେଉଛି $\sqrt{r^2 - a^2}$ ।

18. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଲେମିନିସ୍କେଟ $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ପାଇଁ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହେଉଛି $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$, ଏହି ବନ୍ଦୁରେ ଯେଉଁରେ ସ୍ପର୍ଶକ x-ଅକ୍ଷ ସହିତ ସମାନ୍ତରାଳ ଅଟେ।

ଉତ୍ତର ମାଳା

1. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 2. $\dfrac{3a}{8\sqrt{2}}$ 3. $\dfrac{a}{2}$ 4. 2 5. $2\sqrt{2}$ 6. c

11. $\left(\dfrac{9}{8}, 3\right)$ ଏବଂ $\left(\dfrac{9}{8}, -3\right)$ 13. $\dfrac{\left(r^2 + a^2n^2 - r^2n^2\right)^{3/2}}{r^2 - r^2n^2 + 2a^2n^2}$ 14. $\dfrac{a^m}{(m+1)r^{m-1}}$ 15. $\dfrac{r^3}{a^2}$

1.1.3 ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର, (Centre of Curvature) ବକ୍ରତା ବୃତ୍ତ (Circle of Curvature)

1.1.3.1 ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର (Centre of Curvature)

ବକ୍ର ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ Pରେ C କେନ୍ଦ୍ର ଓ P ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ, C ବିନ୍ଦୁକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରର ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର କୁହାଯାଏ।

1.1.3.2 ବକ୍ରତା ବୃତ୍ତ (Circle of Curvature)

ଯଦି C ହେଉଛି ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର, ତେବେ କେନ୍ଦ୍ର 'C' ଓ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ρ ଥିବା P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଉଥିବା ବୃତ୍ତକୁ ବକ୍ରତା ବୃତ୍ତ କୁହାଯାଏ। ମନେକର ρ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 'ρ' ଏବଂ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(\bar{x}, \bar{y})$, ତେବେ ବକ୍ରତା ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ $(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \rho^2$ ।

1.1.4 ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ

ମନେକରାଯାଉ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର Cର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(\bar{x}, \bar{y})$ । ଏହା ବକ୍ର ପ୍ରତି P(x, y) ବିନ୍ଦୁରେ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଓ PC = ρ ଅଟେ।

ଚିତ୍ର 1.9 ରୁ ଆମେ ଦେଖୁ,

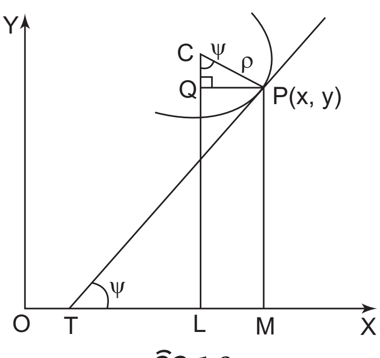
$$\bar{x} = OL = OM - LM$$

$$= OM - PQ \qquad (\because LM = PQ)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $OM = x$

ଏବଂ $PQ = PC \sin\psi = \rho \sin\psi$

$\therefore$ $\bar{x} = x - \rho \sin\psi$ ... (1)



ଚିତ୍ର 1.9

ସେହିଭଳି, $\bar{y} = CL = CQ + QL = CQ + PM \ (\because QL = PM)$

ଏବଂ $CQ = PC\cos\psi = \rho\cos\psi$ ଏବଂ $PM = y$

$\therefore \quad \bar{y} = y + \rho\cos\psi$ ... (2)

ଯେହେତୁ $\tan\psi = \dfrac{dy}{dx} = y_1$

$\therefore \quad \sin\psi = \tan\psi\cos\psi$

$$= \frac{\tan\psi}{\sec\psi} = \frac{\tan\psi}{\sqrt{1+\tan^2\psi}} \text{ ଏବଂ } \sin\psi = \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}$$

$$\bar{x} = x - \rho\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}$$

ସମୀକରଣ (1) ଏବଂ (2) ରେ $\sin\psi$ ଏବଂ $\cos\psi$ ର ମାନ ବ୍ୟବହାର କଲାପରେ, ଆମେ ପାଉ

$$\bar{x} = x - \rho\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}} \text{ ଏବଂ } \bar{y} = y + \frac{\rho}{\sqrt{1+y_1^2}}$$

କିନ୍ତୁ ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, $\rho = \dfrac{\left(1+y_1^2\right)^{3/2}}{y_2}$

ତେଣୁ $\bar{x} = x - \dfrac{y_1}{y_2}\left(1+y_1^2\right)$ ... (3)

$\bar{y} = y + \dfrac{1}{y_2}\left(1+y_1^2\right)$ ... (4)

ହେଉଛି ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ।

ଇତିହାସ:

ହାଇଜେନ୍ସ (ଡଚ ଗଣିତଜ୍ଞ) ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସଞ୍ଚାରପଥକୁ ବକ୍ରର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ବୋଲି ନାମକରଣ କରିଥିଲେ ଏବଂ ଦର୍ଶାଇଥିଲେ ଏହା ବ୍ୟବହାର କରି କିପରି ଏକ ଆଦର୍ଶ ପେଣ୍ଡୁଲମ୍ ନିର୍ମାଣ କରାଯାଏ, ଯାହାର ଅବଧି ଏହାର ପରିମାପ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେନାହିଁ। ଏହି ନିର୍ମାଣ ତଥ୍ୟ ଉପରେ ଆଧାରିତ ଯେ ସାଇକ୍ଲୋଏଡର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ସହିତ ସର୍ବସମ ଅଟେ।

1.1.5 କେନ୍ଦ୍ରଜ (ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ)

ବକ୍ରର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁରେ ସେହି ବକ୍ରର ବକ୍ରତା ନିରୁପଣ କରିପାରିବା। ଏହି ବିନ୍ଦୁଗୁଡିକରେ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ସହିତ ସୁସଙ୍ଗତ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର ପାଇପାରିବା। ଯେହେତୁ ବକ୍ରତା ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅନ୍ୟ ବିନ୍ଦୁରେ ଭିନ୍ନ ହୋଇଥାଏ ତେଣୁ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରମଧ୍ୟ ଭିନ୍ନ ଅଟେ। କୌଣସି ଏକ ଦିଆଯାଇଥିବା ବକ୍ରର ଏହିପରି ସମସ୍ତ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର ସମୁଦାୟ ଅନ୍ୟ ଏକ ବକ୍ରକୁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରେ ଏବଂ ଏହାକୁ ବକ୍ରର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ କୁହାଯାଏ।

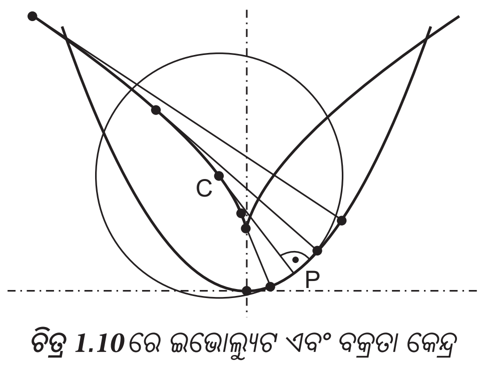
କୌଣସି ଏକ ଦିଆଯାଇଥିବା ବକ୍ରର, ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସଞ୍ଚାରପଥକୁ ସେହି ବକ୍ରର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ କୁହାଯାଏ। ଏକ ବକ୍ର ଉପରେ ଏକ ଚର ବିନ୍ଦୁ Pର ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସଞ୍ଚାରପଥକୁ ବକ୍ରର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ କୁହାଯାଏ। ବକ୍ରଟି ନିଜର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ।

ଏରେ, ବକ୍ରର ବିଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ ଆମେ ବିଭିନ୍ନ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର ପାଇଥାଉ। ଏହି ସମସ୍ତ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସଞ୍ଚାରପଥକୁ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ କୁହାଯାଏ। ଏକ ବାହ୍ୟ ବକ୍ର ଯାହା ଏହି ସମସ୍ତ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର ଦେଇ ଗତି କରେ ତାହାକୁ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ କୁହାଯାଏ। ଏରେ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ଏକ ବକ୍ର ସମୀକରଣ ଛଡ଼ା ଅନ୍ୟ କିଛି ନୁହେଁ।

ଇଭୋଲ୍ୟୁଟକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ନମୁନା ଗୁଡିକ ବିଦ୍ୟମାନ।

ଯଦି ବକ୍ରର ସମୀକରଣ ଦିଆଯାଇଥାଏ ଏବଂ ଯଦି ଆମକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ L.H.S = R.H.S., ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସୋପାନଗୁଡିକ ଅନୁସରଣ କରାଯିବା ଉଚିତ୍:

1. ପ୍ରଥମେ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର $C(\bar{x}, \bar{y})$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁରେ $\bar{x} = x - \frac{y_1}{y_2}\left(1 + y_1^2\right)$, $\bar{y} = y + \frac{1}{y_2}\left(1 + y_1^2\right)$, ଏବଂ ତା'ପରେ L.H.S ନିରୁପଣ ପାଇଁ 'x' ଯାଗାରେ $\bar{x}$ ଏବଂ 'y' ଯାଗାରେ $\bar{y}$ ପ୍ରତିସ୍ଥାପିତ କର। ସେହିପରି ଭାବରେ R.H.S. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଉ ଏବଂ ତା'ପରେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ L.H.S = R.H.S.
2. ଯଦି ଏକ ବକ୍ର ଦିଆଯାଇଛି ଏବଂ ଆମକୁ ଦିଆଯାଇଥିବା ବକ୍ର ପ୍ରତି ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରବାକୁ ପଡ଼େ ତେବେ ନିମ୍ନ ଲିଖିତ ପଦକ୍ଷେପକୁ ଅନୁସରଣ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ। ପ୍ରଥମେ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର $C(\bar{x}, \bar{y})$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଉ ଏବଂ ତା ପରେ 'x' ଯାଗାରେ $\bar{x}$ ଏବଂ y ଯାଗାରେ $\bar{y}$ ଦତ୍ତ ବକ୍ରରେ ପୁନଃ ସ୍ଥାପନ କଲେ, ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ମିଳେ।
3. ଯଦି ଏକ ବକ୍ର ଦିଆଯାଇଛି ଯାହାକି ପାରାମିଟରୀୟ ରୂପରେ ଅଛି, ତେବେ ପ୍ରଥମେ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଉ, ଯାହାକି ପାରାମିଟର ଉପରେ ରହିବ, ତା'ପରେ $\bar{x}$ ଏବଂ $\bar{y}$ କୁ ବ୍ୟବହାର କରି ପାରାମିଟର ବିଲୁପ୍ତ କଲେ ଆମେ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ପାଇପାରିବା। ***ଚିତ୍ର 1.10***ରେ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ଏବଂ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର ଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଦର୍ଶିତ।



ଚିତ୍ର 1.10 *ରେ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ଏବଂ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର*

1.1.6 ପ୍ରତି କେନ୍ଦ୍ରଜ (ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ)

ଏକ କାଳ୍ପନିକ ଫିତାର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟିହେଉଥିବା ବକ୍ରକୁ ଅବକଳନ ଜ୍ୟାମିତିରେ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ କୁହାଯାଏ। ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ ଫିତାର ମୁକ୍ତ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସଞ୍ଚାର ପଥ।

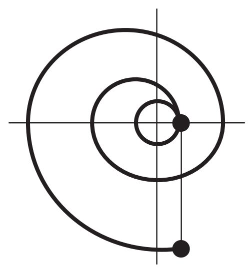
ଅଧିକ ସ୍ପଷ୍ଟୀକରଣ ପାଇଁ: ଏକ ବକ୍ରର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ, ମୂଳ ବକ୍ର ସହିତ ସର୍ନ୍ଦଭିତ ହୋଇଥାଏ। ଅନ୍ୟ ଶବ୍ଦରେ ଏକ ବକ୍ରର ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସଞ୍ଚାର ପଥକୁ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ବକ୍ର ଏହାର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ।

ମନ୍ତବ୍ୟ: ଏହା ଜ୍ୟାମିତିର ଏକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଶାଖା ଯାହାକୁ ବକ୍ରର ଅବକଳନ ଜ୍ୟାମିତି କୁହାଯାଏ। ଏହା ୟୁକ୍ଲିଡୀୟ ପୃଷ୍ଠରେ ଅବସ୍ଥିତ ମସୃଣ ବକ୍ର ବିଷୟରେ ଏବଂ ସମାକଳନ ଓ ଅବକଳନର ବିଭିନ୍ନ ପଦ୍ଧତିର ପ୍ରୟୋଗର ପରିପ୍ରକାଶ କରିଥାଏ। କିଛି ଅନ୍ୟ ବକ୍ର ସମ୍ପର୍କିତ ଆକୃତିକୁ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ କୁହାଯାଏ। ଏହା 1673 ମସିହାରେ କ୍ରିଷ୍ଟିନ ହାଇଜେନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଆବିଷ୍କୃତ ହୋଇଥିଲା।

1.1.6.1 ବକ୍ରର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ

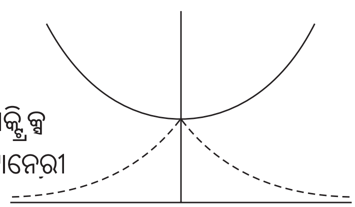
ଏରେ ଆମେ ନିମ୍ନରେ ଦେଖାଯାଉଥିବା ବିଭିନ୍ନ ବକ୍ରର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ ଦେଖିବା:

- ବୃତ୍ତର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ
- କାଟେନାରୀର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ
- ତ୍ରିକୋଣୀୟ ବକ୍ରର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ
- ପାରାବୋଲାର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ
- ଏଲିପ୍ସର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ



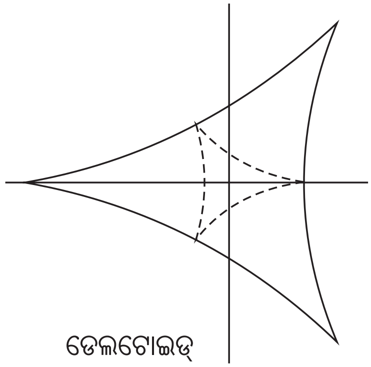
ଚିତ୍ର 1.11 ବୃତ୍ତର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ

1. **ବୃତ୍ତର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ**
   ଏହା ଆର୍କମିଡିସ୍ ସ୍ପାଇରାଲ ସଦୃଶ।
2. **କାଟେନାରୀର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ:** ଏହା ଏକ ତ୍ରିକୋଣୀୟ ବକ୍ର ଅଟେ। ଏହାର ଦୁଇ ପ୍ରାନ୍ତରେ ଝୁଲୁଥିବା ତାର ପରି ଓ ଏହା U ଆକାରର ଏକ ଝୁଲୁଥିବା ଚେନ ଯାହା ପାରାବୋଲା ପରି ଦେଖାଯାଏ। ଟ୍ରାକ୍ଟ୍ରିକ୍ସ (Tractix), ହେଉଛି କାଟେନାରୀର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁରେ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ।



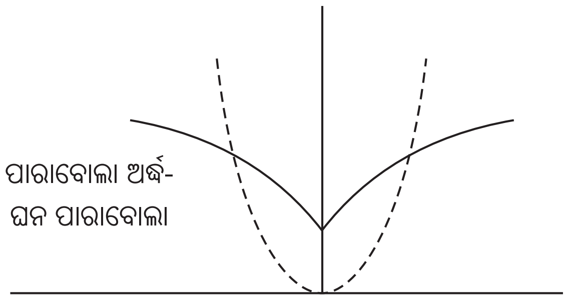
ଚିତ୍ର 1.12 କାଟେନାରୀର ଇନଭଲ୍ୟୁଟ

3. **ଡ଼େଲଟଏଡ଼ର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ:** ଏହା ଏକ ତୃତୀୟ ଦନ୍ତାଗ୍ର (tricasid) ବକ୍ର ଯାହାର ତିନୋଟି ଦନ୍ତାଗ୍ର ଅଛି। ଏହା ଗ୍ରୀକ୍ ଅକ୍ଷର ଡେଲଟା ପରି ଦେଖାଯାଏ।



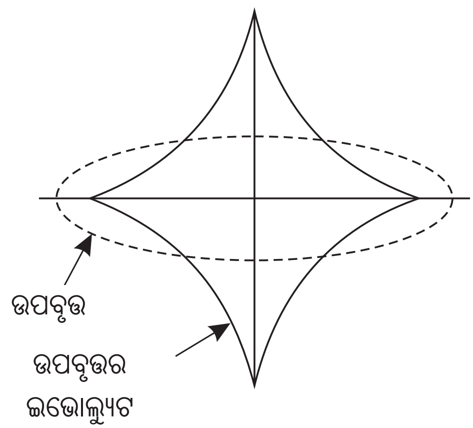
*ଚିତ୍ର **1.13** ଡେଲଟୋଇଡ୍‌ର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ*

4. ପାରାବୋଲାର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ:



*ଚିତ୍ର **1.14** ପାରାବୋଲାର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ*

5. ଏଲିପ୍ସର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ:



*ଚିତ୍ର **1.15** ଏଲିପ୍ସର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ*

ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣଗୁଡିକ ଦିଆଯାଇଥିବା ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟକୁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିବାକୁ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ:

- ବୃତ୍ତ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ
- କାଟେନାରୀ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ
- ଡ଼େଲଟଏଡ଼ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ
- ପାରାବୋଲା ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ
- ଏଲିପ୍ସ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ

ବୃତ୍ତ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ: $x = r(\cos t + t\sin t), y = r(\sin t - t\cos t)$, ଯେଉଁରେ , r = ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ, t = ରାଡିଆନରେ ପ୍ରକାଶିତ ଏକ କୋଣର ପାରାମିଟର

କାଟେନାରୀ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ: $x = t - \tanh t, y = \operatorname{sech} t$ ଯେଉଁରେ t ଏକ ପାରାମିଟର।

ଡ଼େଲଟଏଡ଼ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ: $x = 2r\cos t + r\cos 2t, y = 2r\sin t - r\sin 2t$ ଯେଉଁରେ, r = ଡ଼େଲଟଏଡ ସୃଷ୍ଟି କରୁଥିବା ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ।

ପାରାବୋଲା ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ: $x^3 = a\,y^2$

1.1.7 ଏନ୍‌ଭଲପ୍

ଏକ ବକ୍ର ଯାହା କି ଦିଆଯାଇଥିବା ବକ୍ରସମୂହର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଦସ୍ୟଙ୍କୁ ସ୍ପର୍ଶ କରେ, ତାହାକୁ ବକ୍ରସମୂହର, ଏନ୍‌ଭଲପ୍ କୁହାଯାଏ ।

ଦତ୍ତ ବକ୍ରସମୂହ ପାଇଁ ଏନ୍‌ଭଲପ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ପକ୍ରିୟା; ବକ୍ର ସମୂହର ଏକ ପାରାମିଟରୀୟ ଏନ୍‌ଭଲପ୍ ।

ପରିସ୍ଥିତି- 1: ଏକ ପାରାମିଟର ଥିବା ବକ୍ରସମୂହର ଏନ୍‌ଭଲପ୍

ମନେକର $y = f(x,\alpha)$ ଦତ୍ତ ବକ୍ର ଯେଉଁରେ 'α' ଏକ ପାରାମିଟର।

ସୋପାନ 1: ଦତ୍ତ ସମୀକରଣକୁ ପାରାମିଟର α ଭିତ୍ତିକ ଆଂଶିକ ଅବକଳନ କରି 'α' ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୁପଣ କର।

ସୋପାନ 2: ଦତ୍ତ ବକ୍ରସମୂହରେ 'α' ର ମୂଲ୍ୟକୁ ସ୍ଥାପନ କଲେ, ଆମେ ଏନ୍‌ଭଲପ୍ ପାଉ।

ବିଶେଷ ସ୍ଥିତି: ଯଦି ଦତ୍ତ ବକ୍ରଟି ପାରାମିଟରୀୟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ହୋଇଥାଏ, ଅର୍ଥାତ୍ $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ ତେବେ ଏନ୍‌ଭଲପ୍ ହେଉଛି ପ୍ରଭେଦକ $B^2 - 4AC = 0$ ।

ପରିସ୍ଥିତି- 2: ଦୁଇଟି ପାରାମିଟରୀୟ ଥିବା ବକ୍ର-ସମୂହର ଏନ୍‌ଭଲପ୍ ।

ମନେକର $y = f(x, \alpha, \beta)$ ଦତ୍ତ ବକ୍ରସମୂହ ଯେଉଁରେ ପାରାମିଟରଦ୍ୱୟ a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ ହେଉଛି $g(a, \beta) = 0$

ସୋପାନ 1: ମନେକର α ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଚଳ ଏବଂ β, α ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ ଏବଂ $y = f(x, \alpha, \beta) = 0$, $g(\alpha, \beta) = 0$, କୁ α ଭିତ୍ତିକ ଆଂଶିକ ଅବକଳନ କର।

ସୋପାନ 2: ପ୍ରଥମ ସୋପାନରୁ ମିଳିଥିବା ସମୀକରଣ $g(\alpha, \beta) = 0$ ରୁ ପାରାମିଟରଦ୍ୱୟକୁ ଅପସାରଣ କଲେ ଆମେ ଆବଶ୍ୟକ ଏନଭଲପ ପାଉ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 1.11. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ବକ୍ର $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a$ ର ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ବକ୍ରତା ବୃତ୍ତ ସମୀକରଣ, $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ ବିନ୍ଦୁରେ, $\left(x-\frac{3}{4}a\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}a\right)^2=\frac{a^2}{2}$ ଅଟେ।

ସମାଧାନ : ଏରେ, ବକ୍ରର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=a \qquad .. (i)$$

ସମୀକରଣ (i) କୁ x ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ

$$\frac{1}{2}x^{-1/2}+\frac{1}{2}y^{-1/2}\,y_1=0 \qquad ... (ii)$$

ପୁନର୍ବାର x ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ,

$$-\frac{1}{4}x^{-3/2}-\frac{1}{4}y^{-3/2}\,y_1.y_1+\frac{1}{2}y^{-1/2}\,y_2=0 \qquad ... (iii)$$

ସମୀକରଣ (ii) ରେ $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ ବିନ୍ଦୁରେ

$$\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{a}}\,y_1=0$$

$$\Rightarrow \qquad y_1=-1$$

ସମୀକରଣ (iii) ରେ, ବିନ୍ଦୁ $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ ରେ, ଆମେ ପାଉ

$$-\frac{1}{4}.\frac{4}{a}.\frac{2}{\sqrt{a}}-\frac{1}{4}.\frac{4}{a}.\frac{2}{\sqrt{a}}(-1)^2+\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{a}}\,y_2=0$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{4}{a\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\,y_2=0$$

$$\Rightarrow \qquad y_2=\frac{4}{a}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ρ (ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ) $=\frac{\left[1+{y_1}^2\right]^{3/2}}{y_2}=\frac{(1+1)^{3/2}}{4/a} \quad =2\sqrt{2}\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}$

ମନେକର $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର $(\bar{x}, \bar{y})$ ତେବେ,

$$\bar{x} = x - \frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

$$= \frac{a}{4} - \left[-\frac{(1+1)}{4/a}\right]$$

$$= \frac{a}{4} + \frac{a}{2} = \frac{3}{4}a$$

ସେହିପରି

$$\bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}$$

$$= \frac{a}{4} + \frac{1+1}{4/a}$$

$$= \frac{a}{4} + \frac{a}{2} = \frac{3}{4}a$$

$\therefore$ ବକ୍ରତାରେ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ .

$$(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 = \rho^2$$

$$\left(x - \frac{3}{4}a\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}a\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

(ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ 1.12. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଟ୍ରାକ୍ଟ୍ରିକ୍ସ $x = c\cos t + c\log\tan\left(\frac{t}{2}\right), y = c\sin t$ ପାଇଁ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟର ସମୀକରଣ ହେଉଛି କାଟେନାରୀ

$$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ବକ୍ରର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$x = c\cos t + c\log\tan\left(\frac{t}{2}\right), y = c\sin t$$

't' ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ ଆମେ, ପାଉ,

$$\frac{dx}{dt} = -c\sin t + \frac{c}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= -c\sin t + \frac{c\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= -c\sin t + \frac{c}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -c\sin t + \frac{c}{\sin t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c\left(1-\sin^2 t\right)}{\sin t} = \frac{c\cos^2 t}{\sin t}$$

ଏବଂ $$\frac{dy}{dt} = c\cos t$$

ଏହି ପରି $$y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$= c\cos t.\frac{\sin t}{c\cos^2 t} = \tan t$$

ଏବଂ $$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 t.\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 t}.\frac{\sin t}{c\cos^2 t} = \frac{\sin t}{c\cos^4 t}$$

ମନେକର $(\overline{x}, \overline{y})$ ଦତ୍ତ ବକ୍ରର ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର

ତେବେ $$\overline{x} = x - \frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

$$= c\cos t + c\log\tan\left(\frac{t}{2}\right) - c\frac{\cos^4 t}{\sin t}.\frac{\sin t}{\cos t}.\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$= c\cos t + c\log\tan\left(\frac{t}{2}\right) - c\cos t$$

କିମ୍ବା $$\overline{x} = c\log\tan\left(\frac{t}{2}\right) \qquad \ldots (i)$$

ଏବଂ $$\overline{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}$$

$$= c\sin t + \frac{1+\tan^2 t}{\frac{\sin t}{c\cos^4 t}}.\sec^2 t$$

$$= c\sin t + \frac{c\cos^4 t}{\sin t}.\sec^2 t$$

$$= c\sin t + \frac{c\cos^2 t}{\sin t}$$

$$= \frac{c\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}{\sin t}$$

$$\bar{y} = \frac{c}{\sin t} \qquad \left[\because \sin^2 t + \cos^2 t = 1\right] \qquad \text{... } (ii)$$

$(\bar{x}, \bar{y})$ ର ସଞ୍ଚାର ପଥ ହେଉଛି ଦତ୍ତ ବକ୍ରର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ । ସମୀକରଣ (i) ଏବଂ *(ii)* ରୁ t ଅପସାରଣ କଲେ

ସମୀକରଣ *(i)*ରୁ, $\log\tan\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\bar{x}}{c}$

$$\Rightarrow \qquad \tan\left(\frac{t}{2}\right) = e^{\bar{x}/c} \qquad \text{... } (iii)$$

ସମୀକରଣ *(ii)* ରୁ , $\frac{\bar{y}}{c} = \frac{1}{\sin t} = \frac{1+\tan^2(t/2)}{2\tan(t/2)}$

$$\frac{\bar{y}}{c} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tan(t/2)} + \tan(t/2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\bar{x}}{c}} + e^{\frac{\bar{x}}{c}}\right) \qquad [(iii) \text{ ରୁ}]$$

$$\bar{y} = c\cosh\left(\frac{\bar{x}}{c}\right)$$

$\bar{x}$ କୁ x, $\bar{y}$ କୁ y ପରିବର୍ତ୍ତନ ପରେ ବିନ୍ଦୁ (x, y) ରେ ସଞ୍ଚାର ପଥ ହେଉଛି

$$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right) \qquad \textbf{(ଉତ୍ତର)}$$

ଯାହାକି ଇଭୋଲ୍ୟୁଟର ସମୀକରଣ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ 1.13 ବକ୍ର $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଓ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟର ସମୀକରଣର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ବକ୍ରର ପାରାମିଟରୀୟ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$x = a\cos^3 t \qquad y = a\sin^3 t \qquad \text{... } (1)$$

ସମୀକରଣ (1)କୁ 't' ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ,

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t \quad \text{ଓ} \quad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t$$

$$\therefore \qquad y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t$$

ଏବଂ $$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(-\tan t)$$

$$= -\sec^2 t \frac{dt}{dx} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$$

∴ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (ρ) $$= \frac{\left[1+y_1^2\right]^{3/2}}{y_2}$$

$$= \left(1+\tan^2 t\right)^{3/2} \times 3a\sin t\cos^4 t$$

$$= \frac{3a\sin t\cos^4 t}{\left(\cos^2 t\right)^{3/2}} = 3a\sin t\cos t$$

ବର୍ତ୍ତମାନ 't' ରେ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(\bar{x}, \bar{y})$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା।

ଆମର ଅଛି,

$$\bar{x} = x - \rho\sin\psi$$

$$= x - \frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

$$= x + \tan t\left(1+\tan^2 t\right)\times 3a\sin t\cos^4 t$$

$$= a\cos^3 t + x + 3a\sin^2 t\cos t \qquad \left[\because x = a\cos^3 t\right] \qquad \ldots (2)$$

ସେହିପରି $$\bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}$$

$$= y + \frac{1+\tan^2 t}{\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}}$$

$$= y + \left(1+\tan^2 t\right)\left(3a\sin t\cos^4 t\right)$$

$$= y + 3a\sin t\cos^2 t$$

$$\bar{y} = a\sin^3 t + 3a\sin t\cos^2 t \qquad \left[\because y = a\sin^3 t\right] \qquad \ldots (3)$$

ସମୀକରଣ (1), (2) ଏବଂ (3) ରୁ x, y ଏବଂ t କୁ ଅପସାରଣ କଲେ

$$\bar{x} + \bar{y} = a\left(\cos^3 t + \sin^3 t + 3\sin^2 t\cos t + 3\cos^2 t\sin t\right)$$

$$= a\left(\cos t + \sin t\right)^3$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\bar{x}+\bar{y}\right)^{2/3} = a^{2/3}\left(\cos t + \sin t\right)^2 \qquad \ldots (4)$$

ସେହିପରି $\quad (\bar{x}-\bar{y})^{2/3} = a^{2/3}(\cos t - \sin t)^2$ ... (5)

ସମୀକରଣ (4) ଏବଂ (5)କୁ ଯୋଗ କଲେ,

$$(\bar{x}+\bar{y})^{2/3} + (\bar{x}-\bar{y})^{2/3} = a^{2/3}\left(\cos^2 t + \sin^2 t + 2\cos t\sin t + \cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t \sin t\right)$$

$$= a^{2/3}(1+1) = 2a^{2/3}$$

ତେଣୁ, $(\bar{x},\bar{y})$ର ସଞ୍ଚାର ପଥ ଅର୍ଥାତ୍ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟର ସମୀକରଣ ହେଉଛି: $(\bar{x}+\bar{y})^{2/3} + (\bar{x}-\bar{y})^{2/3} = 2a^{2/3}$

ଏବଂ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(\bar{x},\bar{y})$ ହେଉଛି $\left(a\cos^3 t + x + 3a\sin^2 t\cos t,\ a\sin^3 t + 3a\sin t\cos^2 t\right)$

ଉଦାହରଣ 1.14. ଦତ୍ତ ଆୟତାକାର ହାଇପରବୋଲା xy= a^2 (x = at , $y = a/t$) ପାଇଁ,

i. ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (ρ) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ii. ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(\bar{x},\bar{y})$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

iii. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଦତ୍ତ ବକ୍ରର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ $(x+y)^{2/3} - (x-y)^{2/3} = (4a)^{2/3}$

ସମାଧାନ: (i). ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ

ଆମର ଅଛି $\quad xy = a^2$ କିମ୍ବା $y = \dfrac{a^2}{x}$

$\therefore \quad y_1 = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{a^2}{x^2}$ ଏବଂ $y_2 = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2a^2}{x^3}$

ଏହିପରି, $\quad \rho = \dfrac{\left[1+y_1^{\,2}\right]^{3/2}}{y_2} = \dfrac{\left(1+\dfrac{a^4}{x^4}\right)^{3/2}}{2a^2/x^3}$

$$\rho = \frac{x^3}{2a^2}\left(\frac{x^4+a^4}{x^4}\right)^{3/2}$$ **(ଉତ୍ତର)**

(ii) ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ, ଆମେ ଜାଣିଛେ

$$\bar{x} = x - \frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2} \text{ ଏବଂ } \bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = x - \frac{\dfrac{-a^2}{x^2}\left(1+\dfrac{a^4}{x^4}\right)}{2a^2/x^3}$$

$$\Rightarrow \quad = x + \frac{x^4+a^4}{2x^3}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{2x^4 + x^4 + a^4}{2x^3}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{3x^4 + a^4}{2x^3} = \frac{3x^4 + x^2y^2}{2x^3} \qquad \left[\because xy = a^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \overline{x} = \frac{3}{2}x + \frac{y^2}{2x}$$

ସେହିଭଳି

$$\overline{y} = y + \frac{1 + y_1^2}{y_2}$$

$$= y + \frac{1 + \frac{a^4}{x^4}}{2a^2 / x^3} = y + \frac{x^4 + a^4}{2a^2 x}$$

$$= y + \frac{x^4 + x^2y^2}{2x^2 y} \qquad \left[\because xy = a^2\right]$$

$$\overline{y} = y + \frac{x^2 + y^2}{2y} = \frac{x^2 + 3y^2}{2y} = \frac{3y}{2} + \frac{x^2}{2y}$$

ଏହିପରି, ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି

$$\left(\overline{x}, \overline{y}\right) = \left(\frac{3x}{2} + \frac{y^2}{2x}, \frac{3y}{2} + \frac{x^2}{2y}\right) \qquad \textbf{(ଉତ୍ତର)}$$

(iii). ପୁନର୍ବାର ଦତ୍ତ ବକ୍ରର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟର ସମୀକରଣ $(x+y)^{2/3} - (x-y)^{2/3} = (4a)^{2/3}$ ଦର୍ଶାଇବା ପାଇଁ ,

$$\overline{x} + \overline{y} = \frac{1}{2xy}\left[x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2\right]$$

$$= \frac{1}{2xy}(x+y)^3 = \frac{1}{2a^2}(x+y)^3 \qquad \left[\because xy = a^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left(\overline{x} + \overline{y}\right)^{2/3} = \frac{1}{\left(2a^2\right)^{2/3}}(x+y)^2$$

ସେହିପରି,

$$\left(\overline{x} - \overline{y}\right)^{2/3} = \frac{1}{\left(2a^2\right)^{2/3}}(x-y)^2$$

ତେଣୁ, ଆମର ଅଛି

$$\left(\overline{x}+\overline{y}\right)^{2/3} - \left(\overline{x}-\overline{y}\right)^{2/3} = \frac{1}{\left(2a^2\right)^{2/3}}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\left(2a^2\right)^{2/3}}(4xy) = \frac{1}{\left(2a^2\right)^{2/3}}\left(4a^2\right) = (4a)^{2/3}$$

ତେଣୁ: $(\overline{x}, \overline{y})$ ର ସଞ୍ଚାର ପଥ ହେଉଛି, $(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3}=(4a)^{2/3}$

ଉଦାହରଣ 1.15. ନିମ୍ନଲିଖିତ ବକ୍ରଗୁଡିକ ପାଇଁ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(*i*) $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$,ର $(1, -1)$ ବିନ୍ଦୁରେ

(*ii*) ପାରାବୋଲା $y^2 = 4ax$, (x, y) ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ ଦତ୍ତ ବକ୍ରର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(i*ii*) ଏଲିପ୍ସ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ର (x, y) ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ ଏହାର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : (*i*) ଦତ୍ତ ବକ୍ର ହେଉଛି $y=x^3-6x^2+3x+1$

ତେଣୁ $$y_1=\frac{dy}{dx}=3x^2-12x+3$$

$$y_1(1,-1)=-6$$

ଏବଂ $$y_2=\frac{d^2y}{dx^2}=6x-12$$

$$y_2(1,-1)=-6$$

ତେଣୁ $$\overline{x}=x-\frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

ସେହିପରି $$\overline{y}=y+\frac{1+y_1^2}{y_2}=-1+\frac{1+(-6)^2}{-6}=-\frac{43}{6}$$

ତେଣୁ, ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର $(\overline{x}, \overline{y})=(-36,-43/6)$ ଅଟେ।

(ii) ଦତ୍ତ ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣ ହେଉଛି, $y^2=4ax$ ତେଣୁ $y = 2\sqrt{ax}$

$$y_1=\frac{dy}{dx}=2\sqrt{a}\,.\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{a}{x}}$$

ଏବଂ $$y_2=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2}\sqrt{a}\;x^{-3/2}$$

ତେଣୁ, $$\overline{x}=x-\frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

$$=x-\frac{\sqrt{\frac{a}{x}}\left(1+\frac{a}{x}\right)}{-\frac{1}{2}\sqrt{a}\;x^{-3/2}}=x+2(x+a)$$

$$= 3x + 2a \qquad \dots (1)$$

ଏବଂ
$$\bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2} = y + \frac{1+\frac{a}{x}}{\frac{1}{2}\sqrt{a}\,x^{-3/2}}$$

$$= 2\sqrt{a}\sqrt{x} - \frac{2(x+a)}{\sqrt{a}\,x^{-1/2}} \qquad \left[\because y = 2\sqrt{ax}\right]$$

$$= 2\sqrt{a}\sqrt{x}\left(1 - \frac{x-a}{a}\right) = -\frac{2}{\sqrt{a}}x^{3/2} \qquad \dots (2)$$

ତେଣୁ, ଦତ୍ତ ବକ୍ରର ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(3x + 2a, -\frac{2x^{3/2}}{\sqrt{a}}\right)$ ଅଟେ।

ସମୀକରଣରୁ (1), ରୁ ଆମେପାଉ $\qquad x = \frac{\bar{x} - 2a}{3}$

ଏହି ମୂଲ୍ୟକୁ ସମୀକରଣ(2)ରେ ସ୍ଥାପନା କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$\bar{y} = -\frac{2\left(\frac{\bar{x}-2a}{3}\right)^{3/2}}{\sqrt{a}}$$

$$= 1 - \frac{(-6)\left[1+(-6)^2\right]}{-6} = -36$$

$$a\bar{y}^2 = 4\left(\frac{\bar{x}-2a}{3}\right)^3$$

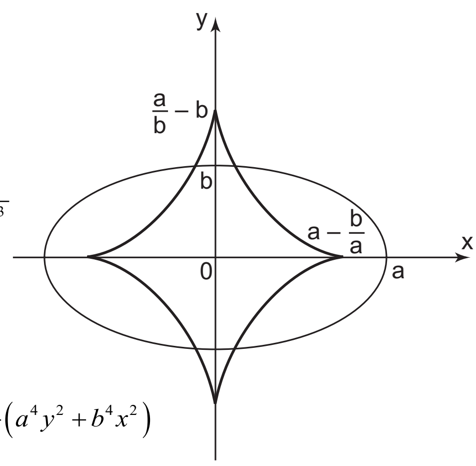
କିମ୍ବା $\qquad 27a\bar{y}^2 = 4(\bar{x} - 2a)^3$

ତେଣୁ, ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର $(\bar{x}, \bar{y})$ର ସଞ୍ଚାର ପଥ $27ay^2 = 4(x-2a)^3$, ଯାହା ଆବଶ୍ୟକ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ଅଟେ।

(iii) ଦତ୍ତ ଏଲିପ୍ସର ସମୀକରଣ $\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ତେଣୁ $\qquad y_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$

ଏବଂ $\qquad y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$



ଚିତ୍ର 1.16

ତେଣୁ, ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର(x,y), $\qquad \bar{x} = x - \frac{y_1(1+y_1^2)}{y_2}$

$$= x - \frac{-\frac{b^2x}{a^2y}\left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)}{-\frac{b^4}{a^2y^3}} = x - \frac{x}{a^4b^2}\left(a^4y^2 + b^4x^2\right)$$

$$= x - \frac{x}{a^4 b^2}\left[a^2b^2\left(a^2-x^2\right)+b^4x^2\right]$$

$$\overline{x} = \frac{a^2-b^2}{a^4}x \qquad \text{... (1)}$$

ସେହିପରି, $$\overline{y} = y + \left(\frac{1+y_1^2}{y_2}\right)$$

$$= y + \frac{1+\dfrac{b^4x^2}{a^4y^2}}{-\dfrac{b^4}{a^2y^3}} = y - \frac{y}{a^2b^4}\left(a^4y^2+b^4x^2\right)$$

$$= y - \frac{y}{a^2b^4}\left[a^4y^2+a^2b^2\left(b^2-y^2\right)\right]$$

$$\overline{y} = \frac{b^2-a^2}{b^4}y^3 \qquad \text{... (2)}$$

ସମୀକରଣ (1) ରୁ,ଆମେ ପାଉ $$x = \left(\frac{\overline{x}\,a^4}{a^2-b^2}\right)^{1/3}$$

ଏବଂ ସମୀକରଣ (2) ରୁ, ଆମେ ପାଉ $$y = \left(\frac{\overline{y}\,b^4}{b^2-a^2}\right)^{1/3}$$

ଏହି ମୂଲ୍ୟକୁ ଏଲିପ୍ସିର ସମୀକରଣରେ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ,

ଆମେ ପାଉ $$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\overline{x}\,a^4}{a^2-b^2}\right)^{2/3} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{\overline{y}\,b^4}{b^2-a^2}\right)^{2/3} = 1$$

$$\left(a\overline{x}\right)^{2/3} + \left(b\overline{y}\right)^{2/3} = \left(a^2-b^2\right)^{2/3}$$

ତେଣୁ, ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର $(\overline{x}, \overline{y})$ ର ସଞ୍ଚାର ପଥ ହେଉଛି

$$\left(ax\right)^{2/3} + \left(by\right)^{2/3} = \left(a^2-b^2\right)^{2/3}$$

ଯାହା ଦତ୍ତ ଏଲିପ୍ସ ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ଇଭଲ୍ୟଟ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ 1.16 ସରଳ ରେଖା $y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}$ ସମୂହର ଏନଭଲପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। ଯେଉଁରେ m ଏକ ପାରାମିଟର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ବକ୍ର ସମୂହର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \quad y - mx = \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \quad (y - mx)^2 = a^2 m^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \quad y^2 + m^2 x^2 - 2mxy = a^2 m^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \quad m^2 \left(x^2 - a^2\right) - 2mxy + \left(y^2 - b^2\right) = 0$$

m ଭିତ୍ତିକ ଆଂଶିକ ଅବକଳନ କଲେ,

$$m\left(x^2 - a^2\right) - 2xy = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{xy}{x^2 - a^2}$$

'm' ର ଏହି ମୂଲ୍ୟକୁ ଦତ୍ତ ବକ୍ର ସମୀକରଣରେ ପ୍ରତିଷ୍ଠାପନା କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$m^2 \left(x^2 - a^2\right) - 2mxy + \left(y^2 - b^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{xy}{x^2 - a^2}\right)^2 \left(x^2 - a^2\right) - 2\left(\frac{xy}{x^2 - a^2}\right) xy + \left(y^2 - b^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2 y^2}{x^2 - a^2} - \frac{2x^2 y^2}{x^2 - a^2} + y^2 - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{x^2 y^2}{x^2 - a^2} + y^2 - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2 y^2}{x^2 - a^2} = y^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 y^2 = \left(x^2 - a^2\right)\left(y^2 - b^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 y^2 = x^2 y^2 - x^2 b^2 - a^2 y^2 + a^2 b^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 b^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ **(ଉତ୍ତର)**

∴ ସରଳରେଖା ସମୂହର ଏନଭଲପ ହେଉଛି ଏଲିପ୍ସ।

ଉଦାହରଣ 1.17. ସରଳରେଖା ସମୂହ $y = mx + am^p$ ର ଏନଭଲପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁରେ 'm' ଏକ ପାରାମିଟର ଏବଂ 'a',' p' ଧ୍ରୁବକ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ **ଅଛି** $\quad y = mx + am^p \quad$ *... (1)*

ସମୀକରଣ (1)କୁ ପାରାମିଟର 'm' ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ,

ଆମେ ପାଉ $$0 = x + p\,a\,m^{p-1}$$

$$\Rightarrow \quad m = \left(-\frac{x}{p\,a}\right)^{\frac{1}{p-1}} \qquad \ldots (2)$$

ସମୀକରଣ (2)କୁ ଉପଯୋଗ କରି, ସମୀକରଣ (1)ରୁ 'm' ଅପସାରଣ କଲେ

$$y = \left(-\frac{x}{p\,a}\right)^{\frac{1}{p-1}} x + a\left(-\frac{x}{p\,a}\right)^{\frac{p}{p-1}}$$

$$y^{p-1} = \left(-\frac{x}{p\,a}\right) x^{p-1} + a^{p-1}\left(-\frac{x}{p\,a}\right)^{p}$$

$$a\,p\,y^{p-1} = (-x)^{p} + a^{p-2}(-x)^{p} \qquad \textbf{(ଉତ୍ତର)}$$

ଯାହାକି ଦତ୍ତ ସରଳରେଖା ସମୂହର ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଏନଭଲପର ସମୀକରଣ ଅଟେ।

ଦୁଇଟି ପାରାମିଟର ଥିବା ବକ୍ର ସମୂହର ଏନଭଲପ ଉପରେ ଆଧାରିତ ପ୍ରଶ୍ନ

ଉଦାହରଣ 1.18 ସରଳରେଖା $ax + by = 1$ ସମୂହର ଏନଭଲପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁରେ ପାରାମିଟର a ଏବଂ b ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ ହେଉଛି $ab = 1$

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ଅଛି $$ax + by = 1 \qquad \ldots (1)$$

ଏବଂ $$ab = 1 \qquad \ldots (2)$$

ସମୀକରଣ (1) କୁ 'a' ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ ('a' କୁ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଚଳ ଭାବେ ଗ୍ରହଣକରି ଏବଂ 'b', କୁ 'a' ଉପରେ ନିର୍ଭରଶୀଳ)

$$x + \frac{db}{da}y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{db}{da} = -\frac{x}{y} \qquad \ldots (3)$$

ସମୀକରଣ (2) କୁ a ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ

$$b + a\frac{db}{da} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{db}{da} = -\frac{b}{a} \qquad \ldots (4)$$

ସମୀକରଣରୁ (3) ଏବଂ (4)ରୁ

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ax}{1} = \frac{by}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ax}{1} = \frac{by}{1} = \frac{ax+by}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2x}, b = \frac{1}{2y}$$

ସମୀକରଣ (5)କୁ ସମୀକରଣ (2)ରେ ଉପଯୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$\left(\frac{1}{2x}\right)\left(\frac{1}{2y}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad 4xy = 1$$

ଏହା ଆବଶ୍ୟକ ଏନ୍‌ଭଲପ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 1.19. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ ବକ୍ର ସମୂହର ଏନଭଲପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। ଯେଉଁରେ ପାରାମିଟର a ଏବଂ b ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ ହେଉଛି $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ଅଛି। $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ ... *(1)*

ଏବଂ $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ ... *(2)*

ସମୀକରଣ (1) କୁ a ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ

$$\frac{\sqrt{x}}{2a^{3/2}} - \frac{\sqrt{y}}{2b^{3/2}}\frac{db}{da} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{db}{da} = -\frac{\sqrt{x}\, b\sqrt{b}}{\sqrt{y}\, a\sqrt{a}} \qquad \text{... (3)}$$

ସମୀକରଣ (2) ରୁ a ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{b}}\frac{db}{da} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{db}{da} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \qquad \text{... (4)}$$

ସମୀକରଣରୁ (3) ଏବଂ (4) ରୁ ଆମେ ପାଉ

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\frac{b}{a}=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{\frac{x}{a}}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{\frac{y}{b}}}{\sqrt{b}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{\frac{x}{a}}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{\frac{y}{b}}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{1} \qquad \text{[ସମୀକରଣରୁ (1) ଏବଂ (2)]}$$

$$\Rightarrow \quad a=\sqrt{x}, b=\sqrt{y}$$

ସମୀକରଣ (5)କୁ ସମୀକରଣ (2)ରେ ଉପଯୋଗ କଲେ, ଆମେ ଏନଭଲପଟି ପାଉ $x^{1/4}+y^{1/4}=1$

ଉଦାହରଣ 1.20 ସରଳରେଖା ସମୂହ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ର ଏନଭଲପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। ଯେଉଁରେ ପାରାମିଟର a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ ହେଉଛି $a + b = c.$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସରଳ ରେଖା ସମୂହର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ... *(1)*

ଏବଂ $a+b=c$

$\Rightarrow$ $b=c-a$ ... *(2)*

ସମୀକରଣ(2)କୁ ସମୀକରଣ (1)ରେ ଉପଯୋଗ କଲେ

ଆମେ ପାଉ $\frac{x}{a}+\frac{y}{c-a}=1$ ... *(3)*

ସମୀକରଣ(3) କୁ ଆଂଶିକ ଭାବେ a ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ

$$-\frac{x}{a^2}+\frac{y}{(c-a)^2}=0$$

$$\frac{x}{a^2}=\frac{y}{(c-a)^2}$$

$$\frac{(c-a)^2}{a^2}=\frac{y}{x}$$

$$\frac{c-a}{a}=\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{y}{x}}+1=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$a = \frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ a ମୂଲ୍ୟକୁ ସମୀକରଣ (2)ରେ ଉପଯୋଗ କଲେ

$$b = c - \frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \frac{c\sqrt{x}+c\sqrt{y}-c\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{c\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

a ଏବଂ b ମୂଲ୍ୟକୁ ସମୀକରଣ (1)ରେ ଉପଯୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$\frac{x}{\left(\frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{c\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)} = 1$$

$$\frac{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{c\sqrt{x}} + \frac{y\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{c\sqrt{y}} = 1$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{y}{\sqrt{y}}\right) = c$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) = c$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 = c$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{c}$$

ଏହା ହେଉଛି ଆବଶ୍ୟକ ଏନଭଲପ।

ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ଉପରେ ଆଧାରିତ ପ୍ରଶ୍ନ ଯେଉଁରେ ବକ୍ରର ଲମ୍ବ ସମୂହର ଏନଭଲପ ରୂପରେ ଜଣା

ଉଦାହରଣ 1.21. ବକ୍ରର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟକୁ ଏନଭଲପ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଭାବରେ ବିବେଚନା କରି, ବକ୍ର $x = \cos\theta + \theta\sin\theta$, $y = \sin\theta - \theta\cos\theta$ ର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ଅଛି $x = \cos\theta + \theta\sin\theta,\ y = \sin\theta - \theta\cos\theta$

ତେଣୁ $\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta + \theta\cos\theta + \sin\theta = \theta\cos\theta$ ଏବଂ $\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - \theta(-\sin\theta) - \cos\theta = \theta\sin\theta$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\theta\sin\theta}{\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

ହାଇପରବୋଲା ପ୍ରତି ଲମ୍ବର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$\left(y-(\sin\theta-\theta\cos\theta)\right)=-\frac{1}{\tan\theta}\left(x-(\cos\theta+\theta\sin\theta)\right)$$

$$\left(y-(\sin\theta-\theta\cos\theta)\right)=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(x-(\cos\theta+\theta\sin\theta)\right)$$

$$y\sin\theta-\sin^2\theta+\theta\sin\theta\cos\theta=-x\cos\theta+\cos^2\theta+\theta\sin\theta\cos\theta$$

$$y\sin\theta+x\cos\theta=1 \qquad \ldots (1)$$

ସମୀକରଣ (1) କୁ ପାରାମିଟର θ ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ,

$$y\cos\theta-x\sin\theta=0 \qquad \ldots (2)$$

ସମୀକରଣ (1) xcosθ - ସମୀକରଣ (2) xsin θ ....(3)

$$\Rightarrow \quad x=\cos\theta$$

ସେହିପରି ସମୀକରଣ (1) xsin θ + ସମୀକରଣ (2) xcosθ

$$y=\sin\theta \qquad \ldots (4)$$

ସମୀକରଣ (3) ଏବଂ (4) ରୁ 'θ' ଅପସାରଣ କଲେ ଆମେ ଆବଶ୍ୟକ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ପାଉ $x^2+y^2=1$,

ଉଦାହରଣ 1.22 ବକ୍ରର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟକୁ ଏନଭଲପ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଭାବରେ ବିବେଚନା କରି, ହାଇପରବୋଲା $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କର।

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 1.2

1. ବକ୍ର y = tanx ପାଇଁ x = π/4 ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଏବଂ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
2. ହାଇପରବୋଲା $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ପାଇଁ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ଏହାର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
3. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ସାଇକ୍ଲୋଇଡ୍ $x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$ ର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ହେଉଛି ଅନ୍ୟ ଏକ ସମ ସାଇକ୍ଲୋଇଡ୍ ।
4. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ବକ୍ର $x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta),\ y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta)$ ର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ହେଉଛି $x^2+y^2=a^2$
5. ବକ୍ର $x\sin\theta-y\cos\theta=a\theta$ ର ଏନଭଲପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁରେ θ ଏକ ପାରାମିଟର ।
6. ବକ୍ର $x\sec^2\theta+y\operatorname{cosec}^2\theta=a$ ର ଏନଭଲପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁରେ θ ଏକ ପାରାମିଟର ।

7. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ସରଳ ରେଖା ସମୂହର ଏନଭଲପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁରେ ପାରାମିଟର a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ ହେଉଛି, $a^2b^3=c^5$ ।

8. କେନ୍ଦ୍ର ଏଲିପ୍ସ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଥିବା ବୃତ୍ତ ସମୂହର ଏନଭଲପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଏବଂ ଯାହା ନିଜର କେନ୍ଦ୍ରଗାମୀ।

9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ଏଲିପ୍ସ ସମୂହର ଏନଭଲପର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁରେ ପାରାମିଟର *'a'* ଏବଂ *'b'* ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ ହେଉଛି $\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=1$, l ଏବଂ m ହେଉଛି ଅଣ-ଶୂନ୍ୟ ଧ୍ରୁବକ।

ଉତ୍ତରମାଳା

1. $\frac{5\sqrt{5}}{4},\left(\frac{\pi-10}{4},\frac{9}{4}\right)$

2. ସଙ୍କେତ: $x=a\sec\theta,\ y=b\tan\theta$ ଏବଂ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର $\left(\frac{a^2+b^2}{a\cos^3\theta},\frac{-\sin^3\theta\left(a^2+b^2\right)}{\cos^3\theta}\right)$ ଏବଂ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ $(a\,x)^{2/3}-(b\,y)^{2/3}=\left(a^2+b^2\right)^{2/3}$ ।

5. $x=a(\sin\theta+\cos\theta),\ y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta)$ ।

6. $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$

7. $x^2y^3=\frac{712}{3125}c^5$ 8. $\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(a^2x^2+b^2y^2\right)$ 9. $\frac{x}{l}+\frac{y}{m}=1$

ଆକର୍ଷଣୀୟ ତଥ୍ୟ: କ'ଣ ତୁମେମାନେ କେବେ ଏପରି ମେସିନ୍ କିମ୍ବା ଖେଳନା ଦେଖିଛ ଯେଉଁଥିରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନକାରୀ ଚାବି ଅଛି, ଯେପରି କି ଏକ ମାଙ୍କଡ଼ ବଜାଉଥିବା ଯନ୍ତ୍ର? ଏହାର ଭିତରର ସର୍ପିଳ ସ୍ପ୍ରିଙ୍ଗ୍ ଏକ "ବୃତ୍ତାକାର ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ"ରେ ଗତି କରିଥାଏ।

ଭିଡିଓ ସଂଯୋଜକ **(ଉତ୍ସ: NPTEL)**

ବକ୍ରତା ଏବଂ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ

ICTର ବ୍ୟବହାର

http://kmr.csc.kth.se/wp/research/math-rehab/learning-object-repository/geometry-2/metric-geometry/euclidean-geometry/geometry/plane-curves/evolutes/

ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ

- ସେଗୁଡ଼ିକ ଯାନ୍ତ୍ରିକ ଶିଳ୍ପରେ ବିଶେଷ ଭାବରେ ଦାନ୍ତ ଶିଳ୍ପରେ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ, ଯେଉଁରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଯନ୍ତ୍ର ଏବଂ ଗିଅର୍‌ର ଦାନ୍ତ ଯଥା ସମ୍ଭବ କମ୍ପନକୁ କମ କରିବାକୁ ତିଆରି କରାଯାଏ ।
- ସ୍କ୍ରୋଲ୍ ଏବଂ ଗ୍ୟାସ୍ କମ୍ପ୍ରେସର୍ ହେଉଛି ଦୁଇଟି ଯନ୍ତ୍ର ଯାହା ତରଳ ପଦାର୍ଥକୁ ପମ୍ପ କରିବା, ସଙ୍କୋଚନ କରିବା କିମ୍ବା ଚାପିବାପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ । ଏରେ ଆକୃତିର ଏହି ଧାରଣାର ଏକ ପ୍ରୟୋଗ ଅଛି, ଯାହା ନିଶ୍ଚିତ କରଯେ କି ସେମାନେ ଦକ୍ଷ ଏବଂ କମ ଧ୍ୱନି ସୃଷ୍ଟି କରନ୍ତି ।
- ରାସ୍ତାର ବକ୍ରତା ପରିକଳ୍ପନା କରିବା ସମୟରେ ସଡ଼କ ସୁରକ୍ଷାକୁ ବିଚାରକୁ ନିଆଯିବା ଆବଶ୍ୟକ, ଏବଂ ଘର୍ଷଣ ଚକ୍ର ସମାନ ଆକାର ଉପରେ ମଧ୍ୟ ବିଚାର କରାଯିବା ଆବଶ୍ୟକ ଅଟେ । ବକ୍ରତାର ଧାରଣା ସେହି ସମୟରେ କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ ହୁଏ ।

1.2 ସୀମାଯୁକ୍ତ ଓ ଅଂସଗତ ସମାକଳଜର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ

1.2.1 ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜ (Definite Integral)

ଏକ ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜକୁ $\int_a^b f(x)$ ଦ୍ୱାରା ପରିପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ। ଯେଉଁରେ 'a' କୁ ଅଧଃସୀମା (Lower limit) ଓ 'b' କୁ ଉର୍ଦ୍ଧସୀମା (Upper limit) କୁହାଯାଏ । ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜକୁ ଗୋଟିଏ ଯୋଗଫଳର ସୀମା ରୂପରେ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଯାଏ। କିମ୍ବା ଏହାର ଅନ୍ତରାଳ $[a, b]$ ରେ ପ୍ରତି-ଅବକଳଜ (Antiderivative) ଯଦି F ଅଟେ, ତେବେ ଏହାର ମୂଲ୍ୟ b ରେ F ର ମୂଲ୍ୟ ଏବଂ ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ a ରେ F ର ମୂଲ୍ୟର ବିୟୋଗର ଫଳ $F(b) - F(a)$ । ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜର ମୂଲ୍ୟ ଅନନ୍ୟ ଅଟେ ।

1.2.1.1 ଯୋଗଫଳର ସୀମା ରୂପରେ ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ

ମନେକର f ହେଉଛି ଆବଦ୍ଧ ଅନ୍ତରାଳ [a, b] ରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଥିବା ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ଅଟେ। ମନେକର, ଫଳନ ଦ୍ୱାରା ନିଆଯାଇଥିବା ସମସ୍ତ ମୂଲ୍ୟ ଅଣ-ରଣାତ୍ମକ ଅଟେ, ତେଣୁ ଫଳନର ରେଖାଚିତ୍ର x-ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଏକ ବକ୍ର ଅଟେ ।

ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜ $\int_a^b f(x)$ ହେଉଛି ବକ୍ର $y = f(x)$, ଏବଂ କୋଟି (ordinate) $x = a, x = b$ ଏବଂ x-ଅକ୍ଷ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ ହୋଇଥିବା କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ।

ଯେତେବେଳେ ଆମେ ଏହି କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା, ତାହା ହେବ

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)h)\right]$$ ଯେଉଁରେ

$h = \dfrac{b-a}{n} \to 0$ ତା'ପରେ $n \to \infty$

ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରକୁ ଯୋଗଫଳର ସୀମାରୂପରେ ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜର ସଂଜ୍ଞା ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 1.23. $\int_a^b f(x)\,dx$ କୁ ଯୋଗଫଳର ସୀମା ରୂପେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜର ସଂଜ୍ଞାରୁ ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)h)\right]$$

ଯେଉଁରେ $h=\dfrac{b-a}{n}$

ତେଣୁ,

$$\int_0^2(x^2+1)\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{2(n-1)}{n}\right)\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+\left(\frac{2^2}{n^2}+1\right)+\left(\frac{4^2}{n^2}+1\right)+\ldots+\left(\frac{(2n-2)^2}{n^2}+1\right)\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n\ times}+\frac{1}{n^2}\left(2^2+4^2+\ldots+(2n-2)^2\right)\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{2^2}{n^2}\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right)\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{4}{n^2}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{2}{3}\frac{(n-1)(2n-1)}{n}\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 2\left[1+\frac{2}{3}(1)(2)\right]=2\left[1+\frac{4}{3}\right]=\frac{14}{3}$$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 1.24 $\int_a^b f(x)\,dx$ କୁ ଯୋଗଫଳର ସୀମା ରୂପେ ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

ସମାଧାନ: ସଂଜ୍ଞାରୁ ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\int_0^2 e^x\,dx=(2-0)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[e^0+e^{2/n}+e^{4/n}+\ldots+e^{(2n-2)/n}\right]\pi$

ଜ୍ୟାମିତିକ ଗୁଣୋତ୍ତର ଶ୍ରେଣୀର n- ପଦ ମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ ଉପଯୋଗ କରି, ଯେଉଁରେ, $a=1, r=e^{2/n}$

$$\int_0^2 e^x\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^{\frac{2n}{n}}-1}{e^{\frac{2}{n}}-1}\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^2-1}{e^{2/n}-1}\right]$$

$$= \frac{2\left(e^2-1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{e^{2/n}-1}{2/n}\right).2} = e^2-1 \qquad \left[\because \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1\right]$$

କଳନ ଗଣିତର ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ

1.2.2 ସମାକଳନ ଗଣିତର ପ୍ରଥମ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ

ଯଦି $f(x)$ ଅନ୍ତରାଳ $[a, b]$ ରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଛି ତେବେ $f(x)$ ର ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜର ସଂଜ୍ଞା ହେଉଛି

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

ଯେଉଁରେ $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$

ଉପରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜର ସଂଜ୍ଞା ହେଉଛି ବକ୍ର $y = f(x)$, x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ $x = a$ ଓ $x = b$ ଦୁଇଟି କୋଟି ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳକୁ ସୂଚାଏ ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 1.25. $\int_0^2 x^2\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି $\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[\frac{(2)^3}{3}-0\right] = \frac{8}{3}$

ଉଦାହରଣ 1.26. $\int_0^{2\pi}\cos x\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ, $\int_0^{2\pi}\cos x\,dx = \left[-\sin x\right]_0^{2\pi}$

$$= \left[-\sin 2\pi + \sin 0\right] = \left[-0+0\right] = 0$$

ଉଦାହରଣ 1.27. $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ,

$$\int_2^3 (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3$$

$$= \left[\left(\frac{3^2}{2}+3\right)-\left(\frac{2^2}{2}+2\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{4}{2}+2\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{9+6}{2}\right)-\left(\frac{4+4}{2}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{15}{2}-\frac{8}{2}\right] = \frac{7}{2}$$

1.2.3 ସମାକଳନ ଗଣିତର ଦ୍ୱିତୀୟ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ

କଳନ ଗଣିତର ଦ୍ୱିତୀୟ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ ଜଣାଇଥାଏ ଯଦି $f(x)$ ଅନ୍ତରାଳ $[a, b]$ ରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ଏବଂ F, $[a, b]$ ଉପରେ $f(x)$ର ଅନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳଜ (Indefinite Integral) ଅଟେ, ତେବେ

$$F'(x) = f(x)$$

ଗାଣିତିକ ରୂପରେ, ଯଦି $$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ତେବେ $$F'(x) = f(x)$$

ମନ୍ତବ୍ୟ: ଯେହେତୁ ପ୍ରତିଅବକଳଜ (antiderivate) ଏବଂ ଅବକଳଜ (derivate) ପରସ୍ପର ବିପରୀତ ଅଟନ୍ତି, ଯଦି ଫଳନର ପ୍ରତିଅବକଳଜ ପ୍ରାପ୍ତ ହୁଏ, ତେବେ ମୂଳ ଫଳନ ମଧ୍ୟପ୍ରାପ୍ତ ହେବ

ଉଦାହରଣ 1.28 ସମାକଳନ ଗଣିତର ଦ୍ୱିତୀୟ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଦତ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନକୁ ସମାଧାନ କର।

$$F(x) = \int_0^{x^3} (t^2+t)\,dt$$

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ,

$$F(x) = \int_0^{x^3} (t^2+t)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_0^{x^3} = F(x^3)-F(0)$$

$$F(x) = \left(\frac{(x^3)^3}{3}-\frac{(x^3)^2}{2}\right)-\left(\frac{(0)^3}{3}-\frac{(0)^2}{2}\right)$$

$$F(x)=\frac{x^9}{3}-\frac{x^6}{2}$$

$$F(x)=3x^8-3x^5$$

$$F'(x)=3x^2\left(\left(x^3\right)^2+\left(x^3\right)\right)$$

$3x^2$ ହେଉଛି ଉର୍ଦ୍ଧସୀମା x^3 ର ଅବକଳଜ ଏବଂ $\left(\left(x^3\right)^2+\left(x^3\right)\right)$ ର ମୂଲ୍ୟ $(t^2 + t)$ ସହିତ ସମାନ ଅଟେ ।

ଏଥିରେ ଆମେ ପାଇ ପାରିବା ଯେ $F(x)$ର ଅବକଳଜ, $f(x)$ ର ସମାକଳଜ ଅଟେ। ଫଳନ $f(x)$ ର ସମତୁଲ୍ୟ ଅଟେ $F(x)$

ଉଦାହରଣ 1.29 $F(x)=\int_0^{x^2}(t+7)^{1/2}\,dt$ କୁ ସମାକଳନ ଗଣିତର ଦ୍ୱିତୀୟ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି ସମାଧାନ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ, $F(x)=\int_0^{x^2}(t+7)^{1/2}\,dt$

$$=\left[\frac{2(t+7)^{3/2}}{3}\right]_0^{x^2}$$

$$=F(x)-F(0)$$

$$F(x)=\left(\frac{2\left(x^2+7\right)^{3/2}}{3}\right)-\left(\frac{2(0+7)^{3/2}}{3}\right)$$

$$F(x)=\frac{2\left(x^2+7\right)^{3/2}}{3}-\frac{2(7)^{3/2}}{3}$$

$$F'(x)=2x\left(x^2+7\right)^{1/2}$$

$2x$ ହେଉଛି ଉର୍ଦ୍ଧସୀମା x^2 ର ଅବକଳଜ ଏବଂ $\left(x^2+7\right)^{1/2}$ ର ମୂଲ୍ୟ $(t+7)^{1/2}$ ସହିତ ସମାନ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ 1.30 $F(x)=\int_{-3}^{\sqrt{x}}\left(3t^2-30\right)dt$ କୁ ସମାକଳନ ଗଣିତର ଦ୍ୱିତୀୟ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି ସମାଧାନ କର।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି $F(x)=\int_{-3}^{\sqrt{x}}\left(3t^2-30\right)dt$

$$=\left[t^3-30t\right]_{-3}^{\sqrt{x}}=F\left(\sqrt{x}\right)-F(-3)$$

$$F(x)=\left[\left(\sqrt{x}\right)^3-30\left(\sqrt{x}\right)\right]-\left[(-3)^3-30(-3)\right]$$

$$F'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}-\frac{15}{x^{1/2}}$$

$$F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x-30)$$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ହେଉଛି ଊର୍ଦ୍ଧସୀମା $\sqrt{x}$ ର ଅବକଳଜ ଏବଂ $(3x-30)$ ର ମୂଲ୍ୟ $(3t^2-30)$ ସହିତ ସମାନ ।

1.2.4 ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳନର ଗୁଣଧର୍ମ

ଏରେ ଆମେ ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳନର ଗୁଣଧର୍ମର ଆଲୋଚନା କରିବା ଯାହା ସେଗୁଡିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ଉପଯୋଗୀ।

1. ଯଦି $f_1(x)$ ଏବଂ $f_2(x)$ ଅନ୍ତରାଳ $[a, b]$ ରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଓ ପରିବଦ୍ଧ ଫଳନ ଓ k_1 ଏବଂ k_2 ଦୁଇଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟାଙ୍କ, ତେବେ

$$\int_a^b\left[k_1\, f_1(x)+k_2\, f_2(x)\right]dx=k_1\int_a^b f_1(x)\,dx+k_2\int_a^b f_2(x)\,dx$$

ଏହାକୁ ରୈଖିକତା ଗୁଣ କୁହାଯାଏ ।

2. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)\,dt$

ଉଭୟ ପକ୍ଷ $F(b)-F(a)$ ସହିତ ସମାନ ସୂଚିତ କରେ ଯେ ସମାକଳନରେ ଚଳ ପ୍ରତିରୂପୀ ଅଟେ।

3. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

ଏରେ $F(b)-F(a)=-\left[F(a)-F(b)\right]$

4. $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

ଏରେ, 'c' $a<c<b$ ରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଛି

R.H.S. = $F(c)-F(a)+F(b)-F(c)$ ଯାହା $F(b)-F(a)$ ସହିତ ସମାନ।

5. $\int_0^a f(x)\,dx=\int_a^a f(a-x)\,dx$

ଏହାକୁ ଅପରିବର୍ତ୍ତନଶୀଳ ଗୁଣ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ ଆମେ ନେବା,

$a-x=t \Rightarrow -dx=dt$

$\therefore \quad \int_0^a f(a-x)\,dx=-\int_a^0 f(t)\,dt=\int_0^a f(t)\,dt$ [ଗୁଣଧର୍ମ (3) ଦ୍ୱାରା]

$=\int_0^a f(x)\,dx$ [ଗୁଣଧର୍ମ (2) ଦ୍ୱାରା]

6. $\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$ ଯଦି $f(x)$ ଯୁଗ୍ମ ଫଳନ ଅର୍ଥାତ୍ $f(-x)=f(x)$

$=0$, ଯଦି $f(x)$ ଅଯୁଗ୍ମ ଫଳନ ଅର୍ଥାତ୍ $f(-x)=-f(x)$

ପ୍ରମାଣ: $\int_{-a}^a f(x)\,dx=\int_{-a}^0 f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx$ (i)

$x = -t$ କୁ ଦକ୍ଷିଣ ଏବଂ ପ୍ରଥମ ସମାକଳଜରେ ଲେଖିଲେ,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt$$ [ଗୁଣଧର୍ମ (3) ଦ୍ୱାରା]

[ଗୁଣଧର୍ମ (2) ଦ୍ୱାରା]

ସମୀକରଣ (1) ରେ ପ୍ରତିସ୍ଥାପିତ କଲେ ଆମେ ପାଉ

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a}\left[f(x)+f(-x)\right]dx$$

$$= \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{ଯଦି } f(-x) = f(x) \\ 0, & \text{ଯଦି } f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

x^4, $\cos x$ ଇତ୍ୟାଦି ଫଳନରେ ଯେହେତୁ $f(-x) = f(x)$, ତେଣୁ ଫଳନକୁ ଯୁଗ୍ମ ଫଳନ କୁହାଯାଏ ।

x^3, $\sin x$ ଇତ୍ୟାଦି ଫଳନରେ ଯେହେତୁ $f(-x) = -f(x)$, ତେଣୁ ଫଳନକୁ ଅଯୁଗ୍ମ ଫଳନ କୁହାଯାଏ।

7. $\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$, ଯଦି $f(2a-x) = f(x)$

$= 0$, ଯଦି $f(2a-x) = -f(x)$

ଏହି ଗୁଣଧର୍ମକୁ(6) ଧର୍ମ ପରି ସମାନ ପକ୍ରିୟାରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 1.31. $\int_{0}^{\pi/2} \log\sin x\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ $I = \int_{0}^{\pi/2} \log\sin x\,dx$ ... (1)

ତେଣୁ $\int_{0}^{\pi/2} \log\cos x\,dx$ [ଗୁଣଧର୍ମ (5) ଦ୍ୱାରା] ... (2)

ସମୀକରଣ (1) ଏବଂ (2) କୁ ଯୋଗ କରିବା ପରେ, ଆମେ ପାଇବା,

$$2I = \int_{0}^{\pi/2} (\log\sin x + \log\cos x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \{\log(2\sin x\cos x) - \log 2\}\,dx$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \log\sin 2x\,dx - \frac{1}{2}\pi\log 2$$

, ଯେଉଁରେ $x=\frac{u}{2}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\sin u\;du-\frac{1}{2}\pi\log 2$$ [ଗୁଣଧର୍ମ (7) ଦ୍ୱାରା]

$$2I=I=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\log\sin u\;du-\frac{1}{2}\pi\log 2$$ [ସମୀକରଣରୁ (1)]

ତେଣୁ $$I=-\frac{1}{2}\pi\log 2$$

∴

ଉଦାହରଣ 1.32. $\int_0^{\pi/2}\log\sin x\;dx=-\frac{1}{2}\pi\log 2$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର

$$\int_0^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$$

[ଗୁଣ (5) ଦ୍ୱାରା]

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\tan(\pi-x)}{\sec(\pi-x)+\tan(\pi-x)}\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{-(\pi-x)\tan x}{-\sec x-\tan x}\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx-I$$

$$2I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\tan x(\sec x+\tan x)}{\sec^2 x-\tan^2 x}\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sec x\tan x-\tan^2 x}{1}\,dx$$

କିମ୍ବା $$I=\frac{\pi}{2}(\pi-2)$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\left(\sec x\tan x-\sec^2 x+1\right)dx$$

$$=\pi\left[\sec x-\tan x+x\right]_0^{\pi}=\pi(\pi-2)$$

ତେଣୁ

ଉଦାହରଣ 1.33. $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2(\pi - x)}\, dx \quad [\because \sin(\pi - x) = \sin x, \cos(\pi - x) = -\cos x] \quad [\text{ଗୁଣ (5) ଦ୍ୱାରା}]$$

'I'ର ଦୁଇଟି ମୂଲ୍ୟକୁ ଯୋଗ କରିବା ପରେ ଆମେ ପାଇବା

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x + x)\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$= -\pi \left[\tan^{-1}(\cos x)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\pi \left(-\frac{1}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2I = \frac{2\pi^2}{4}$$

$$I = \frac{\pi^2}{4}$$

ତେଣୁ $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$

ଉଦାହରଣ 1.34. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\int_0^{\pi/2} \cos^3 2x \,.\, \sin^4 4x\, dx = 0.$

ସମାଧାନ : ମନେକର $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 2x \sin^4 4x\, dx$

$2x = t$ ରଖିବା ପରେ, ଆମେ ପାଇବା

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^3 t . \sin^4 2t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 2^4 . \cos^3 t . \sin^4 t . \cos^4 t\, dt$$

$$= 8\int_0^{\pi} \sin^4 t . \cos^7 t\, dt = 0 \qquad [\text{ଗୁଣ (7) ଦ୍ୱାରା}]$$

ଉଦାହରଣ 1.35. $\int_0^1 \cot^{-1}\left(1 - x + x^2\right) dx$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମାକଳନକୁ ଏହି ପ୍ରକାର ଲେଖାଯାଇ ପାରିବ।

$$I = \int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x+x^2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+x(x-1)}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+x(x-1)}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1}\left\{\frac{x-(x-1)}{1+x(x-1)}\right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tan^{-1} x - \tan^{-1}(x-1)\right] dx$$

କିନ୍ତୁ [ଗୁଣ (5) ଦ୍ୱାରା]

$$= \int_0^1 \tan^{-1} x\, dx - \int_0^1 \tan^{-1}(x-1)\, dx$$

$\therefore$

$$\int_0^1 \tan^{-1}(x-1)\, dx = \int_0^1 \tan^{-1}(1-x-1)\, dx = -\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx$$

'1' କୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ଫଳନ ଭାବରେ ଗ୍ରହଣ କରି, ଖଣ୍ଡଶଃ ସମାକଳନ (Integrating by parts) କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$I = 2\left[\tan^{-1} x.x\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= 2.1.\frac{\pi}{4} - \left[\log\left(1+x^2\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \log 2$$

ତେଣୁ $\int_0^1 \cot^{-1}\left(1-x+x^2\right) dx = \frac{\pi}{2} - \log 2$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 1.3

1. ଦତ୍ତ ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜକୁ, ଯୋଗଫଳର ସୀମା ରୂପରେ ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

i. $\int_a^b x\,dx$ ii. $\int_0^5 (x+1)\,dx$

iii. $\int_2^3 x^2\,dx$ iv. $\int_1^4 (x^2-x)\,dx$ v. $\int_{-1}^1 e^x\,dx$

2. ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜକର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର ।

i. $\int_{-1}^1 (x+1)\,dx$ ii. $\int_1^2 (4x^3-5x^2+6x+9)\,dx$ iii. $\int_0^{\pi/2} \cos 2x\,dx$

iv. $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$ v. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ vi. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$

vii. $\int_2^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ viii. $\int_0^1 x e^{x^2}\,dx$ ix. $(2\sec^2 x + x^3 + 2)\,dx$

x. $\int_0^1 \left(x e^x + \sin\frac{\pi x}{4}\right) dx$

3. $\int_0^\pi \log(1+\cos x)\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର ।

4. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର ।

5. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର ।

6. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$

7. $\int_0^\pi \sin^6 x\cos^7 x\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର ।

ଉତ୍ତରମାଳା

1. i. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ii. $\frac{35}{2}$ iii. $\frac{19}{3}$ iv. $\frac{27}{2}$ v. $e-\frac{1}{e}$

2. i. 2 ii. $\frac{64}{3}$ iii. 0 iv. $\frac{1}{2}\log 2$ v. $\frac{\pi}{2}$

vi. $\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)$ vii. $\frac{1}{2}\log 2$ viii. $\frac{1}{2}(e-1)$ ix. $\frac{\pi^4}{1024}+\frac{\pi}{2}+2$ x. $1+\frac{4}{\pi}-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

3. $-\pi\log 2$ 4. $\frac{\pi}{8}\log 2$ 5. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(1+\sqrt{2}\right)$ 7. 0

1.2.5 ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ

ସମାକଳଜ $\int_a^b f(x)\,dx$ କୁ ଏକ ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ କୁହାଯାଏ, ଯଦି

i. ସମାକଳଜ ଅନ୍ତରାଳ [a, b] ସସୀମ ନୁହେଁ ଅର୍ଥାତ୍ 'a' କିମ୍ବା 'b' କିମ୍ବା ଉଭୟେ 'a' ଏବଂ 'b' ଦ୍ୱୟ ଅସୀମ ଅଟନ୍ତି ।

ii. ସମାକଲ୍ୟ $f(x)$ ଅନ୍ତରାଳ $[a, b]$ ରେ ସୀମାବଦ୍ଧ ନୁହେଁ ।

iii. ଅନ୍ତରାଳ $[a, b]$ ସସୀମ ନୁହେଁ କିମ୍ବା $f(x)$ ଏହା ମଧ୍ୟରେ ପରିବଦ୍ଧ ନୁହେଁ ।

1.2.6 ଅସଂଗତ ସମାକଳଜର ପ୍ରକାର

ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ ତିନି ପ୍ରକାର ଅଟେ। ଯାହା ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି:

a. ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାରର ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ

ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜ $\int_a^b f(x)\,dx$ କୁ ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାରର ଏକ ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ କୁହାଯାଏ ଯଦି 'a' କିମ୍ବା 'b' ଅଥବା ଦୁଇଟି ଯାକ ଅସୀମ ବା ଅନନ୍ତ କିନ୍ତୁ $f(x)$ ପରିବଦ୍ଧ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}, \int_{-\infty}^0 e^{2x}\,dx$, ହେଉଛନ୍ତି ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାରର ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ ।

ଏହି ପରିପ୍ରେକ୍ଷିରେ, ଆମେ ବାଖ୍ୟା କରୁ ଯେ,

i. $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx, (t>a)$

ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ $\int_a^\infty f(x)dx$ ଅଭିସାରୀ ହେବ ଯଦି ଡାହାଣ ପାର୍ଶ୍ୱର ସୀମାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ରହିବ ଏବଂ ଏହା ସସୀମ ହେବ । ଅନ୍ୟଥା ଏହା ଅପସାରୀ ହେବ ଯଦି ସୀମା $+\infty$ କିମ୍ବା $-\infty$,

ii. $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{t}^{b} f(x)\,dx, (t < b)$

ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ ଅଭିସାରୀ ହେବ ଯଦି ଡାହାଣ ପାର୍ଶ୍ୱର ସୀମାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ରହିବ ଏବଂ ଏହା ସସୀମ ହେବ । ଅନ୍ୟଥା ଏହା ଅପସରୀ ହେବ ଯଦି ସୀମା + ∞ କିମ୍ବା - ∞ ହେବ

iii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ c ପାଇଁ)

$$= \lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t_2\to\infty}\int_{c}^{t_2} f(x)\,dx \qquad [t_1 < c < t_2]$$

ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ ଅଭିସାରୀ ହେବ ଯଦି ଡାହାଣ ପାର୍ଶ୍ୱ ସୀମାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ସସୀମ ଭାବେ ରହିବ ଏବଂ ଯଦି ସୀମା ହେବ + ∞ କିମ୍ବା – ∞, ତେବେ ଏହା ଅପସାରୀ ହେବ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 1.36 . ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ ର ଅଭିସରଣ ପରୀକ୍ଷା କର ।

ସମାଧାନ : ଏରେ, $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$= \lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t} x^{-1/2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_{1}^{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[2\sqrt{t}-2\right] = \infty$$

ତେଣୁ, ଦତ୍ତ ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ ଅପସାରୀ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 1.37. ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ $\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx$ ର ଅଭିସରଣ ପରୀକ୍ଷାକର

ସମାଧାନ : ଏରେ $\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{t}^{0} e^{-x}\,dx$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_{t}^{0}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\left(1-e^{-t}\right)\right]$$

$$= -1 + e^{\infty} = \infty$$

ତେଣୁ, ଦତ୍ତ ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ ଅପସାରୀ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 1.38. ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ର ଅଭିସରଣ ପାଇଁ ପରୀକ୍ଷା କର।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$$= \lim_{t_1 \to -\infty} \int_{t_1}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{t_2 \to \infty} \int_{0}^{t_2} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t_1 \to -\infty} \left[\tan^{-1} x\right]_{t_1}^{0} + \lim_{t_2 \to \infty} \left[\tan^{-1} x\right]_{0}^{t_2}$$

$$= \lim_{t_1 \to -\infty} \left[0 - \tan^{-1} t_1\right] + \lim_{t_2 \to \infty} \left[\tan^{-1} t_2 - 0\right]_{0}^{t_2}$$

$$= -\left[\tan^{-1}(-\infty)\right] + \left[\tan^{-1}(\infty)\right] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

ତେଣୁ, ଦତ୍ତ ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ।

b. ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରକାରର ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ

ସମାକଳଜ $\int_a^b f(x)\,dx$ କୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରକାର ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ କୁହାଯିବ ଯଦି 'a' ଏବଂ 'b' ଉଭୟ ସସୀମ କିନ୍ତୁ $f(x)$ ପରିବଦ୍ଧ ନୁହେଁ (ଅର୍ଥାତ୍ $f(x)$ ରେ ଅସୀମ ବିଚ୍ଛିନ୍ନତାର ଏକ କିମ୍ବା ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁ ଅଛି)।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $\int_0^1 \frac{dx}{x}, \int_1^4 \frac{dx}{(x-1)(x-4)}$, ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରକାରର ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ।

ଏଠାରେ ଆମେ ଏହି ପ୍ରକାରରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରୁ।

i. $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$, ଯଦି $x = a$, $f(x)$ର ଅସୀମ ବିଚ୍ଛିନ୍ନତାର ଏକମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ। ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱର ସୀମାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଥିଲେ ଏବଂ ଏହା ସସୀମ ହେଲେ ଏହା ଅଭିସାରୀ ହେବ ଅନ୍ୟଥା ଏହା ଅପସାରୀ ହେବ।

ii. $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, ଯଦି $x = b$, $f(x)$ର ଅସୀମ ବିଚ୍ଛିନ୍ନତାର ଏକମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ। ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱର ସୀମାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଥିଲେ ଏବଂ ଏହା ସସୀମ ହେଲେ, ଏହା ଅଭିସାରୀ ହେବ ଅନ୍ୟଥା ଏହା ଅପସାରୀ ହେବ।

iii. ଯଦି $f(x)$ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ 'c' ରେ $a < c < b$ ଅସୀମ ହୋଇଯାଏ, ତେବେ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx$$

ସାଧାରଣତଃ ଯଦି $c_1, c_2, c_3, .., c_n$ $[a, b]$ ଅନ୍ତରାଳରେ $f(x)$ ଅସୀମ ବିଚ୍ଛିନ୍ନତାର କିଛି ସୀମିତ ସଂଖ୍ୟକ ବିନ୍ଦୁ ଯେଉଁଠାରେ $a < c_1 < c_2 < c_3 ... < c_{n-1} < c_n < b$,, ତେବେ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + ... + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx$$

ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱର ସୀମାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ସସୀମ ରହିବ ତେବେ ଏହି ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ ଅଭିସାରୀ ହେବ ଅନ୍ୟଥା ଏହା ଅପସାରୀ ହେବ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 1.39. ସମାକଳଜ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ର ଅଭିସରଣ ପରୀକ୍ଷା କର ।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ସମାକଳଜ ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରକାରର ଅଟେ ଏବଂ 0(ଶୂନ) ଏକ ଅସୀମ ବିଚ୍ଛିନ୍ନତାର ବିନ୍ଦୁ ।

ତେଣୁ $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-1/2}\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right) = 2(1-0) = 2 \text{ ସସୀମ}$$

ତେଣୁ, ଦତ୍ତ ସମାକଳଜ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ, ଏବଂ ଏହାର ସସୀମ ମୂଲ୍ୟ 2 ।

ଉଦାହରଣ 1.40. ସମାକଳଜ $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-3x+2}$ ର ଅଭିସରଣର ପରୀକ୍ଷା କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ସମାକଳଜ ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରକାରର ଅଟେ ଏବଂ $x = 1$, $f(x)$ର ବିଚ୍ଛିନ୍ନତାର ଏକମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ।

ତେଣୁ, ସଂଜ୍ଞା ଅନୁସାରେ,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-3x+2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(1-x)(2-x)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\log(1-x) + \log(2-x)\right]_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\log\varepsilon + \log(1+\varepsilon) - \log 2\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\log\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) - \log 2\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\log\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) - \log 2\right]$$

$$= \log(1+\infty) - \log 2 = \infty$$

ତେଣୁ, ଦତ୍ତ ସମାକଳଜ ଅପସାରୀ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ 1.41. ସମାକଳଜ $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ ର ଅଭିସରଣ ପରୀକ୍ଷା କର।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମାକଳଜ ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରକାରର ଅଟେ, ଏବଂ ଅନ୍ତରାଳ [-1, 1] ରେ x = 0, f (x)ର ବିଚ୍ଛିନ୍ନତାର ଏକମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ।

ତେଣୁ, ସଂଜ୍ଞା ଅନୁସାରେ,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{0+\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\left[\frac{x^{-2+1}}{-1}\right]_{-1}^{-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\left[\frac{x^{-2+1}}{-1}\right]_{\varepsilon_2}^{1}$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\left[-x^{-1}\right]_{-1}^{-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\left[-x^{-1}\right]_{\varepsilon_2}^{1}$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}-1\right]+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\left[-1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right]$$

$$=\infty-1-1+\infty=\infty$$

ତେଣୁ, ଦିଆଯାଇଥିବା ସମାକଳଜ ଅପସାରୀ ଅଟେ ।

b. ତୃତୀୟ ପ୍ରକାରର ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ (ମିଶ୍ରିତ ପ୍ରକାର)

ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜ $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ ତୃତୀୟ ପ୍ରକାରର ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ ଅଟେ, ଯଦି 'a' କିମ୍ବା 'b' ଅଥବା ଉଭୟ ଅସୀମ ଅଟନ୍ତି ଏବଂ $f(x)$ ମଧ୍ୟ ଅପରିବଦ୍ଧ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx, \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1-x}$, ତୃତୀୟ ପ୍ରକାରର ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ ଅଟେ ।

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 1.4

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ ଗୁଡ଼ିକର ଅଭିସରଣ ପରୀକ୍ଷା କର ଏବଂ ଯଦି ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ତେବେ ଏହାର ନାମ ଓ ପ୍ରକାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

   i. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\log x}$ ii. $\int_a^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$ iii. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{p^2+q^2x^2}$ iv. $\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

   v. $\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$ vi. $\int_0^\infty \cos x\,dx$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ ଗୁଡ଼ିକର ଅଭିସରଣ ପରୀକ୍ଷା କର ଏବଂ ଯଦି ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ତେବେ ଏହାର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

   i. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$ ii. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ iii. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx$ iv. $\int_0^4 \frac{dx}{x(4-x)}$

   v. $\int_0^\pi \frac{dx}{\sin x}$ vi. $\int_0^1 \log x\,dx$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. i. ଅପସାରୀ ii. ଅପସାରୀ iii. ଅଭିସାରୀ, $\frac{\pi}{2pq}$ iv. ଅଭିସାରୀ; $\frac{\pi}{4}$ v. ଅଭିସାରୀ; $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$ vi. ଅପସାରୀ

2. i. ଅଭିସାରୀ; $\frac{8}{3}$ ii. ଅଭିସାରୀ; $\frac{\pi}{3}$ iii. ଅଭିସାରୀ; 2 iv. ଅପସାରୀ v. ଅପସାରୀ

   vi. ଅଭିସାରୀ; -1

1.2.7 ସମାକଳଜ $\int_a^b f(x)\,dx$, $x=a$ ରେ ଅଭିସରଣ ପାଇଁ ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା

1.2.7.1 ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା-I

କଥନ: ଯଦି f ଏବଂ g ଦୁଇ ଗୋଟି ଧନାତ୍ମକ ଫଳନ ଯେପରି $f(x) \le g(x)$, $x \in (a, b]$ ଏବଂ a ଏକମାତ୍ର ଅସୀମ ବିଚ୍ଛିନ୍ନତା ବିନ୍ଦୁ, ତେବେ

i. $\int_a^b g\,dx$ ଅଭିସାରୀ $\Rightarrow$ $\int_a^b f\,dx$ ଅଭିସାରୀ

ii. $\int_a^b f\,dx$ ଅପସାରୀ $\Rightarrow$ $\int_a^b g\,dx$ ଅପସାରୀ

ପ୍ରମାଣ: ଯେହେତୁ $0 < f(x) \le g(x), \forall x \in (a, b]$

$\therefore \quad \int_{a+\varepsilon}^b f\,dx \le \int_{a+\varepsilon}^b g\,dx, \quad 0 < \varepsilon < b-a$ ପାଇଁ ... (1)

i. ମନେକର x = a ରେ, $\int_a^b g\,dx$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ, ତେବେ କୌଣସି ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା M ଅଛି ଯେପରିକି,

$\int_{a+\varepsilon}^b g\,dx < M, \quad 0 < \varepsilon < b-a$ ପାଇଁ ... (2)

ସମୀକରଣ (1) ଏବଂ (2) ରୁ ଆମେ ପାଉ।

$\int_{a+\varepsilon}^b f\,dx < M, \quad 0 < \varepsilon < b-a$ ପାଇଁ

ତେଣୁ $x = a$ ରେ $\int_a^b f\,dx$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ।

ii. ମନେକର $x = a$ ରେ, $\int_a^b f\,dx$ ଅପସାରୀ, $\int_{a+\varepsilon}^b f\,dx$ ଊର୍ଦ୍ଧ ଅପରିବଦ୍ଧ ସମୀକରଣ (1) ରୁ, $\int_{a+\varepsilon}^b g\,dx$ ଊର୍ଦ୍ଧ ଅପରିବଦ୍ଧ ।

(1) ଅନୁଯାୟୀ $\int_a^b g\,dx$ ମଧ୍ୟ ଊର୍ଦ୍ଧ ଅପରିବଦ୍ଧ।

1.2.7.2 ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା II

କଥନ: ଯଦି ଅନ୍ତରାଳ $(a, b]$ ରେ f ଏବଂ g ଦୁଇଟି ଧନାତ୍ମକ ଫଳନ ଏବଂ 'a' ହେଉଛି ଏକମାତ୍ର ଅସୀମ ବିଚ୍ଛିନ୍ନତା ବିନ୍ଦୁ, ଯେପରିକି

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

ତେବେ $\int_a^b f\,dx$ ଏବଂ $\int_a^b g\,dx$ ସମାକଳଜ ଦ୍ୱୟ 'a' ରେ ଅଭିସାରୀ କିମ୍ବା ଅପସାରୀ ହେବେ।

ପ୍ରମାଣ: ଯେହେତୁ ଅନ୍ତରାଳ $(a, b]$ ରେ, f ଏବଂ g ଦୁଇଟି ଧନାତ୍ମକ ଫଳନ ଅଟନ୍ତି, ତେବେ $\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \forall x \in (a, b]$

ତେଣୁ $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \geq 0$

କିନ୍ତୁ $l^1 0$ (ଦତ୍ତ ଅଛି) ତେବେ $l > 0$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଏକ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ε ନିଅ ଯେପରିକି $l - \varepsilon > 0$

ଯେହେତୁ $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

⇒þ a ବିନ୍ଦୁର ଏକ ପ୍ରତିବେଶ ଅନ୍ତରାଳ $(a < c < d)$ ଅଛି ଯେପରିକି

þ $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon, \forall x \in (a, c]$

⇒ $-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - l < \varepsilon, \forall x \in (a, c]$

⇒ $(l - \varepsilon) g(x) < f(x) < (l + \varepsilon) g(x), \forall x \in (a, c]$

ପରିସ୍ଥିତି I: ମନେକର $\int_a^b f\,dx$, a ରେ ଅଭିସରିତ ଅଟେ ।

⇒ $\int_a^c f\,dx$, a ରେ ଅଭିସରିତ ଅଟେ । [$\because a < c < b$ ଏବଂ $\int_c^b f\,dx$ ସଂଗତ ସମାକଳଜ ଅଟେ]

⇒ $(l - \varepsilon) \int_a^c g\,dx$, a ରେ ଅଭିସରିତ ଅଟେ । [ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା I ଦ୍ୱାରା]

⇒ $\int_a^b g\,dx$, a ରେ ଅଭିସରିତ ଅଟେ ।

ପରିସ୍ଥିତି II: ମନେକର $\int_a^b f(x)dx$, a ରେ ଅପସରିତ

⇒ $\int_a^c f(x)dx$, a ରେ ଅପସରିତ ଅଟେ । [$\because a < c < b$ ଏବଂ $\int_c^b f\,dx$ ସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ ଅଟେ]

⇒ $(l + \varepsilon) \int_a^c g\,dx$, a ରେ ଅପସରିତ ଅଟେ । [ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା I ଦ୍ୱାରା]

⇒ $\int_a^b g\,dx$, a ରେ ଅପସରିତ ଅଟେ ।

ସେହିପରି ଏହା ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇପାରେ ଯେ ଯଦି $\int_a^b g\,dx$ 'a' ରେ ଅଭିସରିତ ହୁଏ ତେବେ, $\int_a^b f\,dx$ 'a' ରେ ଅଭିସରିତ ହେବ ଏବଂ ଯଦି $\int_a^b g\,dx$ 'a' ରେ ଅପସରିତ ହୁଏ ତେବେ $\int_a^b f\,dx$ 'a' ରେ ଅପସରିତ ହେବ ।
(ପ୍ରମାଣିତ)

1.2.8 ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଉପପାଦ୍ୟ

i. ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ ଅଭିସାରୀ ହେବ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $n < 1$

ii. ଅସଂଗତ ସମାକଳଜ $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ ଅଭିସାରୀ ହେବ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $n < 1$

ପ୍ରମାଣ:

i. ଦତ୍ତ ସମାକଳଜ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$, ଏକ ସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ ଅଟେ, $n \leq 0$ ପାଇଁ ଏହା ଅଭିସାରୀ ଅଟେ , ଯଦି $n > 0$, ତେବେ ଏହା ଏକ ଅସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ ହେବ ଏବଂ 'a' ଅସୀମ ବିଚ୍ଛିନ୍ନତାର ଏକମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁ ହେବ।

ପରିସ୍ଥିତି I: ଯଦି $n \neq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^n}, 0 < \varepsilon < b-a$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} \right]_{a+\varepsilon}^b$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{1-n} \left[\frac{1}{(b-a)^{n-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(1-n)(b-a)^{n-1}}, & \text{if } n < 1 \\ \infty, & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

$\therefore$ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$, $0 < n < 1$ ପାଇଁ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ଏବଂ $n > 1$.ପାଇଁ ଅପସାରୀ ଅଟେ।

ପରିସ୍ଥିତି II: ଯଦି $n = 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\log|x-a| \right]_{a+\varepsilon}^b$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\log(b-a) - \log \varepsilon \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon} \right) = \infty$$

$\therefore$ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$, $n = 1$ ପାଇଁ ଅପସାରୀ ଅଟେ।

ତେଣୁ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$, $n < 1$ ପାଇଁ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ଏବଂ $n \geq 1$ ପାଇଁ ଅପସାରୀ ଅଟେ।

ii. ଦତ୍ତ ସମାକଳଜ $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$, $n \leq 0$ ପାଇଁ ଏକ ସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ ଅଟେ, ଓ ଏହା ଅଭିସାରୀ ଅଟେ। ଯଦି $n > 0$, ତେବେ ଏହା ଏକ ଅସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ ହେବ ଏବଂ 'b' ଅସୀମ ବିଚ୍ଛିନ୍ନତାର ଏକମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁ ହେବ।

ପରିସ୍ଥିତି I: ଯଦି $n \neq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^n}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{(b-x)^{-n+1}}{-(-n+1)}\right]_a^{b-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{n-1}\left[(b-x)^{-n+1}\right]_a^{b-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{n-1}\left[\varepsilon^{1-n} - (b-a)^{1-n}\right]$$

$$= \begin{cases} \infty & if \quad n > 1 \quad \text{ସସୀମ} \\ \dfrac{1}{(1-n)(b-a)^{n-1}} & if \quad n<1 \end{cases}$$

$\therefore$ $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$, $0 < n < 1$ ପାଇଁ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ଏବଂ $n > 1$. ପାଇଁ ଅପସାରୀ ଅଟେ।

ପରିସ୍ଥିତି II: ଯଦି $n = 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} = \int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{b-x}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\log|b-x|\right]_a^{b-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\log\varepsilon + \log(b-a)\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\log\varepsilon + \log(b-a)\right] \qquad [\because \quad \log|0 = -\infty]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) = \infty$$

$\therefore$ $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$, $n = 1$ ପାଇଁ ଅପସାରୀ ଅଟେ।

ତେଣୁ $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$, $n < 1$ ପାଇଁ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ତଥା $n \geq 1$ ପାଇଁ ଅପସାରୀ ଅଟେ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ: $\int_0^1 \frac{1}{x^n}\, dx$, $n < 1$ ପାଇଁ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ଏବଂ $n \geq 1$ ପାଇଁ ଅପସାରୀ ଅଟେ ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 1.42 ସମାକଳଜ $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}\left(1+x^2\right)}$ ର ଅଭିସରଣ ପରୀକ୍ଷା କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}\left(1+x^2\right)}$

ଏରେ $f(x) = \frac{1}{x^{1/2}\left(1+x^2\right)}$ ଏବଂ $x = 0$, ବିନ୍ଦୁ, $f(x)$ର ଅସୀମ ବିଚ୍ଛିନ୍ନତାର ଏକମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ । $f(x) > 0, x \in (0, 1]$

ମନେକର $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1 \neq 0$ [ଯାହାକି ସୀମିତ ଏବଂ ଅଣଶୂନ୍ୟ]

$\therefore$ ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା ଦ୍ୱାରା

ସମାକଳଜ $\int_0^1 f(x)\, dx$ ଏବଂ $\int_0^1 g(x)\, dx$ ଏକତ୍ର ଅଭିସାରୀ କିମ୍ବା ଅପସାରୀ ହେବେ ।

କିନ୍ତୁ, ସମାକଳଜ $\int_0^1 g(x)\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$, $x = 0$ ପାଇଁ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ $\left[\because n = \frac{1}{2} < 1\right]$

$\therefore$ $\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}\left(1+x^2\right)}$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 1.43 ସମାକଳଜ $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\, dx$ ର ଅଭିସରଣ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କର ।

ସମାଧାନ: ମନେକର $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\, dx$

$f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ ଏବଂ $f(x)$ର $x = 0$ ଅସୀମ ବିଚ୍ଛିନ୍ନତାର ଏକମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ଓ $f(x) > 0, x \in [0, \pi/2]$

ମନେକର $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0$ [ଯାହା ସୀମିତ ଏବଂ ଅଣଶୂନ୍ୟ ଅଟେ]

$\therefore$ ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା ଦ୍ୱାରା $\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx$ ଏବଂ $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ଏକତ୍ର ଅଭିସାରୀ କିମ୍ବା ଅପସାରୀ ହେବେ।

କିନ୍ତୁ, ସମାକଳଜ $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ। $\left[\because n = \frac{1}{2} < 1\right]$

$\therefore \quad \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$, ଅଭିସାରୀ ଅଟେ।

1.2.9 ∞ରେ ଅଭିସରଣ ପାଇଁ ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା

1.2.9.1 ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା I

କଥନ: ଯଦି f ଏବଂ g ଦୁଇ ଧନାତ୍ମକ ଫଳନ ଓ $f(x) \leq g(x)$, (ସମସ୍ତ $x \geq a$ ପାଇଁ) ତେବେ

i. $\int_a^\infty f\,dx$ ଅଭିସାରୀ ଯଦି $\int_a^\infty g\,dx$ ଅଭିସାରୀ।

ii. $\int_a^\infty g\,dx$ ଅପସାରୀ ଯଦି $\int_a^\infty g\,dx$ ଅପସାରୀ।

ପ୍ରମାଣ: ଏରେ f ଏବଂ g ଦୁଇଟି ଧନାତ୍ମକ ଫଳନ ଓ $f(x) \leq g(x)$, ସମସ୍ତ $x \in [a,t]$ ପାଇଁ

$$\therefore \quad \int_a^t f(x)\,dx \leq \int_a^t g(x)\,dx \qquad \ldots (1)$$

i. ମନେକର $\int_a^b g\,dx$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ, ତେବେ ଏକ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା M ଏପରି ଭାବରେ ବିଦ୍ୟମାନ ଯେପରି କି

$$\int_a^t g(x) < M, \forall\, t \geq a \qquad \ldots (2)$$

ସମୀକରଣ (1) ଏବଂ (2)ରୁ, ଆମେ ପାଉ $\int_a^t f(x) < M, \forall\, t \geq a$

ତେଣୁ $\int_a^b f(x)\,dx$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ।

ii. ମନେକର $\int_a^b f(x)\,dx$ ଅପସାରୀ ଅଟେ।

$\int_a^t f(x)\,dx$ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ପରିବଦ୍ଧ ନୁହେଁ ତେଣୁ ସମୀକରଣ (1) ଦ୍ୱାରା, $\int_a^t g(x)\,dx$ ମଧ୍ୟ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ପରିବଦ୍ଧ ହେବ ନାହିଁ

ତେଣୁ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ଅପସାରୀ ଅଟେ।

1.2.9.2 ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା II

ଯଦି f ଏବଂ g, ଅନ୍ତରାଳ $[a,\infty)$ ରେ ଦୁଇଟି ଧନାତ୍ମକ ଫଳନ ଯେପରିକି

(i) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$ [ଯେଉଁରେ l ସୀମିତ ଏବଂ ଅଣଶୂନ୍ୟ]

ତେବେ ଦୁଇଟି ସମାକଳଜ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ଏବଂ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ଏକତ୍ର ଅଭିସାରୀ କିମ୍ବା ଅପସାରୀ ହେବ ।

ପ୍ରମାଣ: ଯେହେତୁ $\frac{f(x)}{g(x)}>0, \forall x\ge a$ ଏବଂ $l\neq 0$ [$\because f(x)$ ଏବଂ $g(x)$ ଧନାତ୍ମକ ଫଳନ ଅଟେ]

$\therefore \quad l>0$

ମନେକର $\varepsilon>0$ ଯେପରି କି $l-\varepsilon>0$

ଯେହେତୁ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$, ତା'ପରେ ଏକ ସଂଖ୍ୟା kର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି ଯେପରିକି

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\varepsilon, \forall x\ge k$$

$$\Rightarrow \quad l-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<l+\varepsilon \ \forall\ x\ge k>a$$

$$\Rightarrow \quad (l-\varepsilon)g(x)<f(x)<(l+\varepsilon)g(x), \forall x\ge k>a$$

ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା I ଦ୍ୱାରା, ଯଦି $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ତେବେ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ମଧ୍ୟ ଅଭିସାରୀ ହେବ ତଥା ଯଦି $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ତେବେ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ମଧ୍ୟ ଅଭିସାରୀ ହେବ ।
ଏହି ପ୍ରକାର ଏରେ ଗୋଟିଏର ଅଭିସାରୀ ହେବାର ଅର୍ଥ ହେଉଛି ଅନ୍ୟଟିର ଅଭିସାରୀ ହେବ ।

ତେଣୁ, ଦୁଇଟି ସମାକଳଜ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ଏବଂ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ଏକା ସାଙ୍ଗେ ଅଭିସାରୀ କିମ୍ବା ଅପସାରୀ ହେବ ।

1.2.10 ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଉପପାଦ୍ୟ

ବିବୃତ୍ତି: ଅସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ $(a>0)$ ଅଭିସାରୀ ହେବ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $n>1$ ଓ $n\le 1$ ପାଇଁ ଅପସାରୀ ହେବ।

ପ୍ରମାଣ:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}=\lim_{t\to\infty}\int_a^t \frac{dx}{x^n}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_a^t, \text{ ଯଦି } n\neq 1$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{1-n}}{1-n} - \frac{a^{1-n}}{1-n}\right], \text{ ଯଦି } n \neq 1$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{a^{1-n}}{1-n}, & \text{(ଯାହା ସୀମିତ ଅଟେ), ଯଦି } n > 1 \\ \infty, & \text{ଯଦି } n < 1 \end{cases}$$

ଯଦି $n = 1$, ଆମେ ପାଉ

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n} = \int_a^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty}\int_a^t \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\log x\right]_a^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\log t - \log a\right]$$

$$= \log\infty - \log a = \infty$$

ତେଣୁ $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $n > 1$ ଓ $n \leq 1$ ପାଇଁ ଅପସାରୀ ଅଟେ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ: $\int_a^\infty \frac{1}{x^n}\,dx$, $n > 1$ ପାଇଁ ଅଭିସାରୀ ($a > 0$) ଓ $n \leq 1$ ପାଇଁ ଅପସାରୀ ଅଟେ ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 1.44 ସମାକଳଜ $\int_1^\infty \frac{x^3}{(1+x)^5}\,dx$ ର ଅଭିସରଣ ପରୀକ୍ଷା କର ।

ସମାଧାନ: ମନେକର $I = \int_1^\infty \frac{x^3}{(1+x)^5}\,dx$

ଏରେ
$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^5} = \frac{x^3}{x^5\left(1+\frac{1}{x}\right)^5}$$

$\Rightarrow$
$$f(x) = \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^5}$$

ପୁନଶ୍ଚ ମନେକର
$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

ତେଣୁ
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^5} = 1 \neq 0,$$

$\therefore$ ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା ଦ୍ୱାରା ସମାକଳଜ $\int_1^\infty f(x)\,dx$ ଏବଂ $\int_1^\infty g(x)\,dx$ ଏକା ସାଙ୍ଗେ ଅଭିସାରୀ କିମ୍ବା ଅପସାରୀ ହେବ।

କିନ୍ତୁ, ସମାକଳଜ $\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ। $[\because n = 2 > 1]$

$\therefore$ ସମାକଳଜ $\int_1^\infty \frac{x^3}{(1+x)^5}\,dx$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ 1.45 ଅସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ $\int_1^\infty x^n\, e^{-x}\,dx$ ର ଅଭିସରଣ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର $I = \int_1^\infty x^n\, e^{-x}\,dx$

ଏଠାରେ $f(x) = x^n\, e^{-x}$

ମନେକର $g(x) = \frac{1}{x^2}$

ତା'ପରେ $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+2}}{e^x} = 0, \forall\, n$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ। $[\because n = 2 > 1]$

$\therefore$ ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା ଦ୍ୱାରା ସମାକଳଜ $\int_1^\infty x^n\, e^{-x}\,dx$ ମଧ୍ୟ ଅଭିସାରୀ ହେବ।

1.2.11 ପରମ ଅଭିସରଣ (Absolute Convergence)

କୌଣସି ଅସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ $\int_a^b f(x)\,dx$ କୁ ପରମ ଅଭିସାରୀ ସମାକଳଜ କୁହାଯିବ ଯଦି ସମାକଳଜ $\int_a^b |f|\,dx$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ 1.46 ସମାକଳଜ $\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$ ର ପରମ ଅଭିସରଣ ପରୀକ୍ଷା କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର $I = \int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$

ଏଠାରେ $f(x) = \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}$

'0'ର ପ୍ରତିବେଶରେ ଫଳନର ସମାନ ଚିହ୍ନ ବିଶିଷ୍ଟ ନୁହେଁ ଏବଂ '0' ଅନ୍ତରାଳ $[0,1]$ରେ f ର ଅସୀମ ବିଚ୍ଛିନ୍ନତାର ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ।

ତେବେ $|f(x)| = \left|\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right| = \frac{|\sin(1/x)|}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$ $\left[\because \left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1\right]$

କିନ୍ତୁ $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $x = 0$ ରେ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ। $\left[\because n = \frac{1}{2} < 1\right]$

$\therefore$ ସମାକଳଜ $\int_0^1 |f|$, $x = 0$ ରେ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ।

ତେଣୁ, ଦତ୍ତ ସମାକଳଜ $\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$ ପରମ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ।

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 1.5

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମାକଳଜଗୁଡ଼ିକର ଅଭିସରଣ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କର:

   i. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}\left(1+x^2\right)}$ ii. $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ iii. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3\left(1+x^2\right)^5}$

2. $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ ର ଅଭିସରଣ ପରୀକ୍ଷା କର।

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମାକଳଜଗୁଡ଼ିକର ଅଭିସରଣ ପରୀକ୍ଷା କର:

   i. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}\left(1-x\right)^{1/3}}$ ii. $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$ iii. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\log x}\,dx$ iv. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମାକଳଗୁଡ଼ିକର ଅଭିସରଣ ପରୀକ୍ଷା କର:

   i. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ ii. $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx$ iii. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x^n\right)}$ iv. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(2+x)}$

   v. $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ [ସଙ୍କେତ: $e^{x^2} > x^2, \forall\, x \in R$]

ଉତ୍ତରମାଳା

1. i. ଅଭିସାରୀ ii. ଅଭିସାରୀ ଯଦି $n > -1$ iii. ଅପସାରୀ
2. ଅଭିସାରୀ
3. i. ଅଭିସାରୀ ii. ଅଭିସାରୀ iii. ଅଭିସାରୀ iv. ଅଭିସାରୀ
4. i. ଅଭିସାରୀ ii. ଅଭିସାରୀ iii. ଅଭିସାରୀ, ଯଦି $n > ½$ iv. ଅଭିସାରୀ v. ଅଭିସାରୀ

ଆକର୍ଷଣୀୟ ତଥ୍ୟ

- ଏହି ଧାରଣାର ଉପଯୋଗ ଔଷଧୀୟ ଅନୁସଂଧାନରେ, ପ୍ଲାଜମା ଔଷଧର ସାନ୍ଦ୍ରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ। ଅର୍ଥାତ୍ (କୋଉ ଔଷଧର ଅଧିକତମ ସାନ୍ଦ୍ରତା ଅଛି ଏବଂ ଏହା କେବେ ହେବ)।
- ଯେକୌଣସି ଔଷଧର 'R'-ମୂଲ୍ୟ, ଯାହା କି ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ପରିମାଣର ଅନୁପାତର ଗଣନା କରିଥାଏ । ଏହି ଧାରଣା ବ୍ୟବହାର କରି ମାପ କରାଯାଏ।
- ସମାକଳଜର ବ୍ୟବହାର କରି ଇଞ୍ଜିନିୟର ମାନେ କୌଣସି ବସ୍ତୁର 'ବସ୍ତୁତ୍ୱ କେନ୍ଦ୍ର' ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିଥାନ୍ତି ।
- କଳନ ଗଣିତରେ ଏକ ଆକର୍ଷଣୀୟ ସଂଯୋଗ ହେଉଛି କି ଅବକଳଜ ଓ ସମାକଳଜ ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ପ୍ରକ୍ରିୟା। ସେମାନେ ପରସ୍ପର ବିପରୀତ ଅଟନ୍ତି ଏବଂ ସେମାନେ କଳନ ଗଣିତର ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ"ର ବ୍ୟବହାର କରି ସଂଯୋଜିତ ହୁଅନ୍ତି।

ଭିଡିଓ ସଂଯୋଗ

ବିଟା ଓ ଗାମା ଫଳନ	ଅସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ -1	ଅସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ -2

ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ

- ପରିସଂଖ୍ୟାନ ଏବଂ ସମ୍ଭାବ୍ୟତାରେ ବ୍ୟବହାର
- କ୍ୱାଣ୍ଟମ୍ ପଦାର୍ଥ ବିଜ୍ଞାନ ଏବଂ ଅର୍ଥଶାସ୍ତ୍ରରେ (ଯାହା ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ବଣ୍ଟନର ଆଧାରିତ) ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ।
- ଏହା ମଧ୍ୟ ହାରାହାରି ପରିବର୍ତ୍ତନ, ଘନଫଳ, ତ୍ରୁଟି ଆକଳନ ଏବଂ ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।
- ଗତିଜ ଉର୍ଜାର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଉଁ ମଧ୍ୟ ଏହି ଧାରଣା ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।

ଇତିହାସ

ଗାଣିତିକ ବିଶ୍ଳେଷଣରେ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଫଳନ ପ୍ରାୟତଃ ଥାଏ । ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଫଳନରେ, ଗାମା ଫଳନ ବ୍ୟାପକ ରୂପରେ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ । ଗାମା ଫଳନ $\Gamma(x)$କୁ ବିଜ୍ଞାନରେ ସଦାସର୍ବଦା ପ୍ରସିଦ୍ଧ କ୍ରମଗୁଣିତ ପ୍ରତୀକ $x!$ ରୂପରେ ବ୍ୟବହୃତ କରାଯାଏ । ଏହାକୁ ପ୍ରଥମେ ପ୍ରସିଦ୍ଧ ଗଣିତଜ୍ଞ ଏଲ୍ ଅଏଲର (L. Euler) (1729) ମସିହାରେ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିଥିଲେ। ବିଟା ଫଳନର ଆଲୋଚନା ସର୍ବପ୍ରଥମେ ଅଏଲର ଏବଂ ଲିଜେଣ୍ଡରକରିଥିଲେ ଏବଂ ଜ୍ୟାକ୍ ବିନେଟଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ନାମିତ ହୋଇଥିଲା ।

1.3 ଗାମା ଓ ବିଟା ଫଳନ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଧର୍ମ

1.3.1 ଗାମା ଫଳନ (Gamma Function)

$n > 0$ ପାଇଁ, ଅସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$ କୁ ଗାମା ଫଳନ (Gamma Function) ରୂପରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଏ ଏବଂ ଏହା $\Gamma(n)$ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ ଓ ଗାମା n ଭାବେ ପଢାଯାଏ । ଏହାକୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରକାରର ଅଏଲ୍‌ରିଆନ୍ ସମାକଳଜ (Eulerian Integral) ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx,\ n > 0 \qquad \ldots (1)$$

ଗାମାଫଳକ ସୀମାଯୁକ୍ତଅବକଳଜର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରେ ।

1.3.1.1 ଗାମା ଫଳନର ଗୁଣଧର୍ମ

a. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\Gamma(n + 1) = n\,\Gamma(n)$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^{(n+1)-1}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx$ [ସମୀକରଣ (1) ରୁ]

$$= \left[-e^{-x}x^n\right]_0^\infty + n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

$$= 0 + n\,\Gamma(n)$$

ତେଣୁ $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$ ... (2)

b. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\Gamma(n) = (n-1)!$, ଯେଉଁରେ n ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ [ସମୀକରଣ (2ରୁ]

$= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$ [ସମୀକରଣ (2ରୁ]

$= (n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2\,\Gamma(2)$ [ସମୀକରଣ (2)ର ବାରମ୍ବାର ବ୍ୟବହାର ଦ୍ୱାରା]

$= (n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1\,\Gamma(1)$

$= (n-1)!\,\Gamma(1) = (n-1)!\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ [ସମୀକରଣ (1) ରୁ]

$= (n-1)!\left[-e^{-x}\right]_0^\infty = (n-1)!(0+1) = (n-1)!$, ଯେଉଁରେ n ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା

ମନ୍ତବ୍ୟ 1: ସୂତ୍ର $\Gamma(n + 1) = n\,\Gamma(n)$ କୁ ଗାମା ଫଳନର ପୁନରାବୃତ୍ତି ସମ୍ପର୍କ କୁହାଯାଏ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ 2: ଧ୍ୟାନ ଦିଅ ଯେ $\Gamma\,\Gamma(1) = 1$, ଗୁଣଧର୍ମ (b)ରୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ।

c. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

ପ୍ରମାଣ: ସମୀକରଣ (1)ରେ, $n = \frac{1}{2}$ ଲେଖିଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{1}{2}-1}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}\,dx \qquad \ldots (3)$$

$x = v^2$ ରଖିବା ପରେ $\Rightarrow$ $dx = 2\,v dv$

ଏବଂ ଆମେ ପାଉ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-v^2}\,dv$ ... (4)

ସମୀକରଣ (4)ରେ, v କୁ u ରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରିବା ପରେ

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du \quad \text{... (5)}$$

ସମୀକରଣ (4) ଏବଂ (5)କୁ ଗୁଣନ କଲେ ଆମେ ପାଉ,

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(u^2+v^2\right)}\,du\,dv$$

ମନେକର $u = r\cos\theta,\ v = r\sin\theta$

ତେଣୁ $u^2 + v^2 = r^2$ ଏବଂ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$ ଏବଂ $du\,dv = r dr d\theta$

$0 \le r \le \infty$ ଏବଂ $0 \le \theta \le \pi/2$

$$\therefore \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta\ \pi \quad = 4\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty d\theta = 2\int_0^{\pi/2} 1.d\theta = \pi$$

ତେଣୁ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ... (6)

d. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\Gamma(0) = \infty$

ପ୍ରମାଣ: ସମୀକରଣ (2)ରୁ, $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$

ଯଦି n→0 = ତେବେ $\Gamma(0) = \lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(0+1)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \infty$

ତେଣୁ $\Gamma(0) = \infty$

ପୁନର୍ବାର ଧ୍ୟାନ ଦିଅଯେ $\Gamma(-1), \Gamma(-2), \Gamma(-3)$ ଆଦି ସଂଜ୍ଞାହୀନ ।

ତେଣୁ ଗାମା ଫଳନ $n > 0$ ପାଇଁ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ $n = 0, -1, -2, \ldots$ ପାଇଁ ବିଚ୍ଛିନ୍ନ।

ତେଣୁ, n = 0 ଓ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣା ସଂଖ୍ୟା ବ୍ୟତୀତ Γ(n) ସମସ୍ତ n ପାଇଁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଅଟେ।

e. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\Gamma(n+1) = (m+1)^{n+1}(-1)^n\int_0^1 x^m(\log x)^n\,dx$

ଯେଉଁରେ n ଏକ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣା ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $m > -1$

ପ୍ରମାଣ: ଏରେ $\int_0^1 x^m(\log x)^n\,dx$ କୁ ବିଚାର କର ।

ମନେକର $x = e^{-y}$ ତେବେ $dx = -e^{-y}\,dy = -x\,dy$

$$\therefore \int_0^1 x^m(\log x)^n\,dx = \int_0^\infty e^{-my}(-y)^n\,e^{-y}\,dy = (-1)^n\int_0^\infty y^n\,e^{-(m+1)y}\,dy$$

ମନେକର $(m+1)y = u$ ତେଣୁ $dy = \frac{du}{m+1}$

$$\therefore \quad \int_0^1 x^m (\log x)^n \, dx = (-1)^n \int_0^\infty \frac{u^n}{(m+1)^n} e^{-u} \cdot \frac{du}{(m+1)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{(n+1)-1} \, du$$

$$\int_0^1 x^m (\log x)^n \, dx = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \Gamma(n+1)$$

[ସମୀକରଣ (1)ରୁ]

ତେଣୁ $$\Gamma(n+1) = (m+1)^{n+1} (-1)^n \int_0^1 x^m (\log x)^n \, dx$$

ଯେଉଁଠାରେ n ଏକ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $m > -1$

ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ସୂତ୍ର: $$\int_0^{\pi/2} \sin^m \theta \cos^n \theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}; m, n > -1$$

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 1.47 $\int_0^\infty x^{1/4} e^{-\sqrt{x}} \, dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ମନେକର $I = \int_0^\infty x^{1/4} e^{-\sqrt{x}} \, dx$

$\sqrt{x} = u$ ରଖିବା ପରେ, $\Rightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2u \, du$

$$\therefore \quad I = \int_0^\infty e^{-u} (u^2)^{1/4} 2u \, du = 2\int_0^\infty e^{-u} u^{3/2} \, du$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{5}{2}-1} \, du = 2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad [\because \Gamma(n+1) = n\Gamma n]$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{\pi}$$ **(ଉତ୍ତର)** $\left[\because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right]$

ଉଦାହରଣ 1.48 $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-h^2 x^2} dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ମନେକର $I = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-h^2 x^2} dx$

$h^2 x^2 = y$ ଲେଖିବା ପରେ, $h^2 2x \, dx = dy$

$$dx = \frac{1}{2}\frac{dy}{h^2\, x} = \frac{1}{2}\frac{dy}{h\sqrt{y}}$$

$\therefore$
$$I = \int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{\sqrt{y}}{h}\right)^{n-1}\frac{1}{2}\frac{dy}{h\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{2h^n}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{\frac{n-2}{2}}\, dy$$

$$= \frac{1}{2h^n}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{\frac{n}{2}-1} dy$$

$$= \frac{1}{2h^n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$ **(ଉତ୍ତର)** [ଗାମା ଫଳନ ସଂଜ୍ଞା]

ଉଦାହରଣ 1.49 $\int_0^\infty x^6 e^{-2x}\, dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ମନେକର $I = \int_0^\infty x^6 e^{-2x}\, dx$

$2x = y$ ରଖିବା ପରେ, $dx = \frac{dy}{2}$

$\therefore$
$$I = \int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{y}{2}\right)^6 \frac{dy}{2} = \frac{1}{2^7}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{7-1}\, dy = \frac{1}{2^7}\Gamma(7)$$

$$I = \frac{1}{2^7}\Gamma(7)$$ **[ଗାମା ଫଳନ ସଂଜ୍ଞା]**

$$= \frac{1}{2^7}(6!) = \frac{45}{8}$$ **(ଉତ୍ତର)** $\left[\because \Gamma(n+1) = n!, n > 0\right]$

ଉଦାହରଣ 1.50 ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\int_a^\infty e^{\left(2ax - x^2\right)}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{a^2}$

ସମାଧାନ: ମନେକର $I = \int_a^\infty e^{\left(2ax - x^2\right)}\, dx = \int_a^\infty e^{a^2 - \left(x^2 - 2ax + a^2\right)} dx$

$x - a = y$ ରଖିବା ପରେ, $\Rightarrow\ dx = dy$

$\therefore$
$$I = e^{a^2}\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy \qquad \text{... (1)}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଗାମା ଫଳନର ସଂଜ୍ଞାକୁ ବ୍ୟବହାର କରି, ଆମେ ପାଉ,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-u}\, u^{n-1}\, du, n > 0$$

$n = \frac{1}{2}$ ଲେଖିବା ପରେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-u}\, u^{-1/2}\, du$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $u = y^2$ ରଖିବା ପରେ $\Rightarrow\ du = 2y\, dy$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-y^2} \left(y^2\right)^{-1/2} . 2y\, dy$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{\pi} = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy \qquad \left[\because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right] \qquad \text{... (2)}$$

$$\Rightarrow \qquad \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ସମୀକରଣ(2)କୁ ବ୍ୟବହାର କଲେ ସମୀକରଣ (1) ହେବ,

$$I = e^{a^2} . \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{a^2}$$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ 1.51 $\int_0^\infty x^{-3/2}\left(1-e^{-x}\right) dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ମନେକର $I = \int_0^\infty x^{-3/2}\left(1-e^{-x}\right) dx$ [ସଂଜ୍ଞାରୁ]

$$= \left[\left(1-e^{-x}\right)\frac{x^{-1/2}}{\left(\frac{-1}{2}\right)}\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\, \frac{x^{-1/2}}{\left(\frac{-1}{2}\right)}\, dx$$

$$= 0 + 2\int_0^\infty e^{-x}\, x^{-1/2}\, dx$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-x}\, x^{\frac{1}{2}-1}\, dx = 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$= 2\sqrt{\pi}$ **(ଉତ୍ତର)**

1.3.2 ବିଟା ଫଳନ (Beta Function)

ବିଟା ଫଳନକୁ $B(m, n)$ରେ ପରିପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ଏବଂ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଏ,

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx \qquad \text{... (1)}$$

ଯେଉଁରେ m, n ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା, କିମ୍ବା ଭଗ୍ନାଂଶ ଅଟେ । ଏହାକୁ ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାରର ଅୟଲରିଆନ୍ ସମାକଳଜ ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

1.3.2.1 ବିଟା ଫଳନର ଗୁଣଧର୍ମ

i. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $B(m,n) = B(n,m)$ [ସମମିତି]

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx$

$$= \int_0^1 (1-x)^{m-1}\left[1-(1-x)\right]^{n-1} dx \qquad \left[\because \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx\right]$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{m-1} x^{n-1}\, dx = \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1}\, dx$$

$$= B(n, m)$$

ତେଣୁ $B(m, n) = B(n, m)$

ii. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\int_0^a x^{m-1} (a-x)^{n-1}\, dx = a^{m+n-1} B(m, n)$

ସମୀକରଣ (1) ରୁ, ଆମେ ପାଉ $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx = B(m, n)$

$x = \frac{y}{a}$ ଲେଖିବା ପରେ, $\Rightarrow dx = \frac{dy}{a}$ ଏବଂ $0 \le y \le a$

$$\int_0^a \left(\frac{y}{a}\right)^{m-1} \left(1-\frac{y}{a}\right)^{n-1} \frac{dy}{a} = B(m, n)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a^{m+n-1}} \int_0^a y^{m-1} (a-y)^{n-1}\, dy = B(m, n)$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^a x^{m-1} (a-x)^{n-1}\, dy = a^{m+n-1} B(m, n)$$

iii. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $B(m, n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx$

ଆମେ ଜାଣୁ $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx$

$x = \frac{1}{y+1}$ ଲେଖିବା ପରେ ଆମେ ପାଉ $dx = -\frac{dy}{(1+y)^2}$ ଏବଂ yର ମୂଲ୍ୟ

¥ ରୁ 0 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ

$$\therefore \quad B(m, n) = \int_\infty^0 \left(\frac{1}{y+1}\right)^{m-1} \left[1-\frac{1}{1+y}\right]^{n-1} \left[-\frac{dy}{(1+y)^2}\right]$$

$$B(m, n) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^{m-1}} \cdot \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{n-1}} \cdot \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$B(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\, dy \qquad \text{... (1)}$$

(ଏହି ସମାକଳଜରେ m ଏବଂ n ଫଳନର ସମଞ୍ଜସ ଆଧାରରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରାଯାଇପାରିବ)

ପୁନର୍ବାର, ସମୀକରଣ (1)କୁ ଏହି ଭାବରେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ,

$$B(m, n) = \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\, dy + \int_1^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\, dy \qquad \text{... (2)}$$

ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱର ଦ୍ୱିତୀୟ ସମାକଳଜକୁ ସମାଧାନ କରିବା ପାଇଁ, $y = \frac{1}{x}$ ଲେଖିଲା ପରେ ଆମେ ପାଉ $dy = -\frac{1}{x^2}\, dx$ ଏବଂ x ର ମୂଲ୍ୟ 1ରୁ 0କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୋଇଥାଏ।

$$\int_1^{\infty}\frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy=\int_1^0\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}\frac{x^{m+n}}{(1+x)^{m+n}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_0^1\frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx \qquad \ldots (3)$$

ସମୀକରଣ (3) କୁ ଉପଯୋଗ କଲେ, (2) ହେବ

$$B(m,n)=\int_0^1\frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy+\int_0^1\frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dy+\int_0^1\frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx \qquad \left[\because \int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(y)\,dy\right]$$

ତେଣୁ $$B(m,n)=\int_0^1\frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

iv. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $$B(m,n)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$$

ଆମେ ଜାଣୁ $$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

$x=\sin^2\theta$ ଲେଖିବାପରେ $\Rightarrow$ $dx=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ ଏବଂ $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $$B(m,n)=\int_0^{\pi/2}(\sin^2\theta)^{m-1}(1-\sin^2\theta)^{n-1}\,2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$$

ତେଣୁ $$B(m,n)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$$

ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପରିସ୍ଥିତି:

ଉପରୋକ୍ତ ଅଭିବ୍ୟକ୍ତିରେ $m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{2}$ ଲେଖିବା ପରେ,

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\pi/2}1.d\theta=2.\frac{\pi}{2}=\pi$$

v. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $$(a-b)^{m+n-1}B(m,n)=\int_a^b(x-b)^{m-1}(a-x)^{n-1}\,dx$$

ଆମେ ଜାଣୁ $$B(m,n)=\int_0^1 y^{m-1}(1-y)^{n-1}\,dy$$

$y=\frac{x-b}{a-b}$ ଲେଖିବା ପରେ, $\Rightarrow$ $dy=\frac{dx}{a-b}$ ଏବଂ $b\le y\le a$

$\therefore$ $$B(m,n)=\int_b^a\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{m-1}\left(1-\frac{x-b}{a-b}\right)^{n-1}\frac{dx}{a-b}$$

$$=\frac{1}{(a-b)^{m+n-1}}\int_b^a(x-b)^{m-1}(a-x)^{n-1}\,dx$$

∴ $$\int_b^a (x-b)^{m-1}(a-x)^{n-1}\,dx = (a-b)^{m+n-1}B(m,n)$$

ତେଣୁ $\int_b^a (x-b)^{m-1}(a-x)^{n-1}\,dx = (a-b)^{m+n-1}B(m,n)$

1.3.3 ବିଟା ଏବଂ ଗାମା ଫଳନ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, m>0, n>0$

ପ୍ରମାଣ: ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ

$$\frac{\Gamma(n)}{z^n} = \int_0^\infty e^{-zy}\,y^{n-1}\,dy \qquad \text{... (1)}$$

କିମ୍ବା $$\Gamma(n) = \int_0^\infty z^n\,e^{-zy}\,y^{n-1}\,dy \qquad \text{... (2)}$$

ସେହିଭଳି $$\Gamma(m) = \int_0^\infty z^m\,e^{-zy}\,y^{m-1}\,dy \qquad \text{... (3)}$$

ସମୀକରଣ(2) ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ $e^{-z}.z^{m-1}$ ଗୁଣନ କରିବା ପରେ, ଆମେ ପାଉ

$$\Gamma(n)\,e^{-z}.z^{m-1} = \int_0^\infty z^{m+n-1}\,e^{-zy}\,y^{n-1}e^{-z}\,dy$$

$$= \int_0^\infty z^{m+n-1}\,e^{-(y+1)z}\,y^{n-1}\,dy$$

z ଭିତ୍ତିକ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ '0' ରୁ ∞ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମାକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$\Gamma(n)\int_0^\infty e^{-z}.z^{m-1}\,dz = \int_0^\infty\left[\int_0^\infty z^{m+n-1}\,e^{-(y+1)z}\,dz\right]y^{n-1}\,dy$$

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = \int_0^\infty \frac{\Gamma(m+n)}{(1+y)^{m+n}}\,y^{n-1}\,dy$$ [ଧର୍ମ (1) ଏବଂ (3) ରୁ]

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \Gamma(m+n)\int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy$$

$= \Gamma(m+n).\,B(m,n)$ [1.3.2 ର (1) ର (iii) ରୁ]

ତେଣୁ $$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (*i*), ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}, 0<n<1$

ପ୍ରମାଣ: ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = B(m,n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy$$

ମନେକର $m+n=1$ ତେଣୁ $m=1-n$

$$\therefore \quad \frac{\Gamma(1-n)\Gamma(n)}{\Gamma(1)} = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{1+y}dy, \ 0<n<1$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(1-n)\Gamma(n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \qquad \left[\because \ \Gamma(1)=1, \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{1+y}dy = \frac{\pi}{\sin n\pi}\right]$$

ଯେଉଁଠାରେ $0<n<1$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (*ii*), ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

ପ୍ରମାଣ: ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\Gamma(1-n)\Gamma(n)=\dfrac{\pi}{\sin n\pi}$

$n=\dfrac{1}{2}$ ଲେଖିବା ପରେ, ଆମେ ପାଉ,

$$\therefore \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (*iii*), ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$\int_0^{\pi/2}\cos^m\theta\sin^n\theta\,d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}, m>-1, n>-1$$

ପ୍ରମାଣ: ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $I=\int_0^{\pi/2}\cos^m\theta\sin^n\theta\,d\theta$

$\sin^2\theta = x$ ଲେଖିବା ପରେ,

$$\Rightarrow \quad 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta=dx$$

$$\Rightarrow \quad d\theta=\frac{dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

ଏବଂ ଯେତେବେଳେ $\theta=0, x=0$ ଏବଂ $\theta=\dfrac{\pi}{2}, x=1$

$$\therefore \quad I=\int_0^1(1-x)^{\frac{m}{2}}.x^{\frac{n}{2}}\frac{dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{n-1}{2}}.(1-x)^{\frac{m-1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{n+1}{2}-1}(1-x)^{\frac{m+1}{2}-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \qquad [\because B(n,m) = B(m,n)]$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)} \qquad \left[\because B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\right]$$

ତେଣୁ $$\int_0^{\pi/2}\cos^m\theta\sin^n\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}, m>-1, n>-1$$

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 1.52 ସମାକଳଜ $\int_0^1 x^4(1-\sqrt{x})^5\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର $\sqrt{x} = y \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow dx = 2y\,dy$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମାକଳଜ =

$$\int_0^1 y^8(1-y)^5 .2y\,dy = 2\int_0^1 y^{10-1}(1-y)^{6-1}\,dy$$

$$= 2\,B(10,6) = 2\frac{\Gamma(10)\Gamma(6)}{\Gamma(16)} = \frac{2.9!5!}{15!} = \frac{1}{15015}$$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 1.53 $\int_0^1 (1-x^3)^{-1/2}\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର $x^3 = y \Rightarrow x = y^{1/3} \Rightarrow dx = \frac{1}{3}y^{-2/3}\,dy$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମାକଳଜ $\int_0^1 (1-x^3)^{-1/2}dx = \int_0^1 (1-y)^{-1/2}.\frac{1}{3}y^{-2/3}$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 y^{\frac{1}{3}-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\,dy$$

$$= \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}$$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 1.54 ସମାକଳଜ $\int_0^1 y^m\left(1-y^p\right)^n\,dy$ କୁ ବିଟା ଫଳନରେ ପ୍ରକାଶ କର ଏବଂ ସମାକଳଜ $\int_0^1 y^5\left(1-y^3\right)^{10}\,dy$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର $y^p = z \quad \Rightarrow y = z^{1/p} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{1}{p} z^{\frac{1}{p}-1} dz$

$$\therefore \qquad \int_0^1 y^m\left(1-y^p\right)^n\,dy = \int_0^1 z^{\frac{m}{p}}\left(1-z\right)^n.\frac{1}{p}z^{\frac{1}{p}-1}\,dz$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^1 z^{\frac{m+1}{p}-1}\left(1-z\right)^{\overline{n+1}-1}\,dz = \frac{1}{p}B\left(\frac{m+1}{p}, n+1\right)$$

ସମୀକରଣରେ (1)ରେ, $m=5,\ p=3,\ n=10$ ଲେଖିବା ପରେ, ଆମେ ପାଉ,

$$\int_0^1 y^5\left(1-y^3\right)^{10}\,dy = \frac{1}{3}B(2,11)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\Gamma(2)\Gamma(11)}{\Gamma(13)} = \frac{1}{3}.\frac{1.\Gamma(1)\Gamma(11)}{12.11.\Gamma(11)}$$

$$= \frac{1}{3\times12\times11} \qquad \left[\because \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)\right]$$

$$= \frac{1}{396}$$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 1.55 $\int_0^\infty \frac{x^8\left(1-x^6\right)}{\left(1+x\right)^{24}}\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର

$$I = \int_0^\infty \frac{x^8\left(1-x^6\right)}{\left(1+x\right)^{24}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^8}{\left(1+x\right)^{24}}\,dx - \int_0^\infty \frac{x^{14}}{\left(1+x\right)^{24}}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{9-1}}{\left(1+x\right)^{9+15}}\,dx - \int_0^\infty \frac{x^{15-1}}{\left(1+x\right)^{15+9}}\,dx$$

$$= B(9,15) - B(15,9)$$

$$= 0 \qquad \left[\because B(m,n) = B(n,m)\right]$$

ଉଦାହରଣ 1.56 ପ୍ରମାଣ କର ଯେ। $\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{\sin^2\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}d\theta = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\sqrt{\pi}}$

ସମାଧାନ: ମନେକର $I = \int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{\sin^2\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}d\theta = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}$$

$\cos\theta = t$ ଲେଖିବା ପରେ, $\Rightarrow -\sin d\theta = dt \Rightarrow d\theta = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$\therefore \quad I = -\sqrt{2}\int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\,.\,\sqrt{1-t^2}} = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

ପୁନର୍ବାର $t^2 = \sin\theta$ ଲେଖିବା ପରେ, $\Rightarrow 2t\,dt = \cos\theta\,d\theta$

$$I = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta\,d\theta}{2\sqrt{\sin\theta}\,.\,\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \sin^{-1/2}\cos^0\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \qquad \ldots (1)$$

ଯେହେତୁ $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) = \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}$

ସମୀକରଣ(1)ରୁ ଆମେ ପାଉ

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.\sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{2}} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\sqrt{\pi}}$$ **ପ୍ରମାଣିତ**

ଉଦାହରଣ 1.57 $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6}\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର $\quad I = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^6}\,dx$

$x^6 = y$ ଲେଖିବା ପରେ, $\quad \Rightarrow x = y^{1/6} \Rightarrow dx = \frac{1}{6}y^{-5/6}\,dy$

$$\therefore \quad I = \int_0^\infty \frac{y^{1/6}}{(1+y)}.\frac{1}{6}y^{-5/6}\,dy = \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{y^{-2/3}}{1+y}\,dy$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{3}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}\,dy = \frac{1}{6}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{6}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$= \frac{1}{6}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} \qquad \left[\because \Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}, \Gamma(1) = 1\right]$$

$$= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

ଉଦାହରଣ 1.58 ପ୍ରମାଣ କର ଯେ । $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin\theta}\,d\theta \times \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = \pi$

ସମାଧାନ: ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\cos^0\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \qquad \text{... (1)}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, ମନେକର $I = \int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin\theta}\,d\theta \times \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}$

$$= \int_0^{\pi/2}\sin^{1/2}\theta\cos^0\theta\,d\theta \times \int_0^{\pi/2}\sin^{-1/2}\theta\cos^0\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$= \frac{\pi\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\pi\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4.\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = \pi \qquad \text{[ସମୀକରଣ (1) ରୁ]}$$

$[\because \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)]$ ପ୍ରମାଣିତ

ଉଦାହରଣ 1.59 ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^4\right)^3}dx = \frac{5\pi\sqrt{2}}{128}$

ସମାଧାନ : $x = \sqrt{\tan\theta}$ ଲେଖିବା ପରେ, $\Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{\tan\theta}}.\sec^2\theta\,d\theta$

$$\therefore \int_0^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^4\right)}dx = \int_0^{\pi/2}\frac{\tan\theta.\frac{1}{2}(\tan\theta)^{-1/2}\sec^2\theta}{\left(1+\tan^2\theta\right)^3}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\tan\theta)^{1/2}(\sec\theta)^{-4}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^{1/2}\theta\cos^{7/2}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{2!}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).\frac{5}{4}.\frac{1}{4}.\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{5}{128}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{128}.\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{5\pi\sqrt{2}}{128}$$

ପ୍ରମାଣିତ

ଉଦାହରଣ 1.60 $\int_0^\infty e^{-x^{1/3}} dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $x^{1/3} = y$ ଲେଖିବା ପରେ, $\Rightarrow x = y^3 \quad \Rightarrow dx = 3y^2\ dy$

$$\therefore \quad \int_0^\infty e^{-x^{1/3}} dx = \int_0^\infty e^{-y}.3y^2 dy$$

$$= 3\int_0^\infty e^{-y} y^{3-1} dy = 3\Gamma(3) = 3.2! = 6$$ **(ଉତ୍ତର)**

1.3.4 ଅନୁରୂପ ସୂତ୍ର (Duplication Formula)

ଦର୍ଶାଅ ଯେ : $\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p),\ p > 0$

ପ୍ରମାଣ: ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m\theta \cos^n\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)} \qquad \ldots (1)$$

ସମୀକରଣ(1) ରେ $n = m$ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନା କଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$\frac{\left[\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\right]^2}{2\Gamma(m+1)} = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta\cos\theta)^m\ d\theta$$

$$= \frac{1}{2^m}\int_0^{\pi/2} (2\sin\theta\cos\theta)^m\ d\theta = \frac{1}{2^m}\int_0^{\pi/2} (\sin 2\theta)^m\ d\theta$$

ପୁନର୍ବାର ମନେକର $2\theta = \phi \Rightarrow d\theta = \frac{d\phi}{2}$, ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{\left[\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\right]^2}{2\Gamma(m+1)} = \frac{1}{2^m}\int_0^{\pi} \sin^m\phi \frac{d\phi}{2}$$

$$= \frac{1}{2^m}\int_0^{\pi/2} \sin^m\phi \cos^0\phi \frac{d\phi}{2} \quad \left[\because \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,\ f(2a-x) = f(x)\right]$$

$$= \frac{1}{2^m}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}$$ [ସମୀକରଣ (1) ରୁ]

$$\Rightarrow \qquad \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^m}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}$$

ମନେକର $\frac{m+1}{2}=p \Rightarrow m=2p-1,$ ଯେଉଁରେ $p>0$

$$\therefore \quad \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p), \quad \text{ଯେଉଁରେ } p>0$$

ଏହା ଅନୁରୂପ ସୂତ୍ର ଅଟେ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (i) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ m ର ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ

$$2^m\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)$$

ପ୍ରମାଣ: ଅନୁରୂପ ସୂତ୍ରରେ $2p-1=m,$ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନା କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^m}\Gamma(m+1)$$

$$\Rightarrow \quad 2^m\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)$$

(ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (*ii*) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m)!}{2^m.m!}\sqrt{\pi}, \quad \text{ଯେଉଁରେ m>0}$$

ପ୍ରମାଣ: ଆମେ ଜାଣୁ

$$\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m)}=\frac{(2m-1)!}{(m-1)!}=\frac{2m.(2m-1)!}{2m.(m-1)!}=\frac{(2m)!}{2.m!} \quad \ldots (1)$$

ଅନୁରୂପ ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରିବା ପରେ, ଆମେ ପାଉ,

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m)}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\frac{(2m)!}{2.m!} \quad \text{[ସମୀକରଣ (1) ରୁ]}$$

$$=\frac{(2m)!}{2^m.m!}\sqrt{\pi}$$

(ପ୍ରମାଣିତ)

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 1.61 ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $B(n, n) = 2^{1-2n} B\left(n, \frac{1}{2}\right)$

ସମାଧାନ: ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $$B\left(n, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(n)\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}\Gamma(2n)2^{1-2n}} \qquad \text{[ଅନୁରୂପ ସୂତ୍ରରୁ]}$$

$$= \frac{B(n, n)}{2^{1-2n}}$$

$$\Rightarrow \qquad B(n, n) = 2^{1-2n} B\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

ଉଦାହରଣ 1.62 ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2$

ସମାଧାନ : ଅନୁରୂପ ସୂତ୍ରରୁ ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ

$$\Gamma(m)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2m)$$

$m = \frac{1}{6}$ ନେଲେ ଆମେ ପାଇବା, $$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{-2/3}}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{-2/3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \qquad \text{... (1)}$$

ଆମେ ମଧ୍ୟ ଜାଣୁ,

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

$n = \frac{1}{3}$ ନେଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \qquad \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \qquad \text{... (2)}$$

(2) ର ମୂଲ୍ୟ(1) ରେ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନା କଲେ,

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{-2/3}} \cdot \frac{\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2 \qquad \textbf{(ପ୍ରମାଣିତ)}$$

ଉଦାହରଣ 1.63 ବିଟା-ଗାମା ଫଳନର ବ୍ୟବହାର କରି ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx = 1$

ସମାଧାନ : ମନେକର $I = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx = 2\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$

$\frac{\pi x^2}{2} = y$ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ $\Rightarrow\ x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, y^{1/2}$

$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) y^{-1/2}\, dy$$

$$\therefore \qquad I = 2.\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} y^{-1/2} \cos y\, dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} y^{-1/2} \cos y\, dy$$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} y^{-1/2} e^{-iy}\, dy$ ର ବାସ୍ତବ ଅଂଶ $\qquad \left[\because e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta\right]$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-iy}\, dy$ ର ବାସ୍ତବ ଅଂଶ

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{e^{i\pi/2}}}$ ର ବାସ୍ତବ ଅଂଶ $\qquad \left[\because \int_0^{\infty} e^{-kx} x^{n-1}\, dx = \frac{\Gamma(n)}{k^n}\right]$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}}$ ର ବାସ୍ତବ ଅଂଶ $\qquad \left[\because i = e^{i\pi/2}\right]$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}$ ର ବାସ୍ତବ ଅଂଶ

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}$ ର ବାସ୍ତବ ଅଂଶ $\qquad$ [ଡି- ମୋଭରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ଦ୍ୱାରା]

$= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,.\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$ **(ପ୍ରମାଣିତ)**

ଉଦାହରଣ 1.64 ବିଟା-ଗାମା ଫଳନକୁ ବ୍ୟବହାର କରି $\int_0^{\infty} \cos\left(\lambda^2 x^2\right) dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $\qquad I = \int_0^{\infty} \cos\left(\lambda^2 x^2\right) dx$

$x^2 = z$ ରଖିଲା ପରେ,

$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}\, dz$$

$\therefore \qquad I = \int_0^\infty \cos\left(\lambda^2 z\right)\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{1}{2}\int_0^\infty z^{\frac{1}{2}-1}\cos\lambda^2 z\,dz$

$= \frac{1}{2}\int_0^\infty z^{\frac{1}{2}-1}e^{-i\lambda^2 z}\,dz$ ର ବାସ୍ତବ ଅଂଶ

$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(i\lambda^2\right)^{1/2}}$ ର ବାସ୍ତବ ଅଂଶ $\qquad \left[\because \int_0^\infty e^{-kx}x^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(n)}{k^n}\right]$

$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda\left(e^{i\pi/2}\right)^{1/2}}$ ର ବାସ୍ତବ ଅଂଶ $\qquad \left[\because i = e^{i\pi/2}\right]$

$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}$ ର ବାସ୍ତବ ଅଂଶ

$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ର ବାସ୍ତବ ଅଂଶ $\qquad$ [ଡ଼ି- ମୋଭରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ]

$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ **ପ୍ରମାଣିତ**

ଉଦାହରଣ 1.65 ବିଟା-ଗାମା ଫଳନ ବ୍ୟବହାର କରି $\int_0^1 \log\Gamma(y)\,dy$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : ମନେକର $\quad I = \int_0^1 \log\Gamma(y)\,dy \qquad \ldots (1)$

କିମ୍ବା $\qquad I = \int_0^1 \log\Gamma(1-y)\,dy \qquad \ldots (2)$

ସମୀକରଣ (1) ଏବଂ (2)କୁ ଯୋଗକଲେ

$2I = \int_0^1\left[\log\Gamma(y)+\log\Gamma(1-y)\right]dy$

$= \int_0^1 \log\left[\Gamma(y)\Gamma(1-y)\right]dy$

$= \int_0^1 \log\left(\frac{\pi}{\sin\pi y}\right)dy \qquad \left[\because \Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}\right]$

$= \int_0^1\left[\log\pi - \log\sin\pi y\right]dy$

$= \log\pi\left[y\right]_0^1 - \int_0^\pi \log\sin z.\frac{1}{\pi}\,dz \qquad$ [ଦ୍ୱିତୀୟ ସମାକଳଜରେ $\pi y = z$ ଲେଖିବା ପରେ]

$= \log\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log\sin z\,dz \qquad \left[\because \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,\ f(2a-x) = f(x)\right]$

$= \log\pi - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\log 2\right) \qquad \left[\because \int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2\right]$

$$= \log\pi + \log 2 = \log 2\pi$$ [ଉଦାହରଣ 1.31 ରୁ]

$$I = \frac{1}{2}\log 2\pi$$

ଉଦାହରଣ 1.66 ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\Gamma\left(\frac{3}{2}-m\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right) = \left(\frac{1}{4}-m^3\right)\pi\sec\pi m$, ଯେତେବେଳେ $-1 < 2m < 1$

ସମାଧାନ : $L.H.S. = \Gamma\left(\frac{3}{2}-m\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)$

$$= \left(\frac{1}{2}-m\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\right].\left(\frac{1}{2}+m\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{4}-m^2\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right) = \left(\frac{1}{4}-m^2\right)\Gamma\left(\frac{1-2m}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1-2m}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}-m^2\right)\left[\frac{\pi}{\sin\left(\frac{1-2m}{2}\right)\pi}\right] = \left(\frac{1}{4}-m^2\right)\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi m\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{4}-m^2\right)\frac{\pi}{\cos\pi m} = \left(\frac{1}{4}-m^2\right)\pi\sec\pi m$$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ 1.67 ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\int_0^{\pi/2}\tan^n\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2}, -1<n<1$

ସମାଧାନ: ମନେକର $I = \int_0^{\pi/2}\tan^n\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\cos^{-n}\theta\, d\theta$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\cos\frac{n\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2}$$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 1.6

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମାକଳଜ ଗୁଡ଼ିକର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

a. $\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x^3}\, dx$

b. $\int_0^\infty \left(8-x^3\right)^{-1/3} dx$

c. $\int_0^\infty e^{-x^2} x^{-1/2} dx \int_0^\infty x^2\, e^{-x^4}\, dx$

d. $\int_0^\infty x^6 e^{-2x}\, dx$

e. $\int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{\sqrt{t}} dt$

f. $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6} dx$

g. $\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{3t-t^2}}$

h. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{-\log t}}$

2. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\int_0^1 t^m (\log t)^n dt = \frac{(-1)^n .n!}{(m+1)^{n+1}}$, ଯେଉଁରେ n ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣାଙ୍କ ଅଟେ ଏବଂ $m > -1$

3. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(a+bt)^{m+n}} dt = \frac{B(m,n)}{a^n b^m}$ ଯେଉଁରେ m, n, a ଏବଂ b ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣାଙ୍କ ଅଟେ।

4. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\int_0^\pi \sqrt{\frac{\sin\theta}{(5+3\cos\theta)^n}}\, d\theta = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2}{2\sqrt{2\pi}}$

5. ସମାକଳଜ ଗୁଡ଼ିକର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କର।

i $\int_0^1 \frac{dx}{\left(1-x^n\right)^{1/n}}$ ii. $\int_0^1 x^m \left(1-x^m\right)^p dx$ iii. $\int_0^1 \frac{dt}{\left(1-t^n\right)^{1/2}}$ iv. $\int_0^\infty x^m\, e^{-ax^n}\, dx$

6. ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର i. $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$ ii. $\Gamma\left(-\frac{15}{2}\right)$

7. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମାକଳଜ ଗୁଡ଼ିକର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

i. $\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\, dx$ ii. $\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+ax)(1-x)^m}\,\mathrm{dx}$ iii. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx \times \int_0^{\pi/2} \sin^{q+1} dx$

8. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $1.3.5...(2m-1) = \frac{2^m\, \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$

9. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cot\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$

10. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{\tan\theta} + \sqrt{\sec\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. a. $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ b. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ c. $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ d. $\frac{45}{8}$

   e. $\sqrt{\frac{\pi}{p}}, p > 0$ f. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ g. π h. $\sqrt{\pi}$

5. i. $\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$ ii. $\frac{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{n\Gamma\left(p+1+\frac{m+1}{n}\right)}$ iii. $\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}$ iv. $\frac{1}{n\,a^{(m+1)/n}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$

6. i. $-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$ ii. $\frac{2^8\sqrt{\pi}}{1.3.5.7...15}$

7. i. $\frac{\left[\Gamma(1/4)\right]^2}{6\sqrt{2\pi}}$ ii. $\frac{1}{(1+a)^m}\cdot\frac{\pi}{\sin m\pi}$ iii. $\frac{\pi}{2(q+1)}$

ଆକର୍ଷଣୀୟ ତଥ୍ୟ

ଫେନମାନ (Feynman) ଚିତ୍ରରୁ (ଯେଉଁଥିରେ ଉପ-ପରମାଣୁ କଣିକାଗୁଡିକର ସଚିତ୍ର ପ୍ରସ୍ତୁତିକରଣ ହୁଏ), ମ୍ୟାକ୍ସୱେଲ-ବୋଲଜମାନ (Maxcwell-Boltzman) ପରିସଂଖ୍ୟାନ ଏବଂ ବିତରଣ (ଅଣୁର ଗତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ପଦାର୍ଥ ବିଜ୍ଞାନ, ରସାୟନ ବିଜ୍ଞାନ ଏବଂ ପରିସଂଖ୍ୟାନ ଯାନ୍ତ୍ରିକରେ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ), ଏହି କାର୍ଯ୍ୟଗୁଡିକରେ କିଛି ବାସ୍ତବିକ ପ୍ରୟୋଗକୁ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ କରାଯାଇଥାଏ।

ଭିଡିଓ ସଂଯୋଗ (ଉତ୍ସ: NPTEL)

ବିଟା ଏବଂ ଗାମା ଫଳନ

ICTର ବ୍ୟବହାର

https://youtu.be/9_m36W3cK74

https://youtu.be/3Co68ALYRTI

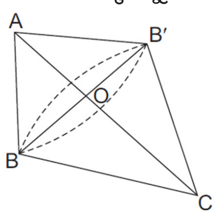
ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ

- ଶକ୍ତିଶାଳୀ ପରମାଣୁ ବାହିନୀରେ ଏହାର ଅନେକ ପ୍ରୟୋଗ ଅଛି।
- ଯେତେବେଳେ ଆମେ ସମୟ ପରିଚାଳନା ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନ କରୁ, ସେତେବେଳେ ବିଟା ବଣ୍ଟନର ବ୍ୟବହାର ହୁଏ।
- ଗାମା ଫଳନ ସମୟ-ଆଧାରିତ ଘଟଣାଗୁଡିକର ସମାଧାନ କରବା ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ, ଯେପରିକି ଯେକୌଣସି ବସ୍ତୁର ଜୀବନ କାଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା।
- ପ୍ୟାକିଂ ସମସ୍ୟାରେ ଯେପରି, ଏକ ଘନକୁ ଏକ ଗୋଲକରେ କିମ୍ବା ଏକ ଗୋଲକକୁ ଘନରେ ସଠିକ ଭାବରେ ରଖାଯାଇ ପାରିବ ସେଥିରେ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ।

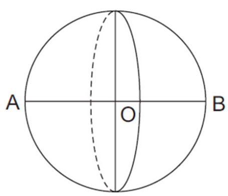
1.4 ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା

ଏକ ସମତଳ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଏହାର ସମତଳରେ ଥିବା ସରଳରେଖାର ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରାଗଲେ ଏକ ପୃଷ୍ଠତଳ ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ। ପୃଷ୍ଠତଳ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ ଘନକୁ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଘନ କୁହାଯାଏ ଓ ପୃଷ୍ଠତଳକୁ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ପୃଷ୍ଠତଳ କୁହାଯାଏ ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଚିତ୍ର ମାନଙ୍କରେ କେତେ ଗୋଟି ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ପୃଷ୍ଠତଳ ଓ ଘନ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହୋଇଛି।

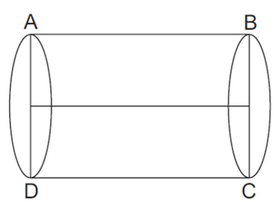
1. ଯଦି ଏ ସମକୋଣୀ Δ କୁ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରାଯାଏ, ତେବେ ପରସ୍ପର ସହ ଯୋଡ଼ି ହୋଇ ଥିବା ଦୁଇଟି କିନ୍ ରୂପକ ଘନ ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ।
2. ଯଦି ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ଏହାର ବ୍ୟାସର ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରାଯାଏ ଗୋଟିଏ ଗୋଲକର ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ।



ଚିତ୍ର 1.17



ଚିତ୍ର 1.18

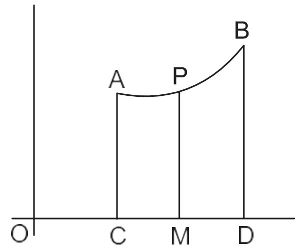


ଚିତ୍ର 1.19

3. ଯଦି ଏକ ବର୍ଗ ଚିତ୍ରକୁ ଏହାର ଯେ କୌଣସି ବାହୁର ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରାଯାଏ ଗୋଟିଏ ସିଲିଣ୍ଡର ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଥାଏ।

1.4.1 ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଘନର ଘନଫଳ

1.4.1.1 କାର୍ଟେଜୀୟ ରୂପରେ ଦତ୍ତ ବକ୍ର



ଚିତ୍ର 1.20

1. ***x*-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ:** $y = f(x)$ ବକ୍ର, x-ଅକ୍ଷ, $x = a$, $x = b$ କୋଟୀ ଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା xy- ସମତଳରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରକୁ x-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ $\int_a^b \pi y^2\, dx$ ।
2. ***y*-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ:** $x = f(y)$ ବକ୍ର, y-ଅକ୍ଷ ଓ $y = a$, $y = b$ ଭୂଜ ଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ xy ସମତଳରେ କ୍ଷେତ୍ରର y-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ $\int_a^b \pi x^2\, dy$ ।
3. **ଯେକୌଣସି ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ:** ଏକ ବକ୍ର AB, ର CD ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ବକ୍ର AB, CD ଅକ୍ଷ ଓ CD ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ AC ଓ BD ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ର ଯେଉଁ ଘନ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ ତାହାର ଘନ ଫଳ $= \int_{OC}^{OD} \pi (PM)^2\, d(OM)$ ଯେଉଁରେ CD ଉପରିସ୍ଥ O ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିନ୍ଦୁ ବକ୍ର ଉପରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁ P ରୁ CD ପ୍ରତି ଲମ୍ବ।

1.4.1.2 ପାରାମେଟ୍ରିୟ ରୂପର ବକ୍ର:

1. $x = f(t)$, ଓ $y = \varphi(t)$, ବକ୍ର, x-ଅକ୍ଷ ଓ $t = a$, $t = b$ ପାଇଁ କୋଟୀ ଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର x-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ $= \int_a^b \pi x^2 \frac{dy}{dt}\, dt$
2. $x = f(t)$, ଓ $y = \varphi(t)$, ବକ୍ର, y- ଅକ୍ଷ ଓ ଭୂଜ $t = a$, $t = b$ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର y-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ $\int_a^b \pi y^2 \frac{dx}{dt}\, dt$
3. **ଦୁଇ ବକ୍ର ଅନ୍ତର୍ଗତ ଏକ କ୍ଷେତ୍ରର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ:**

   ଦୁଇଗୋଟି ବକ୍ର $y = f_1(x)$ ଓ $y = f_2(x)$ ଓ କୋଟୀ $x = a$, $x = b$ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର x-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ $\int_a^b \pi\left[f_1^2(x) - f_2^2(x)\right] dx$ ।

1.4.1.3 ପୋଲାର ବକ୍ର ପାଇଁ

ଏକ ପୋଲାର ବକ୍ର $r = f(\theta)$ ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଭେକ୍ଟର $\theta = \alpha$, ଓ $\theta = \beta$ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ

1. ମୂଳ ଅକ୍ଷ OX ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ $\int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta\, d\theta$,
2. OY ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ $\int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi r^3 \cos\theta\, d\theta$

1.4.2 ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଘନର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

1.4.2.1 କାର୍ଟେଜୀୟ ବକ୍ର ପାଇଁ

ବକ୍ର ରେଖା $y = f(x)$, x-ଅକ୍ଷ ଓ କୋଟୀ $x = a$, $x = b$ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର x-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ବକ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $\int_a^b 2\pi y \frac{ds}{dx} dx$ ଯେଉଁରେ $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

1.4.2.2 ପାରାମେଟ୍ରିୟ ରୂପ ପାଇଁ

$x = f(t)$, $y = \phi(t)$, ବକ୍ର, x- ଅକ୍ଷ ଓ କୋଟୀ $t = a$, $t = b$ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର x-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ବକ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\int_a^b 2\pi y \frac{ds}{dt} dt$, ଯେଉଁରେ $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

1.4.2.3 ପୋଲାର ରୂପ ପାଇଁ

$r = f(\theta)$ ବକ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଭେକ୍ଟର $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର ମୂଳ ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ବକ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ =

$\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} 2\pi y \frac{ds}{d\theta} d\theta$ ଯେଉଁରେ $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$ ଏବଂ $y = r\sin\theta$

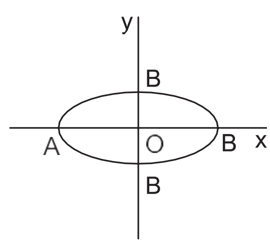
କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 1.68. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ଏଲିପ୍ସକୁ ଏହାର ଦୀର୍ଘ ଅକ୍ଷଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନବସ୍ତୁର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଏଲିପ୍ସର ସମୀକରଣ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1-\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$$



ଚିତ୍ର *1.21*

ଏଲିପ୍ସ y-ଅକ୍ଷ ଭିତ୍ତିକ ସମଞ୍ଜସ ଅଟେ।

$\therefore$ x-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନବସ୍ତୁର ଘନଫଳ

$$= 2\int_0^a \pi y^2\, dx = 2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right) dx$$
$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a \left(a^2 - x^2\right) dx = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

ଉଦାହରଣ 1.69. ଲିମାକନ୍ $r = a + b\cos\theta$, $a > b$କୁ ମୂଳଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନବସ୍ତୁର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

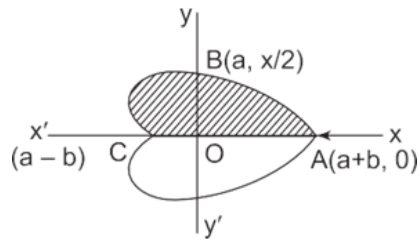
ସମାଧାନ: ଆମେ କେବଳ ରେଖାଙ୍କିତ ଅଞ୍ଚଳକୁ ମୂଳଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରିବା। ତେବେ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ଘନଫଳ

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}(a + b\cos\theta)^2 \sin\theta\, d\theta$$

$a+b\cos\theta = t$ ରଖିବା ପରେ, $\Rightarrow b\sin\theta\, d\theta = -dt$

$$= \frac{2}{3}\pi\int_{a+b}^{a-b} t^2\left(-\frac{dt}{b}\right)$$
$$= -\frac{2}{3}\frac{\pi}{b}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{a+b}^{a-b} = -\frac{2\pi}{3b}\left[\frac{-6a^2b - 2b^3}{3}\right]$$
$$= \frac{4}{9}\pi\left(b^2 + 3a^2\right)$$

(ଉତ୍ତର)



ଚିତ୍ର 1.22

ଉଦାହରଣ 1.70. $(a - x)\, y^2 = (a + x)\, x^2$ ବକ୍ରର ଗୋଟିଏ ଲୁପକୁ x-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନ ବସ୍ତୁର ଘନ ଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

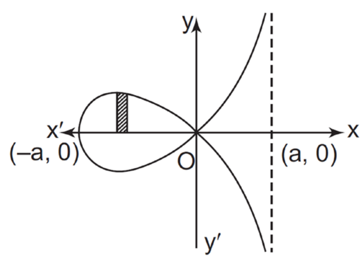
ସମାଧାନ: ବକ୍ରର ଆକାର ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ବକ୍ରଟି x-ଅକ୍ଷ ଭିତ୍ତିକ ସମଞ୍ଜସ ।

$\therefore$ ଆବଶ୍ୟକ ଘନଫଳ $V = \int_{-a}^{0} \pi y^2\, dx = \int_{-a}^{0} \pi\frac{(a+x)}{(a-x)}x^2\, dx$

ମନେକର $a - x = z, dx = -dz$ ଯେତେବେଳେ $x = -a$, ତା'ପରେ $z = 2a$

ଏବଂ $x = 0$ ତା'ପରେ $z = a$

$$\therefore V = \pi\int_{2a}^{a}\frac{(a+a-z)}{z}(a-z)^2(-dz) = \pi\int_a^{2a}\frac{2a-z}{z}(a-z)^2 dz$$
$$= \pi\int_a^{2a}\frac{2a-z}{z}\left(a^2+z^2-2az\right) dz$$
$$= \pi\int_a^{2a}\left[\frac{2a^3}{z}+2az-4a^2-a^2-z^2+2az\right] dz$$
$$= \pi\int_a^{2a}\left[\frac{2a^3}{z}+4az-z^2-5a^2\right] dz = \pi\left[2a^3\log z+2az^2-\frac{z^3}{3}-5a^2 z\right]_a^{2a}$$



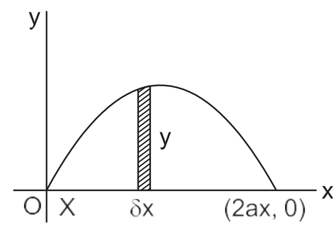
ଚିତ୍ର 1.23

$$= \pi\left[\left\{2a^3\log 2a + 2a(2a)^2 - \frac{(2a)^3}{3} - 5a^2(2a)\right\} - \left\{2a^3\log a + 2a^3 - \frac{a^3}{3} - 5a^3\right\}\right]$$

$$= 2\pi a^3\left[\log 2 - \frac{2}{3}\right] \quad \textbf{(ଉତ୍ତର)}$$

ଉଦାହରଣ 1.71. ସାଇକ୍ଲୋଇଡ $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ କୁ x-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୁରାଇଲେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କ୍ଷେତ୍ର ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁରେ $0 \le \theta \le 2\pi$।

ସମାଧାନ: ମନେକର ବକ୍ରର ତଳେ ଥିବା ଓ x - ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ କ୍ଷେତ୍ରକୁ x ଖଣ୍ଡରେ ବିଭକ୍ତ କରାଗଲା ଯେଉଁରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଖଣ୍ଡ x-ଅକ୍ଷପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଓ y-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତରର। ଯେ କୌଣସି ଖଣ୍ଡର ଦୂରାତା y-ଅକ୍ଷଠାରୁ x ଓ ଏହାର ଉଚତା y-ହେଲା ତେବେ ଘନଫଳ



ଚିତ୍ର 1.24

$$V = \int_0^{2\pi} \pi y^2\, dx = \int_0^{2\pi} \pi a^2 (1-\cos\theta)^2\, a(1-\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \pi a^3 (1-\cos\theta)^3\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \pi a^3 \times \left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^3 d\theta$$

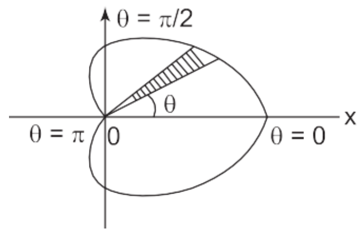
$$= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6\phi\, d\phi \quad [\theta = 2\phi]$$

$$= 32\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6\phi\, d\phi \qquad [\because \sin(\pi - \phi) = \sin\phi]$$

$$= 32\pi a^3 \frac{5\times3\times1}{6\times4\times2}.\frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3$$ [ଲଘୁକରଣ ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରି]

ଉଦାହରଣ 1.72 $r = a(1 + \cos\theta)$ କାର୍ଡିଅଡକୁ ମୂଳ ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନବସ୍ତୁର ଘନଫଳ



ଚିତ୍ର 1.25

$$(V) = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} r^3 \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} a^3 (1+\cos\theta)^3 \sin\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} a^3 (1+\cos\theta)^3 (-\sin\theta)\, d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3\left[\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi a^3\left[\frac{(1+1)^4}{4}\right] = \frac{8}{3}\pi a^3$$

ଉଦାହରଣ 1.73 $y^2(2a - x) = x^3$ ସିସଏଡ୍‌କୁ ଏହାର ଅନନ୍ତ ସ୍ପର୍ଶୀ ରେଖା ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନବସ୍ତୁର ଘନଫଳ $\pi^2 a^3$ ବୋଲି ଦର୍ଶାଅ।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ ଅନନ୍ତ ସ୍ପର୍ଶୀ ରେଖାଟି $x = 2a$

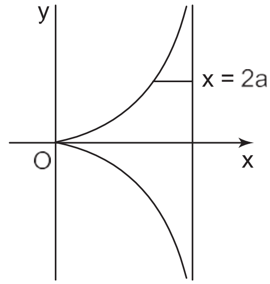
ଆବଶ୍ୟକୀୟ ଘନଫଳ $V = 2\pi\int_0^{2a}(2a-x)^2\,dy$ ... (1)

ବକ୍ରର ସମୀକରଣରୁ

$$y = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{2a-x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3a-x)\sqrt{x}}{(2a-x)^{3/2}}$$

$$dy = \frac{(3a-x)\sqrt{x}}{(2a-x)^{3/2}}\,dx$$



ଚିତ୍ର 1.26

ଯେତେବେଳେ y ଚଳ 0 ରୁ ∞ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବ୍ୟାପ୍ତ x ଚଳ 0 ରୁ $2a$ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବ୍ୟାପ୍ତ।

$$V = 2\pi\int_0^{2a}(2a-x)^2\,dy = 2\pi\int_0^{2\pi}(2a-x)^2\frac{(3a-x)\sqrt{x}}{(2a-x)^{3/2}}\,dx$$

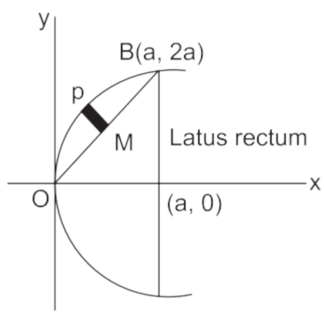
$$= 2\pi\int_0^{2a}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}\,dx + 4\pi a\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx$$

$x = 2a\sin^2\theta$ ବ୍ୟବହାର କଲେ

$$\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2}2a\times 4a\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \pi\frac{a^2}{2}$$

$$\therefore \quad V = \pi\left[\frac{(2ax-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{2a} + 4\pi a\frac{\pi a^2}{2} = 0 + 2\pi^2 a^3 = 2\pi^2 a^3$$

ଉଦାହରଣ 1.74. $y^2=4ax$ ପାରାବୋଲାର ଶୀର୍ଷରୁ ନାଭିଲମ୍ବର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଛେଦନ ସରଳରେଖା ଓ ପାରାବୋଲାର ଛେଦାଂଶ ବକ୍ର ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଟି ଉକ୍ତ ଛେଦନର ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ବସ୍ତୁର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।



ଚିତ୍ର 1.27

ସମାଧାନ: ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣ

$y^2 = 4ax$ ।

B ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି $(a, 2a)$ ଓ ଶୀର୍ଷ $(0,0)$ ସୁତରାଂ

OB ର ସମୀକରଣ

$$y-0=\frac{2a-0}{a-0}(x-0)$$

$\Rightarrow$ $$2x-y=0$$

ମନେକର P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(at^2, 2at)$ ଓ PM, ସରଳରେଖା P ବିନ୍ଦୁରୁ OB ପ୍ରତି ଲମ୍ବ।

$$PM=\frac{2at^2-2at}{\sqrt{4+1}}=\frac{2at(t-1)}{\sqrt{5}}$$

$$OP=\sqrt{(at^2-0)^2+(2at-0)^2}=at\sqrt{t^2+4}$$

$$OM^2=OP^2-PM^2=a^2t^2(t^2+4)-\frac{4a^2t^2(t-1)^2}{5}$$

$$OM^2=\frac{a^2t^2(t+4)^2}{5}$$

$$OM=\frac{at(t+4)}{\sqrt{5}}$$

$\therefore$ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ଘନଫଳ $V=\int_{t=0}^{1}\pi(PM)^2\,d(OM)=\pi\int_0^1\frac{4a^2t^2(t-1)^2}{5}\,d\left(\frac{at(t+4)}{\sqrt{5}}\right)$

$$=\frac{4\pi a^3}{5\sqrt{5}}\int_0^1 t^2(t^2-2t+1)(2t+4)\,dt=\frac{4\pi a^3}{5\sqrt{5}}\int_0^1(2t^5-6t^3+4t^2)\,dt=\frac{2\pi a^3}{15\sqrt{5}}$$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 1.75 ଦୀର୍ଘ ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ଏଲିପ୍ସର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଏଲିପ୍ସିର ସମୀକରଣ $x^2 + 4y^2 = 16$

$$4y^2=16-x^2 \quad \therefore\ y=\frac{\sqrt{16-x^2}}{2}$$

$$\pi\int_0^4\sqrt{64-3x^2}\,dx=\sqrt{3}\,\pi\int_0^4\sqrt{\frac{64}{3}-x^2}\,dx$$

$$dy=-\frac{x}{2\sqrt{16-x^2}}\,dx$$

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{4(16-x^2)}}=\sqrt{\frac{64-3x^2}{4(16-x^2)}}$$

ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଏଲିପ୍ସର x-ଅକ୍ଷକୁ ଛେଦକରେ ସେରେ $y=0$

ତା'ପରେ $x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

ଏଲିପ୍ସର ଉପର ଅର୍ଦ୍ଧରେ x ଚଳ 0 ରୁ 4 ଯାଏଁ ବ୍ୟାପ୍ତ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ର ଫଳ

$$= 2\times\int_0^4 2\pi y\frac{ds}{dx}\,dx = 4\pi\int_0^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{2}\times\sqrt{\frac{64-3x^2}{4(16-x^2)}}\,dx$$

$$= \pi\int_0^4 \sqrt{64-3x^2}\,dx = \sqrt{3}\,\pi\int_0^4\sqrt{\frac{64}{3}-x^2}\,dx$$

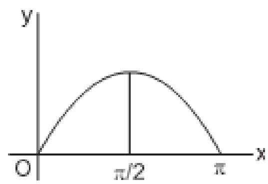
$$= \sqrt{3}\,\pi\left[\frac{x}{2}\sqrt{\frac{64}{3}-x^2}+\frac{64}{3\times 2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}\,x}{8}\right]_0^4$$

$$= \sqrt{3}\,\pi\left[2\sqrt{\frac{64}{3}-16}+\frac{32}{3}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \sqrt{3}\,\pi\left[2\times\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{32}{3}\times\frac{\pi}{3}\right] = 8\pi\left[1+\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right]$$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 1.76 ବକ୍ର $y = \sin x$ ର x-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ବକ୍ର $y = \sin x$ ର ଏକ ଚାପ $(0, \pi)$ ମାଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ।



ଚିତ୍ର 1.28

ତେଣୁ $$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\cos^2 x}$$

ଆବଶ୍ୟକୀୟ ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ରଘଳ $= 2\pi\int_0^\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$$= 2\pi\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$ [$t = \cos t$ ରଖିବା ପରେ $\Rightarrow dt = -\sin x dt$]

$$= -2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\,dt = 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt = 2\pi\left[\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2}+\frac{1}{2}\sinh^{-1}(t)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi\left[\left\{\sqrt{2}+\sinh^{-1}(1)\right\}-\left\{-\sqrt{2}-\sinh^{-1}(1)\right\}\right] = 2\pi\left[\sqrt{2}+\sinh^{-1}(1)\right]$$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 1.77 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ ଅଷ୍ଟର୍‌ଏଡର x-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

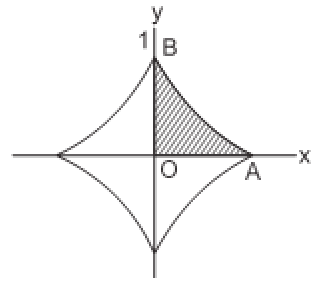
ସମାଧାନ: ଏରେ ***ଚିତ୍ର 1.29*** ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଥିବା ରେଖାଙ୍କିତ କ୍ଷେତ୍ରକୁ x-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରାଯାଇଅଛି।

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}$$

$$= \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t \times (\cos^2 t + \sin^2 t)}$$

$$= 3a\cos t\sin t$$



ଚିତ୍ର 1.29

$\therefore$ ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= 2\int_0^{\pi/2} 2\pi y\frac{ds}{dt}\,dt = 4\pi\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\times 3a\cos t\sin t\,dt$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos t\,dt = 12\pi a^2\left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{12}{5}\pi a^2$$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 1.78 ***a*** ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଓ (0,0) କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତର ପ୍ରଥମ ପାଦ ଓ ବୃତ୍ତର ପାଦର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ, ସ୍ପର୍ଶକ ଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକର ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରା ଗଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ

$x^2 + y^2 = a^2$ କିମ୍ବା $x = a\cos t,\ y = a\sin t$

ଓ P(x, y) ପ୍ରଥମ ପାଦରେ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ।

$$PM = NA = a - x = a - a\cos t = a(1-\cos t)$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = a$$

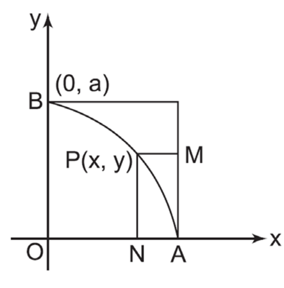
ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ S $= \int_0^{\pi/2} 2\pi(PM)\times\frac{ds}{dt}\times dt$

$$= 2\pi a^2\int_0^{\pi/2}(1-\cos t)\,dt$$

$$= 2\pi a^2\left[t - \sin t\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\pi a^2\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]$$

$$= \pi a^2(\pi - 2)$$ **(ଉତ୍ତର)**



ଚିତ୍ର 1.30

ଉଦାହରଣ 1.79 $r = a\,(1 + \cos\theta)$କାର୍ଡ଼ିୟାଡ଼କୁ ମୂଳ ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: କାର୍ଡ଼ିୟାଡ଼ଟି ମୂଳ ଅକ୍ଷଭିତ୍ତିକ ସମଞ୍ଜସ ଅଟେ ଓ ଏହାର ଉପର ଅର୍ଦ୍ଧରେ θ ଚଳ '0' ରୁ π ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବ୍ୟାପ୍ତ।

ପୁନଶ୍ଚ $\dfrac{ds}{d\theta}=\sqrt{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}$

$$=a\sqrt{2(1+\cos\theta)}=a\sqrt{4\cos^2(\theta/2)}=2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

∴ ଆବଶ୍ୟକୀୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $=\int_0^\pi 2\pi y\dfrac{ds}{d\theta}d\theta=2\pi\int_0^\pi r\sin\theta\times 2a\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)d\theta$ $[\because x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta]$

$$=4\pi a\int_0^\pi a(1+\cos\theta)\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=4\pi a^2\int_0^\pi 2\cos^2\frac{\theta}{2}\times 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\times\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=16\pi a^2\int_0^\pi\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

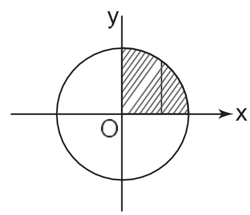
$$=16\pi a^2(-2)\int_0^\pi\cos^4\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2}\times\frac{1}{2}\right)d\theta$$

$$=-32\pi a^2\left[\frac{\cos^5\frac{\theta}{2}}{5}\right]_0^\pi=-\frac{32\pi a^2}{5}(0-1)=\frac{32\pi a^2}{5}$$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 1.80 $r=a$ ବୃତ୍ତର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଗୋଲକର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ବୃତ୍ତର ପୋଲାର ସମୀକରଣଟି $r=a$ ମନେକର ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଥିବା ରେଖାଙ୍କିତ ଅଂଶକୁ x-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରାଯାଇଛି। ତେବେ

$$\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{a^2+0}=a$$



ଚିତ୍ର 1.31

∴ $$S=2\int_0^{\pi/2}2\pi r\sin\theta\frac{ds}{d\theta}d\theta$$

$$=4\pi\int_0^{\pi/2}a\sin\theta\times a\,d\theta$$

$$=4\pi\int_0^{\pi/2}a^2\sin\theta\,d\theta \qquad =4\pi a^2[-\cos\theta]_0^{\pi/2}$$

$$=4\pi a^2$$ **(ଉତ୍ତର)**

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 1.7

1. x-ଅକ୍ଷ ଭିତ୍ତିକରି ଏଷ୍ଟ୍ରୋଏଡ୍ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନବସ୍ତୁର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
2. x-ଅକ୍ଷ ଭିତ୍ତିକରି ସାଇକ୍ଲଏଡ୍ $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a)1 - \cos\theta)$ର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନବସ୍ତୁର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
3. ବକ୍ର $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ କୁ ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ରେଖା ଭିତ୍ତିକରି ଲୁପର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନବସ୍ତୁର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
4. ବକ୍ର $y^2(a + x) = x^2(a - x)$ ର x-ଅକ୍ଷକୁ ଭିତ୍ତିକରି ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନବସ୍ତୁର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
5. ବକ୍ର $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ ର $\theta = -\pi/2$, $\theta = \pi/2$ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଚାପର x-ଅକ୍ଷକୁ ଭିତ୍ତିକରି ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନବସ୍ତୁର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
6. ବକ୍ର $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର x-ଅକ୍ଷକୁ ଭିତ୍ତିକରି ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନବସ୍ତୁର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
7. ବକ୍ର $27ay4 = {}^2(x - 3a)^2$ ର x-ଅକ୍ଷକୁ ଭିତ୍ତିକରି ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନବସ୍ତୁର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
8. x-ଅକ୍ଷ, $y^2 = 4ax$ ଏବଂ କୋଟି $x = 3a$ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରକୁ x-ଅକ୍ଷ ଭିତ୍ତିକରି ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନବସ୍ତୁର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
9. ବକ୍ର $y^2 = x^3$, $x^2 = y^3$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା କ୍ଷେତ୍ରର x-ଅକ୍ଷକୁ ଭିତ୍ତିକରି ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ $\frac{5\pi}{28}$ ପ୍ରମାଣ କର।
10. ଏଲିପ୍ସ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$କୁ ଦୀର୍ଘ ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଏଲିପ୍ସଏଡ଼ର ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏବଂ ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
11. ପାରାବୋଲା $y^2 = 4ax$ର ନାଭିଲମ୍ବ (ଲାଟସରେକ୍ଟମ) ଦ୍ୱାରା କଟା ଯାଇଥିବା ଅଂଶର ଶୀର୍ଷରେ ସ୍ପର୍ଶରେଖା ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା ଘନର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
12. ପାରାବୋଲା $y^2 = 4ax$ର ନାଭିଲମ୍ବ (ଲାଟସରେକ୍ଟମ) ଦ୍ୱାରା କଟା ଯାଇଥିବା ଅଂଶର ଶୀର୍ଷରେ ସ୍ପର୍ଶରେଖା ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
13. ବକ୍ର $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ପାଇଁ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଘନର ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ରେଖା ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $\frac{\pi a^2}{6\sqrt{2}}\left[3\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{2}\right]$ ଅଟେ।

14. ବକ୍ର $\frac{y+8}{x} = x-2$ ଏବଂ x-ଅକ୍ଷ ମଧ୍ୟସ୍ଥ କ୍ଷେତ୍ର, ସରଳରେଖା $x + 5 = 0$ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

15. $3ay^2 = x(x - a)^2$ ଦ୍ୱାରା ଦିଆଯାଇଥିବା ବକ୍ରର ଲୁପ୍‌ର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା ଘନର ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. ବକ୍ର $x = t^2$, $y = \frac{t^3}{3}$ ର ଲୁପକୁ x-ଅକ୍ଷର ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ ଏବଂ ପୃଷ୍ଠରେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

17. 'a' ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତର ଏକ ଚ଼ତୁର୍ଥାଂଶ ନିଜର ଜ୍ୟା ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରେ। ଉତ୍ପନ୍ନ ସ୍ପିଣ୍ଡଲ (Spindle)ର ଘନଫଳ $\frac{\pi a^3}{6\sqrt{2}}(10-3\pi)$ ପ୍ରମାଣ କର।

ଉତ୍ତରମାଳା

1. $\frac{12}{5}\pi a^2$
2. $\frac{64}{3}\pi a^2$
3. $2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$
4. $2\pi a^3\left[\log 2-\frac{2}{3}\right]$
5. $\frac{16\pi a^2}{105}$
6. $\frac{\pi a^3}{12}$
7. $48\pi a^3$
8. $18\pi a^3$
10. $2\pi a^3 = \sqrt{1-e^2}+e^{-1}\sin^{-1}e$ ଏବଂ $\frac{4\pi}{3}ab^2$
11. $\frac{4\pi}{5}a^3$
12. $\pi a^2\left[3\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$
14. 432π
15. $\frac{4a}{\sqrt{3}}$
16. $\frac{3\pi}{4}, 3\pi$

ଆକର୍ଷଣୀୟତଥ୍ୟ:

- ତୁମେ ଜାଣିଛ କି, ବୈଦ୍ୟୁତ ପରିପଥରେ, କରେଣ୍ଟ ଏବଂ ଚାର୍ଜ ମଧ୍ୟରେ ଏକ ସମ୍ପର୍କ ଅଛି, ଯାହା ଏହି ଧାରଣା ଦ୍ୱାରା ଗଣନା କରାଯାଇପାରିବ । (https://www.math24.net/integrals-electric-circuits)
- ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ କାର୍ଯ୍ୟ ବିଭିନ୍ନ ଶିଳ୍ପରେ ଏହି ଧାରଣାର ଜ୍ଞାନକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଯେ କୌଣସି ବସ୍ତୁର ଭାରକେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ଜଡ଼ତ୍ୱ ଆଘୂର୍ଣ୍ଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ।
- ସ୍ଥପତି, ଯେକୌଣସି ଭବନ ନିର୍ମାଣ କରିବା ସମୟରେ ଏହି ଧାରଣାକୁ ବ୍ୟବହାର କରନ୍ତି ।

ଭିଡିଓ ସଂଯୋଗ (ଉତ୍ସ: NPTEL)

ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳନର ପ୍ରୟୋଗ-1

ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ

- ଏହି ଧାରଣା ବାଣିଜ୍ୟ ଏବଂ ଅର୍ଥଶାସ୍ତ୍ର କ୍ଷେତ୍ରରେ "Lorenz curve" «ଲୋରେଞ୍ଜ ବକ୍ର" ଏବଂ "Gini Coefficient" "ଗିନି ଗୁଣାଙ୍କ»ର ଗଣନା କରିବା ପାଇଁ ଏବଂ ମୋଟ ଲାଭରେ ବୃଦ୍ଧି କରିବା ପାଇଁ ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଏ।
- କୌଣସି ବସ୍ତୁର ବସ୍ତୁତ୍ୱ ଏବଂ ଘନତା ଖୋଜିବା ପାଇଁ ପଦାର୍ଥ ବିଜ୍ଞାନରେ ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଏ ।
- ଏହାର ବ୍ୟବହାର ମଧ୍ୟ ହାରାହାରି ପରିବର୍ତ୍ତନ, ଘନଫଳ, ତ୍ରୁଟି ଆକଳନ ଏବଂ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ହୋଇଥାଏ ।

ସମାହିତ କଠିନ ପ୍ରଶ୍ନମାଳା

ଉଦାହରଣ 1 $\int_{-3/2}^{10}\{2x\}\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁରେ {.}, x ର ଭଗ୍ନାଂଶ।

ସମାଧାନ: ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $f(x) = \{2x\}$ ଏକ ଆବର୍ତ୍ତୀ ଫଳନ ଯାହାର ଆବର୍ତ୍ତ ବା ଅବଧି ହେଉଛି ½।

ତେଣୁ $$I=\int_{-3/2}^{10}\{2x\}\,dx=\int_{-3(1/2)}^{20(1/2)}\{2x\}\,dx$$

$$=23\int_0^{1/2}2x\,dx \text{ (ଯେହେତୁ } \{2x = 2x- [2x] \text{ ଏବଂ ଯେତେବେଳେ } x\in[0, 1/2], [2x]=0)$$

$$=\left|23x^2\right|_0^{1/2}=\frac{23}{4} \textbf{ (ଉତ୍ତର)}$$

> **ମନ୍ତବ୍ୟ:** ଯଦି $f(x)$ ଏକ ଆବର୍ତ୍ତୀ ଫଳନ ଓ ଅବଧି p ,
>
> ତେବେ $\int_{a/np}^{b/np}f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx, n\in I$

ଉଦାହରଣ 2 $\int_{-1}^{1}x^3e^{x^4}\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର $f(x)=x^3e^{x^4}$ ତେବେ,

$$\therefore \quad f(-x)=(-x)^3e^{(-x)^4}=-x^3e^{x^4}=-f(x)$$

ତେଣୁ $f(x)$ ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ଫଳନ ଅଟେ।

$$\therefore \quad \int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}x^3e^{x^4}\,dx=0 \textbf{ (ଉତ୍ତର)}$$

ଉଦାହରଣ 3 $\int_0^1\frac{dx}{\left(1-x^n\right)^{1/n}}$ ଏକ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର $I=\int_0^1\frac{dx}{\left(1-x^n\right)^{1/n}}$

$x^n=\sin^2\theta$ ରଖିବା ପରେ, $\Rightarrow x=\sin^{2/n}\theta$

$$dx=\frac{2}{n}\sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$\therefore \quad I=\frac{2}{n}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\theta\cos\theta}{\cos\theta}\,d\theta=\frac{2}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2n}\right)} \textbf{ (ଉତ୍ତର)}$$

ଉଦାହରଣ 4 $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : ମନେକର $x = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$

$\Rightarrow$
$$dx = -2a\cos\theta\sin\theta d\theta + 2b\sin\theta\cos\theta d\theta$$
$$= 2(b-a)\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

ଏବଂ
$$x - a = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta - a$$
$$= (b-a)\sin^2\theta$$

ଏବଂ
$$b - x = b - a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$$
$$= (b-a)\sin^2\theta$$

$\therefore$
$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{2(b-a)\sin\theta\cos\theta}{(b-a)\sin\theta\cos\theta}\, d\theta$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} 1.\, d\theta = \pi$$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 5 ଉପଯୁକ୍ତ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\, dt,\ x, y > 0$

ସମାଧାନ: ମନେକର $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+z}}$ ତେଣୁ $\cos\theta = \frac{z^{1/2}}{\sqrt{1+z}}$

$$\cos\theta\, d\theta = -\frac{1}{2}(1+z)^{-3/2}\, dz$$

ବର୍ତ୍ତମାନ
$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\infty}^{0} \frac{1}{(1+z)^{x-1/2}} \cdot \frac{z^{y-1}}{(1+z)^{y-1}} \frac{1}{(1+z)^{3/2}}\, dz$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}}\, dz = \frac{1}{2}B(y, x)$$

ଆମେ ଜାଣୁ $B(x, y) = B(y, x)$

ତେଣୁ
$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{(1+z)^{x+y}}\, dz = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\, dt$$ **(ପ୍ରମାଣିତ)**

ଉଦାହରଣ 6 ଯଦି $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}$

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ଅଛି
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$$
$$= \left[-\sin^{n-1} x\cos x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1)\sin^{n-2} x\cos^2 x\, dx$$
$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\left(1 - \sin^2 x\right) dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\, dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$$

$$I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2}$$

$$I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2} \qquad \textbf{(ପ୍ରମାଣିତ)}$$

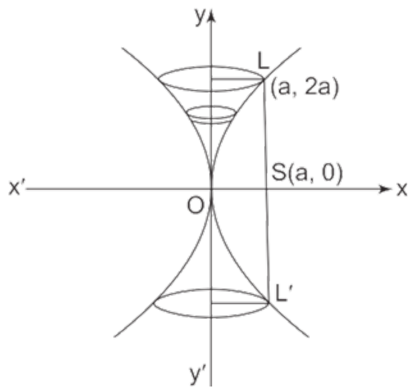
ଉଦାହରଣ 7. $y^2 = 4ax$ ପାରାବୋଲାର ଯେଉଁ ଅଂଶଟି ନାଭିଲମ୍ବ ଛେଦ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ତାହା ଶୀର୍ଷରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରେ। ଉତ୍ପନ୍ନ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ପାରାବୋଲା ହେଉଛି $y^2 = 4ax$ (1)

ସମୀକରଣ(1)କୁ 'x' ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଉ $\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{4a^2}{y^2}}$$

$$= \sqrt{1+\frac{4a^2}{4ax}} = \sqrt{\frac{x+a}{x}}$$



ଚିତ୍ର 1.32

ଏରେ ବକ୍ରଟି x-ଅକ୍ଷ ଭିତ୍ତିକ ସମଞ୍ଜସ ଏବଂ OL ଚାପ ପାଇଁ ଚଳ x, '0' ରୁ 'a' ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବ୍ୟାପ୍ତ।

ଶୀର୍ଷରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଅର୍ଥାତ୍ y-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଚାପ LOL′ ର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ପୃଷ୍ଠତଳର ଆବଶ୍ୟକୀୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ହେଉଛି

$$\therefore \qquad S = 2\int_0^a 2\pi x \frac{ds}{dx}\, dx$$

$$= 4\pi \int_0^a x\sqrt{\left(\frac{x+a}{x}\right)}\, dx = 4\pi \int_0^a \sqrt{x^2+ax}\, dx$$

$$= 4\pi \int_0^a \sqrt{\left\{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}}\, dx$$

$$= 4\pi\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{2}\right)\sqrt{x^2+ax} - \frac{1}{2}.\frac{a^2}{4}\log\left\{\left(x+\frac{a}{2}\right)+\sqrt{x^2+ax}\right\}\right]_0^a$$

$$\left[\because \int\sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left\{x+\sqrt{x^2-a^2}\right\}\right]$$

$$= 4\pi\left[\frac{1}{2}.\frac{3a}{2}.a\sqrt{2} - \frac{a^2}{8}\log\left\{\frac{3a}{2}+a\sqrt{2}\right\} + \frac{a^2}{8}\log\left(\frac{a}{2}\right)\right]$$

$$= 4\pi\left[\frac{3a^2}{4}\sqrt{2}-\frac{a^2}{8}\log\left\{\frac{\left(\frac{3a}{2}+a\sqrt{2}\right)}{a/2}\right\}\right]$$

$$= \pi a^2\left[3\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log\left(3+2\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \pi a^2\left[3\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right]$$
$$= \pi a^2\left[3\sqrt{2}-\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$$

(ଉତ୍ତର)

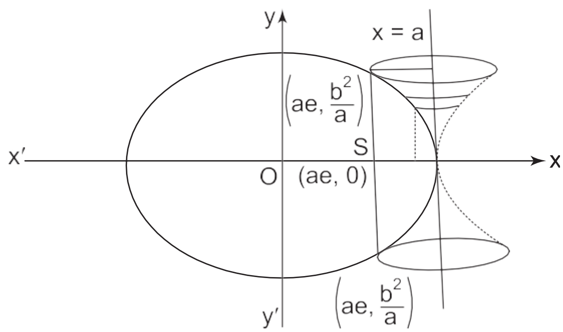
ଉଦାହରଣ 8 କୋନ୍ $z = 3-\sqrt{x^2+y^2}$ ଏବଂ ପାରାବୋଲିକ୍ $z = 1+x^2+y^2$ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ସଙ୍କେତ ପୋଲାର ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ସମାଧାନ କର।

ଉଦାହରଣ 9 ଏଲିପ୍ସ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ର ନାଭିଲମ୍ବ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଭାଗ, ଶୀର୍ଷରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ପୃଷ୍ଠତଳର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ଏଲିପ୍ସର ସମୀକରଣ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ଏଲିପ୍ସର ନାଭି ହେଉଛି $(ae, 0)$ ଯେଉଁରେ $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ ହେଉଛି ଉତ୍କେନ୍ଦ୍ରତା (eccentricity)। ନାଭି ଦେଇ ଏବଂ ଏଲିପ୍ସ ଦ୍ୱାରା ଅନ୍ତଖଣ୍ଡିତ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ନାଭିଲମ୍ବ (ଲାଟସ ରେକ୍ଟମ) କୁହାଯାଏ।



ଚିତ୍ର 1.33

ମନେକର ଏକ ଡିସ୍କର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ$(a-x)$ ଏବଂ ମୋଟେଇ dy ଅଛି ତେବେ ଏହି ଭାଗରେ ଘନଫଳ ହେଉଛି $\pi(a-x)^2\,dy$.

ତେଣୁ, ଦତ୍ତ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ ହେଉଛି।

$$V=\int_{-b^2/a}^{b^2/a}\pi(a-x)^2\,dy \qquad = 2\int_0^{b^2/a}\pi(a-x)^2\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^{b^2/a}\left(a^2-2ax+x^2\right)dy$$

[$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ଅର୍ଥାତ୍ $x^2=\frac{a^2}{b^2}\left(b^2-y^2\right)$]

$$= 2\pi \int_0^{b^2/a} \left\{ a^2 - 2a.\frac{a}{b}\sqrt{(b^2-y^2)} + \frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2) \right\} dx$$

$$= \frac{2\pi a^2}{b^2} \int_0^{b^2/a} \left\{ 2b^2 - 2b\sqrt{b^2-y^2} - y^2 \right\} dy$$

$$= \frac{2\pi a^2}{b^2} \left[2b^2 y - 2b\left\{ \frac{1}{2} y\sqrt{b^2-y^2} + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) \right\} - \frac{y^3}{3} \right]_0^{b^2/a}$$

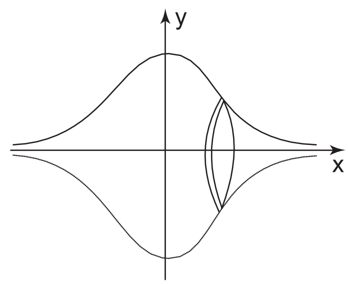
$$= \frac{2\pi a^2}{b^2} \left[2b^2.\frac{b^2}{a} - 2b\left\{ \frac{1}{2}.\frac{b^2}{a}.\sqrt{b^2 - \frac{b^4}{a^2}} + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \right\} - \frac{b^6}{3a^3} \right]$$

$$= \frac{2\pi a^2}{b^2} \left[\frac{2b^4}{a} - \frac{b^4}{a^2}\sqrt{a^2-b^2} - b^3 \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{b^6}{3a^3} \right]$$

$$= \frac{2\pi b}{3a} \left[6a^2 b - 3ab\sqrt{a^2-b^2} - 3a^3 \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - b^3 \right]$$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 10 ବକ୍ର $y = \frac{a^3}{(a^2+x^2)}$ ର ଅନନ୍ତ ସ୍ପର୍ଶୀ ରେଖାର ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

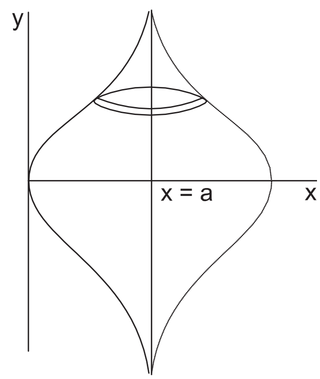
ସମାଧାନ: ଉତ୍ତର: $\frac{1}{2}\pi^2 a^3$



ଚିତ୍ର 1.34

ଉଦାହରଣ 11 ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବକ୍ର $(a - x)\, y^2 = a^2 x$ର ଅନନ୍ତସ୍ପର୍ଶୀ ରେଖା ଭିତ୍ତିରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ $\frac{1}{2}\pi^2 a^3$ ।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ବକ୍ର $(a - x)\, y^2 = a^2 x$ ଅଟେ। ଏହାର ଆକାର ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଇ ଦିଆଯାଇଛି । y ଉଚ୍ଚତମ ଘାତର ଗୁଣାଙ୍କକୁ ଶୂନ୍ୟ ସହିତ ସମାନ କରିବା ପରେ, y- ଅକ୍ଷ ସହିତ ସମାନ୍ତରାଳ ଅନନ୍ତସ୍ପର୍ଶୀ ରେଖା ହେଉଛି $a - x = 0$ ଅର୍ଥାତ୍, $x = a$ ।



ଚିତ୍ର 1.35

ଧରାଯାଉ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $(a - x)$ ଏବଂ ମୋଟେଇ dy ର ଏକ ଡିସ୍କ ରୂପରେ ଅଂଶର ଘନଫଳ ହେଉଛି $\pi(a-x)^2\, dy$.

ତେଣୁ, ଦତ୍ତ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ

$$V = 2\int_{y=0}^{\infty} \pi(a-x)^2\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} \left(a - \frac{a y^2}{y^2+a^2} \right) dy \qquad \left[\because\ x = \frac{a y^2}{y^2+a^2} \right]$$

$$= 2\pi a^6 \int_0^{\infty} \frac{dy}{(y^2+a^2)^2}$$

ମନେକର $y = a\tan\theta$ ରଖିବା ପରେ, $dy = a\sec^2\theta\, d\theta$,

ଯେତେବେଳେ $y = 0, \theta = 0$

ଏବଂ ଯେବେ $y \to \infty, \theta \to \pi/2$

ତେଣୁ, ଆବଶ୍ୟକୀୟ ଘନଫଳ

$$V = 2\pi a^6 \int_0^{\pi/2} \frac{a\sec^2\theta}{a^4\sec^4\theta}\, d\theta = 2\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 2\pi a^3 . \frac{1}{2} . \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi^2 a^3 \qquad \textbf{(ଉତ୍ତର)}$$

ଉଦାହରଣ 12 ବିଟା ଫଳନର ଅଭିସରଣ ଆଲୋଚନା କର।

ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି, ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି m, n ଉଭୟ ଧନାତ୍ମକ ଅଟନ୍ତି।

ସମାଧାନ: ମନେକର $I = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$

'I' ସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ ହେବ ଯଦି $m \geq 1$ କିମ୍ବା $n \geq 1$ ଏବଂ ସେଥିପାଇଁ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ। ସ୍ପଷ୍ଟ ଭାବରେ 0 କିମ୍ବା 1 ଅନନ୍ତ ବିଚ୍ଛିନ୍ନତାର ବିନ୍ଦୁ ହେବେ ଯଦି $m < 1$ ଏବଂ $n < 1$ । $m < 1$ ଏବଂ $n < 1$ ପାଇଁ, 0 ଏବଂ 1 ମଧ୍ୟରେ ଏକ ସଂଖ୍ୟା ½ (ଧରାଯାଉ) ନିଆଯାଉ, ଯାହା ଦ୍ୱାରା ଆମେ ସମାକଳଜକୁ ଏହି ପରି ଭାବରେ ଲେଖିପାରିବା,

$$I = \int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx + \int_{1/2}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx$$

ମନେକର $$I = I_1 + I_2 \qquad \ldots (1)$$

ପ୍ରଥମ ସମାକଳଜ $I_1 = \int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx$ ର $x = 0$ ରେ ଅଭିସାରିତାର ଆଲୋଚନା କରିବା ଯେତେବେଳେ $m < 1$

ଏରେ $$f(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1} = \frac{(1-x)^{n-1}}{x^{1-m}} \qquad [\because m < 1]$$

ମନେକର $g(x) = \frac{1}{x^{1-m}}$ ତେଣୁ $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+}(1-x)^{n-1} = 1$, ଯାହା ସୀମିତ ଏବଂ ଅଣଶୂନ୍ୟ ଅଟେ।

$\therefore$ ସମାକଳଜ I_1 ଏବଂ $\int_0^{1/2} g(x)\, dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x^{1-m}}\, dx$ ଏକା ସାଙ୍ଗେ ଅଭିସାରୀ କିମ୍ବା ଅପସାରୀ ହେବେ।

କିନ୍ତୁ ସମାକଳଜ $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^{1-m}}\, dx$, $x = 0$ ରେ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $1-m < 1$ ଅର୍ଥାତ୍ $m > 0$

$\therefore$ I_1, $x = 0$ ରେ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ, ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $0 < m < 1$

ଦ୍ୱିତୀୟ ସମାକଳଜ $I_2 = \int_{1/2}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx$ ରେ $x = 1$ ରେ ଅଭିସାରିତାର ଆଲୋଚନା କରିବା ଯେତେବେଳେ $n < 1$:

ଏଠାରେ $f(x)=x^{m-1}(1-x)^{n-1}=\dfrac{x^{m-1}}{(1-x)^{1-n}}$ $[\because n<1]$

ମନେକର $g(x)=\dfrac{1}{(1-x)^{1-n}}$ ତେଣୁ $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1^+}x^{m-1}=1$, ଯାହା ସୀମିତ ଏବଂ ଅଣଶୂନ୍ୟ ଅଟେ।

$\therefore$ ସମାକଳଜ I_2 ଏବଂ $\int_{1/2}^{1}g(x)\,dx=\int_{1/2}^{1}\dfrac{1}{(1-x)^{1-n}}\,dx$ ଏକା ସାଙ୍ଗେ ଅଭିସାରୀ କିମ୍ବା ଅପସାରୀ ହେବେ ।

କିନ୍ତୁ ସମାକଳଜ $\int_{1/2}^{1}g(x)\,dx=\int_{1/2}^{1}\dfrac{1}{(1-x)^{1-n}}\,dx$, $x = 1$ ରେ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି 1 - n <1ଅର୍ଥାତ୍ $n > 0$

$\therefore$ I_2 ଅଭିସାରୀ $x = 1$ରେ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $0 < n < 1$.

ତେଣୁ ସାମୀକରଣ (1) ରୁ, ସମାକଳନ I ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $0 < m < 1$ ଏବଂ $0 < n < 1$. ଏହା ସହିତ $m \geq 1$ ଏବଂ $n \geq 1$ ପାଇଁ ଏକ ସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ 13 ଗାମା ଫଳନର ଅଭିସରଣ ଆଲୋଚନା କର ।

ଦର୍ଶାଅ ଯେ ସମାକଳଜ $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ଯଦି $n > 0$

ସମାଧାନ: ମନେକର $I=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$

$\Rightarrow$ $=\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}\,dx+\int_1^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$

ମନେକର $I=I_1+I_2$ ... *(1)*

ଏଠାରେ $f(x)=x^{n-1}e^{-x}=\dfrac{e^{-x}}{x^{1-n}}$

ସମାକଲ୍ୟ f [0, 1]ରେ, $x = 0$ ରେ ଅନନ୍ତ ବିଚ୍ଛିନ୍ନତା ଅଟେ ଯଦି $n<1$ ଏବଂ I_1 ଏକ ସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ ଅଟେ ଏବଂ ଏହି କାରଣରୁ $n \geq 1$ ପାଇଁ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ।

ପ୍ରଥମ ସମାକଳଜ $I_1=\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}\,dx$ ର $x = 0$ ରେ ଅଭିସାରୀତାର ଯାଞ୍ଚ କରିବା ଯେତେବେଳେ $n < 1$

ଏଠାରେ $f(x)=x^{m-1}(1-x)^{n-1}=\dfrac{(1-x)^{n-1}}{x^{1-m}}$ $[\because m<1]$

ମନେକର $g(x)=\dfrac{1}{x^{1-n}}$ ତେଣୁ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{-x}=1$, ଯାହା ସୀମିତ ଏବଂ ଅଣଶୂନ୍ୟ ।

କିନ୍ତୁ ସମାକଳଜ $\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\dfrac{1}{x^{1-n}}dx$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $1 - n < 1$ ଅର୍ଥାତ୍ $n > 0$.

ତେଣୁ ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା ଦ୍ୱାରା, ସମାକଳଜ $\int_0^1 f\,dx$, $0 < n < 1$ ପାଇଁ ଅଭିସରଣ ହୁଏ । ଏହା ସହିତ $n \geq 1$ ପାଇଁ ଏକ ସଙ୍ଗତ ସମାକଳନ ଅଟେ । ତେଣୁ I_1 ସମସ୍ତ $n > 0$ ପାଇଁ ଅଭିସରିତ ଅଟେ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ସମାକଳନ $I_2 = \int_1^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx$ ର ଅଭିସାରୀତା ଯାଞ୍ଚ କରିବା।

ମନେକର $\quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ତେଣୁ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^{n+1}}{e^x} = 0, \forall x$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\quad \int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \dfrac{dx}{x^2}$ ଅଭିସାରୀ ଅଟେ । $\quad [\because n = 2 > 1]$

$\therefore$ ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା ଦ୍ୱାରା, I_2, $n > 0$ ପାଇଁ ଅଭିସାରିତ ହୁଏ ।

ତେଣୁ, ସମୀକରଣ (1)ରୁ, ଆମେ ଏହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତର ଉପନୀତ ହେଲୁଯେ ସମାକଳଜ I ଅଭିସାରୀ ହେବ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $n > 0$.

ସାରାଂଶ

1. ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\rho = \dfrac{\left(1+{y_1}^2\right)^{3/2}}{y_2}$

2. ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\bar{x} = x - \rho \sin\psi, \bar{y} = y + \rho\cos\psi$ ଏବଂ $\bar{x} = x - \dfrac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}, \bar{y} = y + \dfrac{1+y_1^2}{y_2}$

3. ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ଏବଂ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ: ବକ୍ରର ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସଞ୍ଚାରପଥକୁ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ବକ୍ରକୁ ହିଁ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ କୁହାଯାଏ ।

4. ଯଦି $f(x)$କୁ $[a, b]$ ଅନ୍ତରାଳ ରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଏ, ତେବେ $f(x)$ର ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜକୁ ଏହି ପ୍ରକାର ଲେଖା ଯାଏ। $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

5. ସମାକଳଜ $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ ଏକ ଅସଙ୍ଗତ ସମାକଳଜ ହେବ, ଯଦି 'a' 'b' ଅଥବା ଉଭୟ 'a' ଓ 'b' ଅସୀମ କିମ୍ବା ଫଳନ $f(x)$ $[a, b]$ ରେ ଅନାବଦ୍ଧ ଅଟେ।

6. ବିଟା ଏବଂ ଗାମା ଫଳନ:

   a. $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ ଅଭିସରୀ m, n>0 ପାଇଁ

   b. $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\,dx$ ଅଭିସରୀ n>0 ପାଇଁ

   c. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \Gamma(n-1) = n!$, ଯେଉଁରେ n ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣା ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ।

   d. $\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2), \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

e. $B(m,n)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

f. $\int_0^{\pi/2}\sin^p x\cos^q x\,dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$

g. $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\sin^{1/2}\theta\cos^{-1/2}\theta\,d\theta=\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma(1)}$

7. ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$$S=\int_a^b 2\pi y\,ds=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$ (x-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ)

$$S=\int_a^b 2\pi x\,ds=\int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dy$$ (y-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ)

8. ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ

x-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ $V=\int_a^b \pi y^2\,dx$

y-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ $V=\int_c^d \pi x^2\,dy$

ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନମାଳା

1. $\int_0^{\pi/2}\sin^3 x\cos^{5/2}x\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

a. $\frac{1}{77}$ b. $\frac{2}{77}$ c. $\frac{4}{77}$ d. $\frac{8}{77}$

2. ଏକ ଏଲିପ୍ସର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ନାମ ହେବ

a. ଭରକେନ୍ଦ୍ର b. ଆଷ୍ଟ୍ରଏଡ୍ c. ସାଇକ୍ଲଏଡ୍ d. ହାଇପରବୋଲଏଡ

3. ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟକୁ ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

a. ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟ b. ଇଭଲଭେଣ୍ଟ c. ଏନ୍‌ଭଲପ୍ d. ସ୍ୱର୍ଶକ

4. $x^2+y^2=25$ ବକ୍ରର ବକ୍ରତା କେତେ ?

a. 5 b. 25 c. 0.5 d. 0.2

5. ଏକ ସରଳରେଖାର ବକ୍ରତା କେତେ ?

a. ଅନନ୍ତ b. 1 c. 0 d. ସରଳରେଖାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ

6. $\int_0^{\pi/2}\left[\tan^{-1}(\cot x)+\cot^{-1}(\tan x)\right]dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ?

a. $\frac{\pi}{4}$ b. π c. $\frac{\pi^2}{4}$ d. $\frac{\pi^2}{2}$

7. ଯଦି $I=\int_{-1}^{1}\left(x^7+\cos^{-1}x\right)dx$ ଅଟେ, ତେବେ cos I ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ?

a. 1 b. 0 c. −1 d. ½

8. $\int_0^{\pi/2}\sin\theta\sqrt{\sin 2\theta}\,d\theta$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

a. 1 b. 0 c. π/2 d. π/4

9. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଗାମା ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା ନୁହେଁ?

a. $\Gamma(n)=n!$ b. $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$

c. $\Gamma(n)=\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-x}\,dx$ d. $\Gamma(n)=\int_0^{1}\log\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1}dy$

10. $\int_0^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

a. $\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(5/4)}{\Gamma(1/4)}$ b. $\frac{2\pi\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}$ c. $\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}$ d. $\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)}$

11. Γ(9/4) ଏହାର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

a. $\frac{5}{4}\times\frac{1}{4}\times\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ b. $\frac{9}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{1}{4}\times\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ c. $\frac{5}{4}\times\frac{1}{4}\times\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$ d. $\frac{1}{4}\times\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$

12. $\Gamma(n)\,\Gamma(1-n)$ ଏହାର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

a. $\frac{\pi}{\sin n\pi}$ b. $-\frac{\pi}{\sin n\pi}$ c. 0 d. $n!$

13. ଏଲିପ୍ସ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ କୁ ଯେତେବେଳେ ଏହାର ଲଘୁ ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କଲେ, ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ କେତେ?

a. $4ab$ ଘନ ୟୁନିଟ୍ b. $\frac{4}{3}a^2b$ ଘନ ୟୁନିଟ୍ c. $\frac{4}{3}ab$ ଘନ ୟୁନିଟ୍ d. 4 ଘନ ୟୁନିଟ୍

14. $y=\sqrt{x}$, $y=2$ ଏବଂ $y=0$ ଦ୍ୱାରା ଅବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରକୁ y-ଅକ୍ଷ ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କ୍ଷେତ୍ରର ଘନଫଳ କେତେ?

a. 32π ଘନ ୟୁନିଟ୍ b. $\frac{32\pi}{5}$ ଘନ ୟୁନିଟ୍ c. $\frac{32}{5}$ ଘନ ୟୁନିଟ୍ d. $\frac{5\pi}{32}$ ଘନ ୟୁନିଟ୍

15. କାର୍ଡିଏଡ r = a(+1 cosθ) ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ?

a. $\frac{3}{2}\pi a^2$ b. $3\pi a^2$ c. $\frac{3}{4}\pi a^2$ d. $\frac{3}{8}\pi a^2$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. d	2. b	3. b	4. d	5. c	6. c	7. c	8. d
9. a	10. c	11. a	12. a	13. b	14. b	15. a	

ଅସମାହିତ କଠିନ ପ୍ରଶ୍ନ

1. ବକ୍ରର ଦୋଳନ ସମତଳରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କର ଏବଂ ଏହି ସଂଜ୍ଞା ଦ୍ୱାରା ଏହାର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
2. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ରର ସଞ୍ଚାରପଥଏକ ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ଅଟେ, ଯେତେବେଳେ ବକ୍ର କେବଳ ଏକ ସମତଳ ଅଟେ ।
3. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଦୁଇଟି ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟର ଅନୁରୂପ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଅଟେ ।
4. $\int_{-2}^{3}|x^2-1|\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
5. ସମାକଳଜ $\int_{-2}^{3}|x^2-1|\,dx$ ର ଅଭିସାରିତା ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କର ।
6. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସମତଳ $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a$ ର ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ପୃଷ୍ଠ $z^2 = 2xy$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ହେଉଛି $4\sqrt{ab}\left(\frac{a+b}{3\sqrt{2}}\right)$ ।
7. ସିଲିଣ୍ଡର $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ ର ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ପୃଷ୍ଠ $az = xy$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
8. ଚକ୍ରଜ (ସାଇକ୍ଲିଏଡ଼) ର ଭୂମିର ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
9. 'a' ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତର ଏକ ଚତୁର୍ଥାଂଶ ଏହାର ଜ୍ୟାର ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଯୋଗୁଁ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା ସ୍ପିଣ୍ଡିଲର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଉତ୍ତରମାଳା

4. $28/3$

6. $n > 0$ ପାଇଁ ଅଭିସାରୀ ଏବଂ $n \le 0$ ପାଇଁ ଅପସାରୀ

8. $\frac{1}{9}(20-3\pi)a^2$

9. $5\pi^2 a^3$

10. $\frac{\pi a^3(10-3\pi)}{6\sqrt{2}}$

ତୁମେ ଜାଣିଛ କି?

ନ୍ୟୁଟନ୍ ଅବକଳନ ଗଣିତକୁ ନିଜ ସଂସ୍କରଣରେ “The method of fluxion” “ଫ୍ଲକ୍ସିଆନ୍‌ର ପଦ୍ଧତି” ଭାବରେ ବର୍ଣ୍ଣନା କରିଥିଲେ। ସେ 1666 ରେ ଫ୍ଲକ୍ସିଆନ୍ ଉପରେ ଏକ ପ୍ରବନ୍ଧ ଲେଖିଥିଲେ, କିନ୍ତୁ ତାଙ୍କର ଅନେକ ଲେଖାପରି, ଏହା ମଧ୍ୟ ଅନେକ ଦଶନ୍ଧି ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇନଥିଲା। ତାଙ୍କର ମହାନ୍ କାର୍ଯ୍ୟ "Philosophic naturalis principia mathematica" (ପ୍ରାକୃତିକ ଦର୍ଶନର ଗାଣିତିକ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ) 1687 ମସିହାରେ ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇଥିଲା। ଏଥିରେ ଗତି ଓ ମାଧ୍ୟାକର୍ଷଣର ଅନେକ ସିର୍ଦ୍ଧାନ୍ତ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଥିଲା, କିନ୍ତୁ ସ୍ୱଷ୍ଟ ଭାବରେ ବହୁତ (କଳନ ଗଣିତ) ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ନଥିଲା; ଯଦିଓ ଆରମ୍ଭରେ କଳନ ଗଣିତର କିଛି ବ୍ୟାଖ୍ୟା ଅଛି, ନ୍ୟୁଟନ୍ ନିଶ୍ଚିତ ଭାବରେ ନିଜର ସିର୍ଦ୍ଧାନ୍ତକୁ ସୂତ୍ରଭାବରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ପାଇଁ କଳନଗଣିତ ବ୍ୟବହାର କରିଥିଲେ। ତଥାପି, ନ୍ୟୁଟନ୍‌ଙ୍କ “The method of fluxion” ‘ପ୍ରବାହର ପଦ୍ଧତି’ 1693 ମସିହା ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସ୍ୱଷ୍ଟ ଭାବରେ ମୁଦ୍ରିତ ହୋଇନଥିଲା।

ଅନ୍ୟପଟେ, ଲେବିନିଜ୍ (Leibniz) ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା 1684 ମସିହାରେ କଳନଗଣିତ ଉପରେ ତାଙ୍କର ପ୍ରଥମ ପ୍ରବନ୍ଧ ପ୍ରକାଶ କରିଥିଲେ ଏବଂ ଦାବି ଜଣାଇଥିଲେ ଯେ 1670 ମସିହାରେ ସେ କଳନଗଣିତ ଆବିଷ୍କାର କରିଥିଲେ। ପ୍ରକାଶିତ ରେକର୍ଡ (ନଥି)ରୁ ଅନ୍ତତଃ ପକ୍ଷେ, ଏଥିରୁ ଜଣାପଡୁଛି ଯେ ଲିବନିଜ୍ ପ୍ରଥମେ କଳନଗଣିତ ଆବିଷ୍କାର କରିଥିଲେ।

ଯେତେବେଳେ ନ୍ୟୁଟନ୍ ଏବଂ ଲେବିନିଜ୍‌ଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ପ୍ରାରମ୍ଭରେ ସୌହାର୍ଦ୍ଦ୍ୟପୂର୍ଣ୍ଣ ସମ୍ପର୍କ ଥିଲା, ସେହି ସମୟରେ ଲେବିନିଜ୍ ଏବଂ ତାଙ୍କ ଅନୁଗାମୀମାନେ ଇଂରାଜୀ ଗଣିତଜ୍ଞ ଜନ୍ ୱାଲିସ୍ ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଦିଆଯାଇଥିବା ଏକ ବିବୃତ୍ତିଉପରେ ଧ୍ୟାନ ଦେଇନଥିଲେ। ,ବିଦେଶୀମାନଙ୍କ ପ୍ରତି ଘୃଣା ଭାବ ରଖିବା ତଥା ଏବଂ ଝଗଡାକାରୀ ଚରିତ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ, ୱାଲିସ୍ ସାରା ଜୀବନ ଇଂରାଜୀ ବୈଜ୍ଞାନିକଙ୍କ ତରଫରୁ ପ୍ରାଥମିକତା ବିବାଦର ମୁକାବିଲା କରିଥିଲେ। 1695 ମସିହାରେ, ବୋଧହୁଏ ଅଜାଣତରେ, ୱାଲିସ୍ ସୂଚନା ଦେଇଥିଲେ ଯେ ଲେବିନିଜ୍ ନ୍ୟୁଟନଙ୍କଠାରୁ କଳନଗଣିତ ଶିଖିଛନ୍ତି - ଏହି ଦାବି ବର୍ତ୍ତମାନ ମିଥ୍ୟା ବୋଲି ବିବେଚନା କରାଯାଏ।

ପୁନର୍ବାର, ଲେବିନିଜ୍‌ଙ୍କର ଏକ ବିବୃତ୍ତି ଦ୍ୱାରା ଅପମାନିତ ହୋଇ ଯେ କେତେକ ଗାଣିତିକ ସମସ୍ୟା କେବଳ ଲେବିନିଜ୍‌ଙ୍କ ନିଜ କଳନଗଣିତ ସଂସ୍କରଣ ଦ୍ୱାରା ସମାଧାନ ହୋଇପାରିବ, 1699 ମସିହାରେ ଫାଟିଓ ଡି ଡୁଏଲର ନାମକ ଜଣେ ଗଣିତଜ୍ଞ, ଲିବନିଜଙ୍କ ଉପରେ ପାଠ ଚୋରିର ଆରୋପ ଲଗାଇଥିଲେ। ସମସ୍ୟା ବଢିଚାଲିଲା , ଫଳତଃ ନ୍ୟୁଟନ୍ ଏବଂ ଲେବିନିଜ୍ ମଧ୍ୟ ଦାର୍ଶନିକ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକରେ ଅସହମତ ଥିଲେ।

1712 ମସିହାରେ ଇଂଲଣ୍ଡର ରୟାଲ ସୋସାଇଟି ଅଫ୍ ଇଂଲଣ୍ଡ ଏହି ମାମଲାର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଏକ ରିପୋର୍ଟ ଲେଖିଥିଲା - କେବଳ ଏହା ବ୍ୟତୀତ ସମଗ୍ର ଅନୁସନ୍ଧାନ ନିଜେ ନ୍ୟୁଟନ୍‌ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଭାବଶାଳୀ ଭାବରେ ନିର୍ଦ୍ଦେଶିତ ହୋଇଥିଲା। ରିପୋର୍ଟରୁ ଜଣାପଡିଛି ଯେ ଲେବିନିଜ୍, ନ୍ୟୁଟନ୍‌ଙ୍କ କାର୍ଯ୍ୟ ବିଷୟରେ, ନିଜର ଜ୍ଞାନ ଲୁଚାଇଥିଲେ- ଯାହା ବର୍ତ୍ତମାନ ମିଥ୍ୟା ବୋଲି ବିବେଚନା କରାଯାଉଥିବା ତଥ୍ୟ ଉପରେ ଆଧାରିତ। ଏହାର ଉତ୍ତରରେ ଲେବିନିଜ୍ ନ୍ୟୁଟନ୍ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କ ଅନୁଗାମୀମାନଙ୍କ ଉପରେ ଅଭିଯୋଗ କରିଥିଲେ ଯେ, ସେମାନେ ଲେବିନିଜ୍‌ଙ୍କ ନିଜ କାଲକୁଲସ୍‌କୁ ଚୋରାଇ ଥିଲେ ଏବଂ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗରେ ତ୍ରୁଟି କରିଥିଲେ। 1716 ମସିହାରେ ଲେବିନିଜ୍‌ଙ୍କ ମୃତ୍ୟୁ ପରେ ମଧ୍ୟ ଅଭିଯୋଗ ଓ ପ୍ରତି -ଅଭିଯୋଗ ପୂର୍ଣ୍ଣ ମାତ୍ରାରେ ବିବାଦ ଭଲ ଚାଲିଥିଲା।

ବିବାଦରୁ କେହି ଭଲ ଭାବରେ ବାହାରକୁ ଆସିଲେ ନାହିଁ। ନ୍ୟୁଟନ୍ ଏବଂ ଲେବିନିଜ୍ ଉଭୟ ଅବିଶ୍ୱସନୀୟ ଗାଣିତିକ ଆବିଷ୍କାରରେ ସକ୍ଷମ ଥିଲେ, କିନ୍ତୁ ସେମାନଙ୍କର ବିଚାର ଦର୍ଶାଉଛି ଯେ ସେମାନେ ମଧ୍ୟ କିଛି ମାତ୍ରାରେ କମ୍ ପ୍ରଭାବଶାଳୀ ଆଚରଣ କରିବାକୁ ସକ୍ଷମ ଥିଲେ।

ପ୍ରକଳ୍ପ/ ବ୍ୟବହାରିକ/ କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ

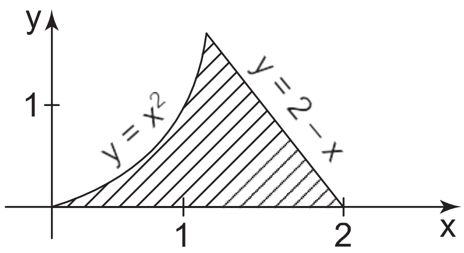
ପ୍ରକଳ୍ପ

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ବକ୍ରର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟର ସମୀକରଣ ଗଣନା କରିବା ପାଇଁ ପରିମେୟ ରେଖା ସମୂହର ଏନଭଲପକୁ ଗଣନା କରବା ପାଇଁ ନିଜସ୍ୱ ଲେଖା ସୃଷ୍ଟି କର।
   i. ପାରାବୋଲା $y = x^2$ ପାଇଁ $x(t) = t, y(t) = t^2$ ଯେଉଁରେ 't' ହେଉଛି ଏକ ପାରାମିଟର।
   ii. ଏଲିପ୍ସ $x^2 + 4y^2 = 4$ ପାଇଁ $x(t)=\frac{8t}{1+4t^2}$ ଏବଂ $y(t)=\frac{4t^2-1}{1+4t^2}$ ଯେଉଁରେ 't' ହେଉଛି ପାରାମିଟର। ଏହି ଇଭୋଲ୍ୟୁଟ ସହ ଅନୁରୂପ ବକ୍ରର ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର।
2. ବିଟା ଫଳନ ଏବଂ ଷ୍ଟ୍ରିଙ୍ଗ ସିଦ୍ଧାନ୍ତର ସମ୍ପର୍କ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କର।

ବ୍ୟବହାରିକ

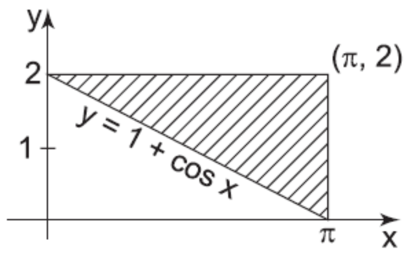
1. ବିଟା ଫଳନର -3D ପ୍ରତିବିମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର।
2. $\int_1^4 (x+6)\,dx$ ପାଇଁ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୀମାର କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଛାୟାଙ୍କିତ କର।
3. ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳଜର ବ୍ୟବହାର କରି ଦତ୍ତ ବକ୍ରର ଛାୟାକିତ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର:

a.



ଚିତ୍ର 1.36

b.



ଚିତ୍ର 1.37

4. ଏକ ପାରାବୋଲାର ଇଭୋଲ୍ୟୁଟକୁ ଅଙ୍କନ କରିବା ପାଇଁ ମ୍ୟାଟଲାବ(MATLAB)ର ସଂକେତ (କୋଡ) ଲେଖ।

କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ

1. ଗାମା ଫଳନ, ଓ କ୍ରମ ଗୁଣିତ ଫଳନକୁ କିପରି ଭାବେ ଅନ୍ତର୍ମୂଲ୍ୟାୟନ କରେ? (ଚିନ୍ତା ଓ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କର)
2. ଗାମା ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ର କିପରି ଦେଖାଯାଏ? [ସଙ୍କେତ: ପାଇଥନ୍ କୋଡ୍‌ର ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବେ]

ଅଧିକ ଜାଣନ୍ତୁ

1. ଯଦି f ଏକ ଯୁଗ୍ମ ଫଳନ ଏବଂ $\int_0^2 f(x)\,dx = k$, ତେବେ $\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) f\left(x+\frac{1}{x}\right) dx$ ମୂଲ୍ୟ ସହିତ ସମାନ ....

   a. 0 b. $2k$ c. k d. $4k$

2. ସମାକଳଜ $\int_{-5}^{5}(x-[x])\,dx$ ର ମୂଲ୍ୟ ହେଉଛି

   a. 0 b. 5 c. 10 d. 15

3. $\int_0^2 x^{[x]}\,dx$ ଏହାର ମୂଲ୍ୟ ହେଉଛି

   a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{3}{2}$ c. $\frac{5}{2}$ d. $\frac{7}{2}$

4. $\Gamma(0.1), \Gamma(0.2)\, \Gamma(0.3) \ldots \Gamma(0.9)$ ମୂଲ୍ୟ ହେଉଛି?

   a. $\frac{(2\pi)^{9/2}}{\sqrt{10}}$ b. $\frac{\pi^2}{\sqrt{10}}$ c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. $A = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx,\ B = \int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos x}$ ଅଭିସାରିତାର ପରୀକ୍ଷା କର।

6. $\int_0^4 \frac{dx}{x(4-x)}$ ଅଭିସାରିତାର ପରୀକ୍ଷା କର।

7. ମନେକର $\alpha = \int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}$, ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସତ୍ୟ?

   a. $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ b. α ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା

   c. $\log(\alpha) = 1$ d. $\sin(\alpha) = 1$

ଉତ୍ତରମାଳା

1.b 2.b 3.c 4. a

5. A, 8/3 ରେ ଅଭିସାରୀ ଏବଂ B, ∞ ରେ ଅପସାରୀ ଅଟେ। 6. ଅପସାରୀ 7. d

ସହାୟକ ଏବଂ ପରାମର୍ଶ ମୂଳକ ପଠନ

1. Courant R. (1988). Differential and Integral Calculus , Wiley, NewYork.
2. Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.
3. Fleming, W.H. (1965). Functions of Several Variables, Addison Wesley Publishing Company, Reading, MA.
4. Garg Reena (2019). Engineering Mathematics-I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P)Ltd.
5. Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers.
6. https://en.m.wikipedia.org/wiki/Evolute
7. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition, Narosa.
8. Philip, Franklin (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. NewYork.
10. Piskunov, N. (1969). Differential and Integral Calculus, MIR Publishers, Moscow.
11. Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.
12 Ram, Babu Engineering Mathematics, Pearson.
13. Thomas, G.B. and Finney, R.L. (2002). Calculus and Analytic Geometry, 9th edition, Pearson.
14. Tichmarsh, E.C. (1939). Theory of Functions, Oxford University Press, London.

2 କଳନ ଗଣିତ - 2

ଅଧ୍ୟାୟ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ରୋଲଙ୍କର (Rolle's) ପ୍ରମେୟର ଜ୍ୟାମିତିକ ବ୍ୟାଖ୍ୟା, ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ଏହାର ଜ୍ୟାମିତିକ ବ୍ୟାଖ୍ୟା, ଟେଲର ଏବଂ ମ୍ୟାକଲାରନ୍‌ଙ୍କର ଉପପାଦ୍ୟ ସହିତ ଅବଶେଷ, ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ ଏବଂ ଲୋପିତାଲଙ୍କ (L'Hospital) ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ ଇତ୍ୟାଦିର ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି। ବିଷୟକୁ ଠିକ ରୂପେ ବୁଝିବା ପାଇଁ ଅନେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ କରାଯାଇଛି। ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନଙ୍କ ସୁବିଧା ପାଇଁ ଅନେକ ଚିତ୍ର ପ୍ରଦାନ କରାଯାଇଛି।

ଯୁକ୍ତିଯୁକ୍ତତା

ଉପପାଦ୍ୟ ଗଣିତର ପ୍ରାଣ ପିଣ୍ଡ । ଉପପାଦ୍ୟ ସରଳ କିମ୍ବା ଜଟିଳ ହୋଇପାରେ। ଅନେକ ଉପପାଦ୍ୟ ଅଛି ଯାହାର ପ୍ରମାଣ ସୌନ୍ଦର୍ଯ୍ୟଭରା ଏବଂ ସଙ୍ଗୀତସମ । ଏହି ବିଷୟଗୁଡିକୁ ନେଇ ବିଚାର ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ହୋଇଥାଏ। ଅନେକ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗ ବିଭିନ୍ନ କ୍ଷେତ୍ରରେ କରାଯାଇ ଉପଯୋଗୀ ଆବଶ୍ୟକତା ଲବ୍ଧ ହୋଇଥାଏ । ଗତି ବିଜ୍ଞାନରେ ଲିମିଟ, ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା, ଅବକଳନୀୟତା ଇତ୍ୟାଦିର ବହୁଳ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଥାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଗୋଟିଏ ବଲକୁ ଶୂନ୍ୟକୁ ଫିଙ୍ଗିଲେ ତାହା ସର୍ବାଧିକ କେତେ ଦୂରତ୍ୱ ଓ ସର୍ବାଧିକ କେତେ ଉଚ୍ଚତା ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯାଇପାରିବ, ବ୍ୟବସାୟରେ କ୍ଷତି କିପରି ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବ ଓ ଲାଭ କିପରି ସର୍ବୋଚ୍ଚ ହେବ, ଏ ସବୁ ଜାଣିବାପାଇଁ କଳନ ଶାସ୍ତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ ଦ୍ୱାରା ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଓ ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ ସଫଳତାର ସହିତ ସମ୍ପାଦିତ ହୁଏ । ଏ ସବୁ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଗଣିତର କଳନ ଶାସ୍ତ୍ରର ସୁଦୂର ପ୍ରସାରୀ ପ୍ରୟୋଗ ବିଭିନ୍ନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବିଦ୍ୟମାନ । ଏତଦ୍‌ବ୍ୟତୀତ ଟେଲର ଉପପାଦ୍ୟ ମ୍ୟାକଲରିନ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗ ଦ୍ୟାରା ବିଭିନ୍ନ ଫଳନର ଅନନ୍ତ ସମ୍ପ୍ରସାରଣ କରାଯାଏ ଏବଂ ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆଂଶିକ ମାନ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ ପାଇଁ ଏହି ଉପପାଦ୍ୟ ଗୁଡିକ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଉପଯୋଗୀ ।

ପ୍ରକ୍-ଆବଶ୍ୟକତା :

1. ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନତା ଏବଂ ଅବକଳନୀୟତାର ଧାରଣା ।
2. ବିଶେଷ ପ୍ରକାରର ଫଳନ ଯଥା ମଡ୍, ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ, ହ୍ରାସମାନ ଫଳନ ଇତ୍ୟାଦି ଏବଂ ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳ(Open Interval) ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ(Closed interval)।
3. ଲିମିଟର ମୂଲ୍ୟାୟନ ଏବଂ ଏହାର କାର୍ଯ୍ୟକାରିତା ।
4. କିଛି ଫଳନ ଯଥା $\sin x, \cos x, \log(1+x), e^x$ ଇତ୍ୟାଦିର ସମ୍ପ୍ରସାରଣ ।

ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଧ୍ୟୟନ ପରେ, ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ନିମ୍ନଲିଖିତରେ ସକ୍ଷମ ହେବେ:

U2-01	ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କରି କୌଣସି ଫଳନର ଅବକଳନର ଗୁଣଧର୍ମକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବା।
U2-02	ଯେତେବେଳେ $x \to \infty$ ତେବେ ଫଳନ $f(x)$ର ଅନନ୍ତ ସ୍ପର୍ଶୀ ଆଚରଣ ନିର୍ଧାରଣ କରିପାରିବେ। ଏବଂ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା ଲିମିଟର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କରିପାରିବେ ।
U2-03	ଗରିଷ୍ଠ ଏବଂ ଲଘିଷ୍ଠ ବ୍ୟବହାର କରି ଫଳନର ବ୍ୟବହାର ବିଶ୍ଳେଷଣ କରିପାରିବେ ।
U2-04	ଟେଲର ଏବଂ 'ମ୍ୟାକଲାରନ୍‌ଙ୍କର ଉପପାଦ୍ୟ ଦ୍ୱାରା ବୀଜଗାଣିତିକ ଏବଂ ଅବୀଜୀୟ ଫଳନ ଗୁଡ଼ିକର ଶ୍ରେଣୀର ପ୍ରସାର ବିଷୟରେ ଜାଣିପାରିବେ ।

ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ ସହ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳର ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ

ଅଧ୍ୟାୟ-2 ଫଳାଫଳ	ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳ ଗୁଡ଼ିକ ସହିତ ଆଶା କରାଯାଉଥିବ ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ *(1- ଦୁର୍ବଳ ସହସମ୍ବନ୍ଧ; 2- ମଧ୍ୟମ ସହସମ୍ବନ୍ଧ; 3- ଦୃଢ ସହସମ୍ବନ୍ଧ)*				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U2-01	1	2	-	-	-
U2-02	1	3	-	-	-
U2-03	-	3	-	-	1
U2-04	-	3	-	-	-

ଇତିହାସ

ଭାସ୍କର ଦ୍ୱିତୀୟ (1114-1185)

17ତମ ଶତାବ୍ଦୀର ପୂର୍ବରୁ ଜ୍ୟାମିତିକ ସର୍ତ୍ତକୁ ପୂରଣ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ସଞ୍ଚାର ପଥକୁ 'ବକ୍ର' ଭାବରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ କରାଯାଉଥିଲା ଏବଂ ଜ୍ୟାମିତିକ ଅଙ୍କନ ଦ୍ୱାରା ସ୍ପର୍ଶରେଖା ଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରାପ୍ତ ହେଉଥିଲା। 1660 ମସିହାର ଶେଷଭାବରେ ଆଇଜାକ୍ ନ୍ୟୁଟନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା, ବକ୍ର ପାଇଁ ସ୍ପର୍ଶରେଖା ଏବଂ ଗତିଶୀଳ ବସ୍ତୁର ପରିବେଗ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ ଆବିଷ୍କୃତ ହୋଇଥିଲା। ରୋଲିଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ, ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ଏକ ଅଂଶ ଅଟେ। ଜଣେ ଭାରତୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞ ଭାସ୍କର-ଦ୍ୱିତୀୟ(1114-11185), ରୋଲିଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟକୁ ନିୟୋଜିତ କରିଥିବା ପ୍ରଥମ ବ୍ୟକ୍ତିଭାବରେ ମାନ୍ୟତା ପାଇଥିଲେ, ଏବଂ ଏହାର ନାମ ଫରାସୀ ଗଣିତଜ୍ଞ ମିଶେଲ ରୋଲି (1652-1719)ଙ୍କର ନାମ ଅନୁସାରେ ରଖାଗଲା ଏହି ଉପପାଦ୍ୟ ଅତ୍ୟୁଣ କଳନ ଗଣିତର ଏକ ଅଂଶ ଭାବରେ ବିବେଚନା କରାଯାଉଥିଲା। ଏବଂ ଅଷ୍ଟାଦଶ ଶତାବ୍ଦୀ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଅବକଳ କଳନ ଗଣିତ ଅଧୀନରେ ବର୍ଗୀକୃତ ହୋଇନଥିଲା। ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜି କେବଳ ରୋଲିଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରଥମ ଦୁଇଟି ସର୍ତ୍ତକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଏକ ଫଳାଫଳ ପ୍ରଦାନ କଲେ। ତେଣୁ ଏହାକୁ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜିଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ କୁହାଗଲା। କୋଶୀ ଅନ୍ୟଏକ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରଦାନ କରିଥିଲେ ଯେଉଁଥିରେ ସେ ଗୋଟିଏ ଫଳନ ବଦଳରେ ଦୁଇଟି ଫଳନ ବ୍ୟବହାର କରିଥିଲେ। ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜିଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ କୋଶୀ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଧିଷ୍ଟ ରୂପ ଅଟେ। ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟକୁ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର "ହାୟର ଅର୍ଡର" (ଉଚ୍ଚ ଘାତ) ଅବକଳଜ ବିସ୍ତାର ରୂପରେ ବିବେଚନା କରାଯାଇପାରେ। ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ବାସ୍ତବରେ ଜୋହନ ବର୍ଣ୍ଣଲିଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଆବିଷ୍କୃତ ହୋଇଥିଲା। 1955 ମସିହାରେ ଲୋପିତାଲ-ବର୍ଣ୍ଣଲିଙ୍କ ପତ୍ରବିନିମୟ ଜର୍ମାନୀରେ ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇଥିଲା।

2.1 ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ

କଥନ: ମନେକର ଏକ ଫଳନ $f, [a,b]$ ରେ ଏପରି ଭାବରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି ଯେପରି କି,

(i) f, ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[a,b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ।

(ii) f, ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $(a,,b)$ ରେ ଅବକଳନୀୟ ଅଟେ।

(iii) $f(a) = f(b)$ ତେବେ a ଏବଂ b ର ମଧ୍ୟରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟି ବାସ୍ତବିକ ସଂଖ୍ୟା c ଅଛି ଯେପରିକି $f'(c) = 0$

ପ୍ରମାଣ: ଯେହେତୁ f, $[a, b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ତଥା ପରିବଦ୍ଧ ଅଟେ ଏବଂ ନିଜର ସୀମାକୁ ପ୍ରାପ୍ତ କରିଥାଏ।

ମନେକର $\underset{x\in[a,b]}{Sup.} f(x) = M$ ଏବଂ $\underset{x\in[a,b]}{Inf.} f(x) = m$

ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନର ଗୁଣଧର୍ମରୁ, ସେଠାରେ c, $d \in [a,b]$, ଅଛି ଯେପରି କି

$f(c) = M$ ଏବଂ $f(d) = m$ [$\because$ ଯଦି ଏକ ଫଳନ $f(x)$ ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[a, b]$, ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ ଅଟେ, ତେବେ ସେ ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[a, b]$ରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ ଥରେ ନିଜର ଅଧିକତମ ଏବଂ ନିମ୍ନତମ ପ୍ରାପ୍ତ କରେ]

ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ପରିସ୍ଥିତି ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ।

ପରିସ୍ଥିତି : 1 ଯେତେବେଳେ $M = m$ ଅର୍ଥାତ୍ $Sup.f = Inf.f$

ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ $f(x) = M(= m)$ ମସ୍ତ $x \in [a,b]$ ପାଇଁ

$\Rightarrow$ f, $[a,b]$ ରେ ଗୋଟିଏ ଧ୍ରୁବକ ଫଳନ ଅଟେ

$\therefore$ $f'(x) = 0$ ସସସ୍ତ $x \in [a,b]$ ପାଇଁ

ତେଣୁ $f'(c) = 0$ ଯେଉଁଠାରେ $c \in (a,b)$

ପରିସ୍ଥିତି: 2 ଦତ୍ତଅଛି $f(a) = f(b)$ ଯେତେବେଳେ $M \neq m$

$\therefore$ M କିମ୍ବା n, $f(a)=f(b)$ ଠାରୁ ଭିନ୍ନ ହେଲେ

ମନେକର $M \neq f(a)$ ଓ $M \neq f(b)$

ଯେପରି $f(c) = M$, ତେବେ $c \neq a$, $c \neq b$ ତେଣୁ $a < c < b$

$\therefore$ ଯେହେତୁ $f(c) = M = \underset{x \in [a,b]}{Sup.} f(x)$

ତେଣୁ, $f(x) \leq f(c)$ ସମସ୍ତ $x \in [a,b]$ ପାଇଁ ... (1)

(1) ରୁ $f(c-h) \leq f(c)$

$\therefore$ $f(c-h) - f(c) \leq 0$

$-h < 0$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକରି, ଆମେ ପାଉ $\dfrac{f(c-h) - f(c)}{h} \geq 0$

Limit $h \to 0$ ନିଆଗଲେ, $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(c-h) - f(c)}{-h} \geq 0$

$\Rightarrow$ $L.f'(c) \geq 0$ . . . (2)

ପୁନର୍ବାର (1), ରୁ $f(c+h) \leq f(c)$

$\therefore$ $f(c+h) - f(c) \leq 0$

$h > 0$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକରି, ଆମେ ପାଉ $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$

Limit $h \to 0$ ନେଲେ, $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$

$\Rightarrow$ $R.f'(c) \leq 0$ ... (3)

ଯେହେତୁ $f'(c)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି

$\therefore \quad L.f'(c) = R.f'(c) = f'(c)$

ଏହା ସେତେବେଳେ ସମ୍ଭବ, ଯେତେବେଳେ $f'(c) = 0$.

ଏହି ପ୍ରକାରରେ ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା $f'(d) = 0$, ଯେତେବେଳେ $d \in (a,b)$

ତେଣୁ ଅତି କମରେ ଗୋଟିଏ $c \in (a,b)$ ଅଛି ଯେପରି $f'(c) = 0$.

ଏହା ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ କରେ

ମନ୍ତବ୍ୟ: ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ପ୍ରମାଣରେ, ଆମେ କିଛି ଶବ୍ଦ ବ୍ୟବହାର କରିଥିଲୁ (ଯେପରି Sup Inf) ଏଠାରେ ଆମେ ସେମାନଙ୍କର ଏକ ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ବିବରଣୀ ଦେଉଛୁ ।

1. **କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ପରିବନ୍ଧ (ସୁପ୍ରିମମ): ସଂଜ୍ଞା** ମନେକର S, R ର ଗୋଟିଏ ଅଣଶୂନ୍ୟ ଉପସେଟ୍ । ଏକ ବାସ୍ତ ସଂଖ୍ୟା u କୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ପରିବନ୍ଧ କିମ୍ବା $(l.u\,b.)$ କିମ୍ବା S ର ସୁପ୍ରିମମ କୁହାଯାଏ ଯଦି

   (i) $x \le u \; \forall \; x \in S$ ଅର୍ଥାତ୍, u, S ର ଏକ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ପରିବନ୍ଧ।

   (ii) ଯଦି v, S ର ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ପରିବନ୍ଧ, ତେବେ $u \le v$.

2. **ବୃହତ୍ତମ ନିମ୍ନ ପରିବନ୍ଧ (ଇନଫିମମ୍): ସଂଜ୍ଞା** ମନେକର S, R ର ଗୋଟିଏ ଅଣଶୂନ୍ୟ ଉପସେଟ୍ ଅଟେ। ବାସ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ℓ କୁ ବୃହତ୍ତମ ନିମ୍ନପରିବନ୍ଧ (g.l.b.) କିମ୍ବା S ର ଇନଫିମମ୍ କୁହାଯାଏ ଯଦି:

   (i) $l \le x \; \forall \; x \in S$ ଅର୍ଥାତ, l, S ର ନିମ୍ନ ପରିବନ୍ଧ ।

   (ii) ଯଦି l', S ର କୌଣସି ନିମ୍ନ ପରିବନ୍ଧ ତେବେ, $l' \le l$. ଅନ୍ୟ ଶବ୍ଦରେ l ଠାରୁ ବଡ କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା S ର ନିମ୍ନ ପରିବନ୍ଧ ନୁହେଁ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୁପ :

1. ଯଦି $S = (0,1)$, ତେବେ ସ୍ପଷ୍ଟ ଭାବରେ $0 < x < 1 \; \forall \; x \in S$ ଆଉ ମଧ୍ୟ, $x < 2 \; \forall \; x \in S$.

   $\therefore$ 2, 3, 4... ଏହି ପରି S ର ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ପରିବନ୍ଧ ଅଟନ୍ତି । କିନ୍ତୁ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 1 କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ପରିବନ୍ଧ ଅଟେ।

   $\therefore$ 1, S ର $l.U.b$ ଏବଂ $1 \notin S$. ସେହିପରି $-1 < x \; \forall \; x \in S$

   $\therefore$ $-1, -2, -3, \ldots$ ଏବଂ ଏହିପରି S ର ନିମ୍ନ ପରିବନ୍ଧ ଅଟେ, କିନ୍ତୁ ସମସ୍ତଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 'O' ସବୁଠାରୁ ବଡ଼।

   $\therefore$ '0', S ର $g.l.b$ ଏବଂ $0 \notin S$.

2. ଯଦି $S = [0,1]$ ହୁଏ, ତେବେ $0 \le x \le 1 \; \forall \; x \in S$.

   ଏଠାରେ 1, S ର (l. u .b.) ଅଟେ ଏବଂ $1 \in S$. ଆଉ ମଧ୍ୟ, 0, S ର $g.l.b$ ଅଟେ ଏବଂ $0 \in S$

ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ତଥ୍ୟ:

(i) ଯଦି ଗୋଟିଏ ସେଟର $l.u.b$ କିମ୍ବା $g.l.b$ ଅଛି ତେବେ ତାହା ଅନନ୍ୟ ଅଟେ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ସେଟର $l.u.b$ କିମ୍ବା $g.l.b$ ସେଟର ଉପାଦାନ ହେଇପାରେ କିମ୍ବା ନ ହେଇପାରେ ।|

(iii) ଗୋଟିଏ ସେଟର $l.u.b$ (ସୁପ୍ରିମମ)ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଥାଇପାରେ କିମ୍ବା ନଥାଇ ପାରେ ଯେପରି Sup(N)ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ।

(ଏଠାରେ, N : ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ).

(IV) ଏକ ସେଟର g.l.b (ଇନଫିମମ)ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଥାଇପାରେ କିମ୍ବା ନଥାଇପାରେ ଯେପରି Inf (z) ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ ।

(ଏଠାରେ, Z ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ).

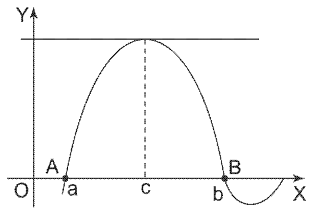
2.1.1 ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ଜ୍ୟାମିତିକ ବ୍ୟାଖ୍ୟା

ମନେକର ବକ୍ର $y = f(x)$

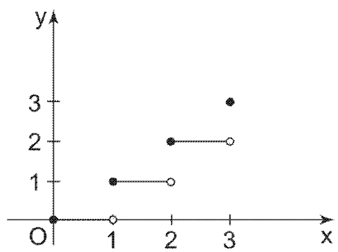
(i) ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[a,b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ

(ii) ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳ (a, b) ରେ ଅବକଳନୀୟ ଅଟେ।

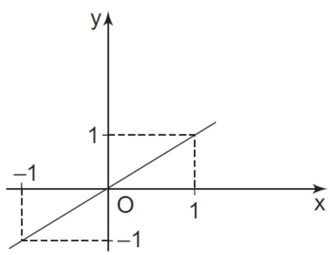
(iii) $f(a) = f(b)$ ଏହାର ଅର୍ଥ ହେଉଛି ଏଠାରେ ଅତି କମରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ $c \in (a,b)$ ଅଛି, ଯେଉଁଠାରେ ସ୍ପର୍ଶରେଖା x-ଅକ୍ଷ ସହିତ ସମାନ୍ତର ଅଟେ ।



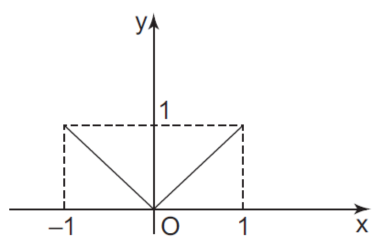
ଚିତ୍ର 2.1



ଚିତ୍ର 2.2



ଚିତ୍ର 2.3



ଚିତ୍ର 2.4

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ:

1. $f(x) = [x]$, $[0,3]$ ରେ ବୃହତ୍ତମ ପୂର୍ଣ୍ଣାଙ୍କ ଫଳନ ଅଟେ।

f, $x = 1, 2, 3$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ନୁହେଁ [ଗ୍ରାଫରେ ବିରାମ (ବ୍ରେକ୍)]

$\therefore$ ରୋଲଙ୍କର ଉପପାଦ୍ୟ ଲାଗୁ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ ।

2. $f(x)=x$, ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[-1, 1]$ରେ

f, $[-1, 1]$ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ। f, $(-1, 1)$ରେ ଅବକଳନୀୟ ଅଟେ।

କିନ୍ତୁ $f(-1) \neq f(1)$ \ ରୋଲଙ୍କର ଉପପାଦ୍ୟ ଲାଗୁ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ।

3. $f(x)=|x|$, ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[-1,1]$ ରେ

$[-1,1]$ରେ f ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ

କିନ୍ତୁ $f, x=0$ରେ ଅବକଳନୀୟ ନୁହେଁ

$\therefore$ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ଲାଗୁ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 2.1. ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ [2.4]ରେ $f(x)=x^3-9x^2+26x-24$ ପାଇଁ ରୋଲିଙ୍କର ଉପପାଦ୍ୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $f(x)=x^3-9x^2+26x-24$, $f(x)$, x ର ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ ଅଟେ। ତେଣୁ ସମସ୍ତ x ପାଇଁ ଏହା ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ ଅବକଳନୀୟ ଅଟେ।

$\Rightarrow$ a. $f(x)$, ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[2,4]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ।

b. $f(x)$, ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $(2,4)$ ରେ ଅବକଳନୀୟ ଅଟେ।

c. $f(2)=(2)^3-9(2)^2+26(2)-24=0$

$f(4)=(4)^3-9(4)^2+26(4)-24=0$

ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ସମସ୍ତ ତିନୋଟି ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ ହେଲା।

ତେଣୁ ଏଠାରେ ଅତି କମରେ ଗୋଟିଏ $c \in (2,4)$ ରହିବା ନିଶ୍ଚିନ୍ତ ଯେପରିକି $f(c)=0$

ଆମର ଅଛି, $f'(x)=3x^2-18x+26$

$\Rightarrow$ $f'(c)=3c^2-18c+26$

ତେଣୁ, $f'(c)=0$

$\Rightarrow$ $c=\dfrac{18\pm\sqrt{324-312}}{6}$

$=3\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$c=3\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\in(2,4)$

ତେଣୁ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା ହେଲା।

ଉଦାହରଣ 2.2. ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ ରେ $f(x)=\cos 2x$ ପାଇଁ ରୋଲିଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $f(x)=\cos 2x$

a. ଯେହେତୁ ଆମେ ଜାଣୁଯେ cosine ଫଳନ ସମସ୍ତ x ର ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ତେଣୁ $f(x)$ ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

b. $f'(x)=-2\sin 2x =$ ସସୀମ, ସଂଜ୍ଞାକୃତ

$\therefore\ f(x),\ \left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ ରେ ଅବକଳନୀୟ ଅଟେ ।

c. ବର୍ତ୍ତମାନ $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

ଏବଂ $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$\therefore\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ସମସ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ ହେଲା

ତେଣୁ ଏଠାରେ C ର ଅତି କମରେ ଗୋଟିଏ ମୂଲ୍ୟ $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ ରେ ନିଶ୍ଚିନ୍ତ ଅଛି ଯେପରି $f'(c)=0$

ବର୍ତ୍ତମାନ $f'(c)=-2\sin 2c=0 \Rightarrow \sin 2c=0$

$\sin 2c=\sin 0 \quad\Rightarrow\quad 2c=0 \Rightarrow c=0$

$c=0\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

ତେଣୁ, ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା ହେଲା।

ଉଦାହରଣ 2.3 ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[-3,0]$ ରେ $f(x)=x(x+3)e^{-x/2}$ ପାଇଁ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ପରୀକ୍ଷା କର।

ଉତ୍ତର: ଏଠାରେ $f(x)=x(x+3)e^{-x/2}$

a. ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $x(x+3)$ ଏବଂ ପଲିନୋମିଆଲର ଫଳନ ଏବଂ $e^{-x/2}$, ଘାତାଙ୍କୀ ଫଳନ ଉଭୟ ସବୁଠାରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ତେଣୁ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ମଧ୍ୟ $[-3,0]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

b. $$f'(x) = xe^{-\frac{x}{2}} + (x+3)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x(x+3)}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \left(2x+3-\frac{x(x+3)}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \left(\frac{x+6-x^2}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

$f'(x)$, $(-3,0)$ ରେ ଅନନ୍ୟ ରୂପେ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି ଏବଂ $f(x)$, $(-3,0)$ ରେ ଅବକଳନୀୟ ଅଟେ ।

c. $$f(-3) = -3(-3+3)e^{\frac{3}{2}} = 0$$

ଏବଂ $f(0) = 0\ (0+3)e^{0/2} = 0$

ତେଣୁ $f(-3) = f(0) = 0$

$\therefore$ ତେଣୁ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟରେ ସମସ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ ହେଲା।

ତେଣୁ ଏଠାରେ ଅତି କମରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ $c \in (-3,0)$ ରେ ନିଶ୍ଚିତ ବିଦ୍ୟମାନ ଯେପରି $f'(c) = 0$

$$\therefore \quad f'(c) = \left(\frac{c+6-c^2}{2}\right)e^{-\frac{c}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c+6-c^2}{2} = 0, \quad e^{-\frac{c}{2}} \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad c^2 - c - 6 - = 0$$

$$\Rightarrow \quad c = 3, -2$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\quad c = -2 \in (-3,0)$

ତେଣୁ, ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା ହେଲା ।

ଉଦାହରଣ 2.4. ଫଳନ $f(x) = \begin{cases} -4x+5, & 0 \le x \le 1 \\ 2x-3, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ ପାଇଁ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ପ୍ରଯୁଜ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

ଉତ୍ତର: ଏଠାରେ $f(x) = \begin{cases} -4x+5, & 0 \le x \le 1 \\ 2x-3, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

ଆମର ଅଛି, $\quad f(1) = 1$

$x = 1$, ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନତା;

$$Rf(1) = \lim_{x \to 1^+}(2x-3) = \lim_{h \to 0} 2(1+h) - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$Lf(1) = \lim_{x \to 1^-}(-4x+5) = \lim_{h \to 0} -4(1-h) + 5 = -4 + 5 = 1$$

ତେଣୁ $Rf(1) \neq Lf(1)$ $\therefore f(x), x=1 \in [0,2]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ନୁହେଁ

ତେଣୁ, ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ।

ଉଦାହରଣ 2.5. ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[-2,2]$ ରେ $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ପାଇଁ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ, $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[-2,2]$ ରେ $f(x)$, ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ x ର ବର୍ଗମୂଳ ଅଟେ।

ତେଣୁ ସମସ୍ତ x ପାଇଁ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ।

(i) $f(x)$, $[-2,2]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ।

(ii) $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ ସବୁଠାରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଛି, ଯେଉଁଠାରେ $4-x^2=0$ ଅର୍ଥାତ୍ $x=\pm 2$ ବ୍ୟତୀତ
ତେଣୁ, $f'(x)$, $R-\{-2,2\}$ ରେ ଅବକଳନୀୟ ଅଟେ।

$\therefore f'(x)$, $(-2,2)$ ରେ ଅବକଳନୀୟ ଅଟେ।

(iii) ବର୍ତ୍ତମାନ $f(-2)=\sqrt{4-(-2)^2}=\sqrt{4-4}=0$

$f(2)=\sqrt{4-(2)^2}=\sqrt{4-4}=0$ ତେଣୁ $f(-2)=f(2)$

$\therefore$ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ସମସ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ ହେଲା।

ତେଣୁ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ $c \in (-2,2)$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିଶ୍ଚିନ୍ତ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି ଯେପରିକି $f'(c)=0$

$\Rightarrow f'(c)=\frac{-c}{\sqrt{4-c^2}}=0$, $c=0 \in (-2,2)$

ତେଣୁ, ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା ହେଲା।

ଉଦାହରଣ 2.6. $[-1,-1]$ ରେ ଫଳନ $f(x)=\log(x^2+2)-\log 3$ ପାଇଁ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ବ୍ୟବହାର କରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ $c \in (-1,1)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $f(x)=\log(x^2+2)-\log 3$

a. ଯେହେତୁ ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, ସମସ୍ତ x ପାଇଁ ଲଗାରିଦମୀୟ ଫଳନ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ଏବଂ $\log 3$ ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଅଟେ, ତେଣୁ ସମସ୍ତ x ପାଇଁ $f(x)$ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ, ତେଣୁ $[-1,1]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ।

b. $f'(x)=\frac{2x}{x^2+2}$ (ସମସ୍ତ $x \in R$ ପାଇଁ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି)

$\therefore$ $f'(x)$, $(-1,1)$ ରେ ଅବକଳନୀୟ

c. ବର୍ତ୍ତମାନ $f(-1)=\log((-1)^2+2)-\log 3=\log 3-\log 3=0$

ଏବଂ $f(1)=\log\left((1)^2+2\right)-\log 3=\log 3-\log 3=0$

$\Rightarrow \quad f(-1)=f(1)$

ତେଣୁ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ସମସ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ ହେଲା।

ତେଣୁ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ $c\in(-1,1)$ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି ଯେପରିକି $f'(c)=0$

$$f'(c)=\frac{2c}{c^2+2}=0$$

$\Rightarrow \quad c=0\in(-1,1)$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 2.1

1. ଦତ୍ତ ଅନ୍ତରାଳରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଫଳନ ପାଇଁ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ସତ୍ୟତାର ପରୀକ୍ଷା କର

a). $[1,3]$ ରେ, $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

b). $[-4,5]$ ରେ, $f(x)=x^3+3x^2-24x-80$

c). $[-1,4]$ ରେ, $f(x)=\dfrac{x^3-3x-4}{x-5}$

d). $\left[0,-\dfrac{\pi}{2}\right]$ ରେ $f(x)=\cos 2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

e). $[0,\pi]$ ରେ, $f(x)=\sin x-\sin 2x$

f) . $[-1,1]$ ରେ, $f(x)=e^{1-x^2}$

g) . $[0,\pi]$ ରେ, $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$

h). $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ ରେ, $f(x)=e^x\cos x$

i) . $[0,\pi]$ ରେ, $f(x)=\tan x$

j). $[1,3]$ ରେ, $f(x)=\left(x^2-4x+3\right)e^{2x}$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଫଳନ ପାଇଁ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ପ୍ରଯୁଜ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର।

a) $[0,3]$ ରେ, $f(x)=(x-1)^{\frac{2}{5}}$

b). $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & 0\le x\le 1\\ 3-x, & 1<x\le 2\end{cases}$

c) $[-1,1]$ ରେ, $f(x)=|x|$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. a. $c=2\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b. $c=2$ c. $c=5-\sqrt{6}$ d. $c=\dfrac{\pi}{4}$

e. $c=\cos^{-1}\left(\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{8}\right)$ f. $c=0$ g. $c=\dfrac{\pi}{4}$ h. $c=\dfrac{\pi}{4}$

i. ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ j. $c=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

2. a. ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ b. ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ c. ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ

2.1.2: ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ

କଥନ: ଯଦି ଏକ ଫଳନ $f:[a,b]\to R$ ଯେପରିକି :

i) f, ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[a,b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ii) f, ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳ (a,b)ରେ ଅବକଳନୀୟ ହୁଏ, ତେବେ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ $c\in(a,b)$

ବିଦ୍ୟମାନ ହେବ ଯେପରି କି $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

ପ୍ରମାଣ: ମନେକର ଏକ ଫଳନ $\phi:[a,b]\to R,\ \phi(x)=f(x)+Ax,\ x\in(a,b)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହେଲା ଯେଉଁଠାରେ 'A' ଏକ ଧ୍ରୁବକ ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ କରାଯିବ ଯେପରିକି

$$\phi(a)=\phi(b) \quad \ldots (1)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ
$$\phi(a)=f(a)+Aa$$
$$\phi(b)=f(b)+Ab$$

ସମୀକରଣ (1)କୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ପାଇବା :

$$f(a)+Aa=f(b)+Ab$$
$$A(a-b)=f(b)-f(a)$$
$$A=\frac{f(b)-f(a)}{a-b}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ,

i) ϕ, $[a, b]$ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ, ଯେହେତୁ f, $[a,b]$ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ Ax, xର ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ ତେଣୁ f, $[a,b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ।

ii) ϕ, (a, b)ରେ ଅବକଳନୀୟ ଅଟେ, ଯେହେତୁ f, (a, b)ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁରେ ଅବକଳନୀୟ ଏବଂ Ax ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁରେ ମଧ୍ୟ ଅବକଳନୀୟ ଅଟେ ।

iii) $\phi(a)=\phi(b)$, $\phi(x)$ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ସମସ୍ତ ତିନୋଟି ସର୍ତ୍ତକୁ ପୂରଣ କରୁଛି।

ତେଣୁ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ $c\in(a,b)$ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି, ଯେପରି $\phi'(c)=0$

$$\phi(x)=f(x)+Ax$$

$\Rightarrow \quad \phi'(x)=f'(x)+A \quad \Rightarrow \quad \phi'(c)=f'(c)+A$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\quad \phi'(c)=0$

$\Rightarrow \quad f'(c)+A=0\Rightarrow f'(c)=-A$

ସମୀକରଣ (2)କୁ ବ୍ୟବହାର କରି, ଆମେ ପାଉ,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ c\in(a,b) \text{ ପ୍ରମାଣିତ}$$

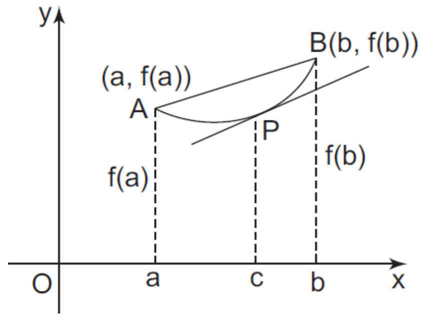
2.1.3 ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ଜ୍ୟାମିତିକ ବ୍ୟାଖ୍ୟା

ମନେକର ଏକ ଫଳନ f ର ଏକ ଗ୍ରାଫ ଅଛି ଯାହାକି:

i) ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[a, b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ii) ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳ (a, b)ରେ ଅବକଳନୀୟ

ଯେହେତୁ ବକ୍ର $A\ B$ ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁରେ ଏକ ସ୍ପର୍ଶରେଖା ଅଛି, ତେବେ A ଏବଂ B ବ୍ୟତିତ, ବକ୍ରରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଏହିପ୍ରକାର ହେବ ଯେଉଁଠାରେ ସ୍ପର୍ଶରେଖା ବିନ୍ଦୁ $(a, f(a))$ ଏବଂ $(b, f(b))$ କୁ ଯୋଗକରି ଉତ୍ପନ୍ନ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସହିତ ସମାନ୍ତର ଅଟେ ।



ଚିତ୍ର 2.5

ମନ୍ତବ୍ୟ: ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ଏକ ବିଶେଷ ସ୍ଥିତି ଅଟେ ।

ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ଦୁଇଟି ସର୍ତ୍ତ ସହିତ, ଯଦି

$$f(a) = f(b)$$

ତେବେ $f(b) - f(a) = 0$ ତେଣୁ $f'(c) = 0$

ଜ୍ୟାମିତିକ ବ୍ୟାଖ୍ୟାରେ, ବକ୍ର ରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ଯେଉଁଠାରେ ସ୍ପର୍ଶରେଖା x- ଅକ୍ଷ ସହିତ ସମାନ୍ତର ଅଟେ ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 2.7. ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[1, 3]$ରେ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ପାଇଁ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ, $f(x) = x + \frac{1}{x}$

i) $f(x)$, x ର ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ ଏବଂ ସମସ୍ତ $x \in \Re - \{0\}$ ର ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

$\therefore$ $f(x)$, $[1,3]$ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ii) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ ସମସ୍ତ $x \in (1, 3)$ ପାଇଁ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି।

$\therefore$ $f(x)$, $(1, 3)$ରେ ଅବକଳନୀୟ

ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ଉଭୟ ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ ହେଲା।

ତେଣୁ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ $c \in (1, 3)$ ରେ ନିଶ୍ଚିନ୍ତ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି, ଯେପରି କି

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

ସମୀକରଣ: (1)ରେ $f(b), f(a), f'(c)$ ର ମୂଲ୍ୟ ରଖିଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$\frac{\frac{10}{3}-2}{3-1}=1-\frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{c^2}=\frac{1}{3} \Rightarrow c=\pm\sqrt{3}$$

$$c=\sqrt{3}\in(1,3)$$

ତେଣୁ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା ହେଲା ।

ସମାଧାନ 2.8. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)},\ x>0$

ଉତ୍ତର: ମନେକର, $f(x)=\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$

x ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)$$

$$=\frac{x^2}{1+x}>0 \qquad \{\because x>0\}$$

ତେଣୁ $f(x)$ ସମସ୍ତ $x>0$ ପାଇଁ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ ଅଟେ

ଆଉ ମଧ୍ୟ $f(0)=0$

ତେଣୁ, $x>0$ ପାଇଁ $f(x)>0$

ତେଣୁ $\log(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$ ... (1)

ମନେକର: $g(x)=x-\frac{x^2}{2(1+x)}-\log(1+x)$

x ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ

$$g'(x)=1-\frac{2x+x^2}{2(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}$$

$$=\frac{x^2}{2(1+x)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2>0$$

$\therefore\ g(x)$, ସମସ୍ତ $x>0$ ପାଇଁ ବିର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ ଅଟେ,

ଆଉ ମଧ୍ୟ, $x>0$ ପାଇଁ $g(x)>0$

ତେଣୁ $x-\frac{x^2}{2(1+x)}>\log(1+x)$ ... (2)

ସମୀକରଣ (1) ଏବଂ (2) ରୁ, ଆମେ ପାଉ,

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)}, x>0 .$$

ଉଦାହରଣ 2.9. ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[0,3]$ ରେ, ଫଳନ $f(x)=\begin{cases}1+3x, & x\le 1\\ 2x^2+2, & x>1\end{cases}$ ପାଇଁ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ବିଧିମାନ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $[0,3]$ ରେ, $f(x)=\begin{cases}1+3x, & x\le 1\\ 2x^2+2, & x>1\end{cases}$

i. ପଲିନୋମିଆଲ ଫଳନ ହୋଇ $f(x)$, $[0,3]-\{1\}$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ $x=1$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନତା

$$Rf(1)=\lim_{x\to 1}2x^2+2=\lim_{h\to 0}2(1+h)^2+2=4$$

$$Lf(1)=\lim_{x\to 1}1+3x=\lim_{h\to 0}1+3(1-h)=4$$

ଆଉ ମଧ୍ୟ, $f(1)=4$

ଆମର ଅଛି $Rf(1)=Lf(1)=f(1)$

$\Rightarrow x=1$ ରେ $f(x)$ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ।

$\therefore$ $f(x)$, $[0,3]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ।

ii. $[0,3]$ ରେ, $f'(x)=\begin{cases}3, & x\le 1\\ 4x, & x>1\end{cases}$

$x=1$ ରେ ଅବକଳନୀୟତା :

$$Rf'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4(1+h)-4}{h}=4$$

$$Lf'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}$$

$Lf'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{3-4}{h}=$ ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ।

$\Rightarrow$ $x=1\in(0,3)$, ପାଇଁ $f'(x)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ

$f(x)$, $(0,3)$ ରେ ଅବକଳନୀୟ ନୁହେଁ

ତେଣୁ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ଲାଗୁ ହୋଇ ପାରିବ ନାହିଁ।

ଉଦାହରଣ 2.10. ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ରେ $f(x)=\cos x$ ପାଇଁ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ, $f(x)=\cos x$

i. ଯେହେତୁ ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ସମସ୍ତ x ର ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ cosine ଫଳନ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

$\therefore \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ରେ $f(x)$ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ।

ii. $f'(x) = -\sin x$ (ସିମୀତ ଓ ନିର୍ଦ୍ଧିଷ୍ଟ)

$\therefore f(x), \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ରେ ଅବକଳନୀୟ ।

ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ଉଭୟ ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ ହେଲା।

ତେଣୁ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ରେ ନିଶ୍ଚିନ୍ତ ଅଛି ଯେପରି କି $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

ଏଠାରେ, $b = \frac{\pi}{2}, a = 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0, f(0) = \cos 0 = 1$

ମୂଲ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକ ରଖିଲେ, $\Rightarrow \frac{0-1}{\frac{\pi}{2}-0} = -\sin c$

$\Rightarrow \quad c = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right) \qquad \Rightarrow \quad c = \sin^{-1}(0.636) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ତେଣୁ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜ ମାଧମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା ହେଲା।

ଉଦାହରଣ 2.11. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \; x > 0$

ସମାଧାନ: ମନେକର $f(x) = \tan^{-1} x - \frac{x}{1+x^2}$

x ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$= \frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} > 0 \; \forall x > 0$$

ତେଣୁ ସମସ୍ତ $x > 0$ ପାଇଁ $f(x)$ ଏକ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ ଅଟେ

ଆଉ ମଧ୍ୟ $f(0) = 0$ (ଯେହେତୁ $\tan^{-1} 0 - 0 = 0$)

ତେଣୁ $f(x) > 0 \; \forall \; x > 0$

ତେଣୁ $\tan^{-1} x > \frac{x}{1+x^2}$ ...(1)

ମନେକର, $g(x) = x - \tan^{-1} x$

x ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0 \, \forall x > 0$$

$\therefore$ ସମସ୍ତ $x > 0$ ପାଇଁ $g(x)$, ଏକ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ ଅଟେ ।

ଆଉ ମଧ୍ୟ, $g(0) = 0 - \tan^{-1} 0 = 0$

ତେଣୁ $g(x) > 0 \ \forall \ x > 0$

ତେଣୁ, $x > \tan^{-1} x \, \forall \, x > 0$ ...(2)

ତେଣୁ ସମୀକରଣ (1) ଏବଂ (2)ରୁ, ଆମେ ପାଉ

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \ x > 0$$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 2.2

1. ଦତ୍ତ ଅନ୍ତରାଳରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଫଳନ ପାଇଁ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

 a. $[1,3]$ରେ, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
 b. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ରେ, $f(x) = x(x-1)(x-2)$
 c. $[1,4]$ରେ, $f(x) = \frac{1}{4x-1}$
 d. $[-3,4]$ ରେ, $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$
 e. $[1,e]$ରେ, $f(x) = \log x$
 f. $[-\pi,\pi]$ ରେ, $f(x) = x - 2\sin x$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଫଳନ ପାଇଁ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରଯୁଜ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର

 a. $[-1,1]$ରେ $f(x) = |x|$
 b. $[a,b]$ ରେ $f(x) = \beta$ (ଧ୍ରୁବକ ଫଳନ)
 c. $[-1,1]$ରେ, $f(x) = x^{1/3}$
 d. $[-3,4]$ରେ, $f(x) = |x+2|$

3. ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି ପ୍ରମାଣ କର ଯେ:

 a. ଅନ୍ତରାଳ $[-1,0]$ରେ, $\frac{x^2}{2} < x - \log(1+x) < \frac{x^2}{2(1+x)}$
 b. $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x, \ x > 0$
 c. $1 + x < e^x < 1 + xe^x$ ସମସ୍ତ $x > 0$ ପାଇଁ

4. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\frac{y-x}{1+y^2} < \tan^{-1} y - \tan^{-1} x < \frac{y-x}{1+x^2}$ ଯଦି $0 < x < y$ ଏବଂ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ କର ଯେ

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \tan^{-1}\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. a. $c = 2$ b. $c = \frac{6-\sqrt{21}}{6}$ c. $c = \frac{1+3\sqrt{5}}{4}$

   d. $c = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e. $c = e-1$ f. $c = \pm\frac{\pi}{3}$

2. a. ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ b. ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ c. ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ d. ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ

2.1.4 କୋଶୀଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ

କଥନ: ମନେକର ଫଳନ $f:[a,b]\to R$ ଏବଂ $g:[a,b]\to R$ ଯେପରିକି :

i) f ଏବଂ g ଉଭୟ ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[a,b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ii) f ଏବଂ g ଉଭୟ ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳ (a,b) ରେ ଅବକଳନୀୟ ।

iii) ସମସ୍ତ $x\in(a,b)$ ପାଇଁ $g'(x)\neq 0$ ତେବେ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ $c\in(a,b)$ ଅଛି । ଯେପରି କି:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ପ୍ରମାଣ: ମନେକର $g(a)=g(b)$, ତେବେ 'g' ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ସମସ୍ତ ସର୍ତ୍ତକୁ ପୂରଣ କରିବ।

ତେଣୁ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ $c\in(a,b)$ ଅଛି ଯେପରି କି $g'(c)=0$

କିନ୍ତୁ ଏହା ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟ $g'(c)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$ କୁ ବିରୋଧ କରୁଛି । ତେଣୁ ଆମର କଳ୍ପନା କରିବା ଭୁଲ ଅଛି ଏବଂ $g(a)\neq g(b)$

ବର୍ତ୍ତମାନ, ଏକ ଫଳନ $\phi:[a,b]\to R$ କୁ $\phi(x)=f(x)+Ag(x), x\in(a,b)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିବା ଯେଉଁଠାରେ A ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଏବଂ ଏହିପ୍ରକାରରେ ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ କରାଯାଇଛି ଯେପରିକି

$$\phi(a)=\phi(b) \qquad \dots (1)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\phi(a)=f(a)+Ag(a)$

$$\phi(b)=f(b)+Ag(b)$$

ସମୀକରଣ (1)କୁ ବ୍ୟବହାର କରି, ଆମେ ପାଇବା :

$$f(a)+Ag(a)=f(b)+Ag(b) \Rightarrow A\left[g(a)-g(b)\right]=f(b)-f(a)$$

$$A=\frac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(b)} \qquad \dots (2)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, i) ϕ, ଅନ୍ତରାଳ $[a,b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ, ଯେହେତୁ f ଏବଂ g ଉଭୟ ଅନ୍ତରାଳ $[a,b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ । ଏବଂ A, ଯେହେତୁ ଧ୍ରୁବକ $[a,b]$ ରେ ମଧ୍ୟ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ii) ϕ, (a,b) ରେ ଅବକଳନୀୟ, ଯେହେତୁ f ଏବଂ g ଉଭୟ (a,b) ରେ ଅବକଳନୀୟ ଏବଂ A, ଯେହେତୁ ଧ୍ରୁବକ (a,b) ରେ ମଧ୍ୟ ଅବକଳନୀୟ।

iii) ଆଉ ମଧ୍ୟ, $\phi(a) = \phi(b)$

ତେଣୁ, $\phi(x)$ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ସମସ୍ତ ତିନୋଟି ସର୍ତ୍ତକୁ ପୂରଣ କରୁଛି।

ତେଣୁ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଏକ $c \in (a,b)$ ଅଛି ଯେପରି କି $\phi'(c) = 0$

$\phi(x) = f(x) + Ag(x)$

$\Rightarrow \quad \phi'(x) = f'(x) + Ag'(x) \quad \Rightarrow \quad \phi'(c) = f'(c) + Ag'(c)$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\phi'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) + Ag'(c) = 0$

$\Rightarrow \quad f'(c) = -Ag'(c) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = -A$

ସମୀକରଣ (2) କୁ ବ୍ୟବହାର କରି, ଆମେ ପାଇବା :

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \; c \in (a, b)$$

ତେଣୁ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରମାଣିତ ହେଲା ।

ମନ୍ତବ୍ୟ: $g(x)=x$, $x\in[a,b]$ ନେଲେ, ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ କୋଶୀଙ୍କ, ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସ୍ଥିତି ହେବ।

2.1.5 କୋଶୀଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ଜ୍ୟାମିତିକ ବ୍ୟାଖ୍ୟା

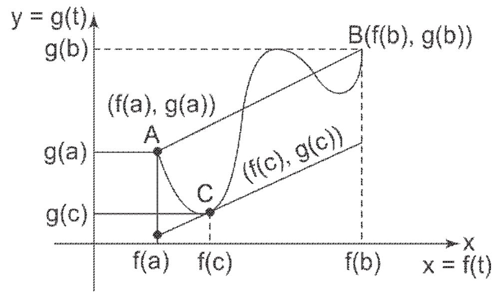
ମନେକର $x = f(t)$ ଏବଂ $x = g(t)$ ପାରାମିଟରୀୟ ବକ୍ର, ଯେଉଁଠାରେ, $t\in(a,b)$

i) $[a,b]$ ରେ f , g ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ

ii) (a,b) ରେ f , g ଅବକଳନୀୟ

iii) (a,b) ରେ $g'(x) \neq 0$

ତେବେ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଏକ $c \in (a,b)$ ଅଛି ଯେଉଁଠି ସ୍ପର୍ଶରେଖା AB ସହିତ ସମାନ୍ତର ଅଟେ।



ଚିତ୍ର 2.6

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 2.12. $[0,1]$ ରେ $f(x)=e^x$ ଏବଂ $g(x)=e^{-x}$ ପାଇଁ କୋଶୀଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$

i) $[0,1]$ ରେ f ଏବଂ g ଫଳନ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ।

ii) $(0,1)$ ରେ $f'(x)=e^x, g'(x)=-e^{-x}$, ଅବକଳନୀୟ

iii) $g'(x)=e^{-x}\neq 0\ \forall x\in(0,1)$,

ତେବେ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଏକ $c\in(0,1)$ ଅଛି ଯେପରି କି,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad [\text{ଏଠାରେ } b=1,\ a=0] \qquad \ldots (1)$$

ତେଣୁ $f(1)=e^1=e,\ f(0)=e^0=1$ ଏବଂ $g(1)=e^{-1}=\frac{1}{e},\ g(0)=e^{-0}=1$

ସମୀକରଣ (1) ରେ ସମସ୍ତ ମୂଲ୍ୟ ରଖିଲେ, ଆମେ ପାଉ;

$$\frac{e-1}{\frac{1}{e}-1}=\frac{e^c}{-e^{-c}} \quad\Rightarrow\quad 1=e^{2c-1}$$

$$\Rightarrow\quad e^0=e^{2c-1} \quad\Rightarrow\quad 0=2c-1\Rightarrow c=\frac{1}{2}\in(0,1)$$

ତେଣୁ, କୌଶୀଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା ହେଲା।

ଉଦାହରଣ 2.13. ମନେକର f, $[a, b]$ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ (a, b)ରେ ଅବକଳନୀୟ ଅଟେ।

ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଏଠାରେ ଏକ ସଂଖ୍ୟା $c\in(a,b)$ ରେ ଅଛି, ଯେପରି କି, $2c\left[f(a)-f(b)\right]=f'(c)\left[a^2-b^2\right]$

ସମାଧାନ:

i) f, $[a,b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ

ii) f, (a,b) ରେ ଅବକଳନୀୟ

ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜିଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ଉଭୟ ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ ହେଲା।

ତେଣୁ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଏକ $c\in(a,b)$)ରେ ଅଛି, ଯେପରି:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(c)$$

$$\Rightarrow f(a)-f(b)=f'(c)(a-b) \qquad \ldots (1)$$

$\Rightarrow$ ବର୍ତ୍ତମାନ ଦିଆଯାଇଛି , $2c\left[f(a)-f(b)\right]=f'(c)\left[a^2-b^2\right]$

ସମୀକରଣ (1) ବ୍ୟବହାର କରି, ଆମେ ପାଉ

$$2c\left[f(a)-f(b)\right]=f'(c)\left[a^2-b^2\right]$$

$\Rightarrow \quad 2c=a+b$

$\Rightarrow \quad c=\dfrac{a+b}{2}$

$\Rightarrow \quad c=\dfrac{a+b}{2}\in(a,b)$

ତେଣୁ $c\in(a,b)$ ରେ ଏକ ସଂଖ୍ୟା ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି । .

ଉଦାହରଣ 2.14. $\sqrt[3]{3}=1.44$ କୁ ବ୍ୟବହାର କରି $[1, 2]$ରେ ଫଳନ $f(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=x^2-4$ ପାଇଁ କୋଶୀଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟରେ 'c' ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $[1,2]$ ରେ $f(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=x^2-4$

i) ସମସ୍ତ $x\in R-\{0\}$ ପାଇଁ 'f' ଏକ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ଅଟେ ଏବଂ [$\because f$, $x=0$ ରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ]

g ଯେହେତୁ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ ଫଳନ ତେଣୁ ଏହା ସବୁଠାରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

$[1,2]$ରେ $f(x)$ ଏବଂ $g(x)$, ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ଅଟେ ।

ii) ଅନ୍ତରାଳ $(1,2)$ ରେ $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}, g'(x)=2x$ ଅବକଳନୀୟ !

iii) $g'(x)=2x\neq 0\ \forall\, x\in(1,2)$

ତେବେ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ $c\in(1,2)$ ରେ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି, ଯେପରି କି:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \ldots(1)$$ ଏଠାରେ $a=1,\ b=2$

ତେଣୁ $f(2)=1/2,\ f(1)=1,\ g(2)=0, g(1)=-3$

ସମୀକରଣ (1) ରେ ସମସ୍ତ ମୂଲ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକୁ ରଖିଲେ, ଆମେ ପାଉ:

$$\frac{\frac{1}{2}-1}{0-(-3)}=\frac{-\frac{1}{c^2}}{2c} \qquad \Rightarrow \qquad c^3=3 \qquad \Rightarrow \qquad c^3=3=\sqrt[3]{3}==1.44\in(1,2)$$

ଉଦାହରଣ 2.15. ଅନ୍ତରାଳ $[a,b]$ରେ, ଫଳନ $f(x)=x^2,\ g(x)=x^4\neq 0$ ପାଇଁ, କୋଶୀଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର, ଯେଉଁଠାରେ $a>0,\ b>0$.

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $f(x)=x^2,\ g(x)=x^4$

i) ଯେହେତୁ f ଏବଂ g, xର ପଲିନୋମିଆଲ ଫଳନ ଅଟେ, ତେଣୁ ଏହା ସବୁଠାରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ।

$\therefore\ [a,b]$ରେ $f(x)$ଏବଂ $g(x)$ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ii) $f'(x) = 2x,\ g'(x) = 4x^3$

ପୁନର୍ବାର $f'(x)$ ଏବଂ $g'(x)$ ପଲିନୋମିଆଲ ଫଳନ ଏବଂ ସବୁଠାରେ ଅବକଳନୀୟ ।

$\therefore$ ଅନ୍ତରାଳ (a,b)ରେ $f'(x)$ ଏବଂ $g'(x)$ ଅବକଳନୀୟ ।

iii) $g'(x) = 4x^3 \neq 0\ \forall\ x \in (a,b), \{a > 0, b > 0\}$

ତେଣୁ f ଏବଂ g କୋଶୀ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ସମସ୍ତ ସର୍ତ୍ତକୁ ପୂରଣ କରୁଛି ।

$\therefore$ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଏକ $c \in (a,b)$ ରେ ନିଶ୍ଚିନ୍ତ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି ଯେପରି କି,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \{ଏଠାରେ\ a = a,\ b = b\}$$

ତେଣୁ $f(b) = b^2,\ f(a) = a^2,\ g(a) = a^4, g(b) = b^4$

$$\Rightarrow \quad \frac{b^2 - a^2}{b^4 - a^4} = \frac{2c}{4c^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{b^2 + a^2} = \frac{1}{2c^2} \qquad \Rightarrow \quad c^2 = \frac{b^2 + a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad c = \pm\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \in (a, b)$$

ତେଣୁ କୋଶୀ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା ହେଲା

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 2.3

ନିମ୍ନଲିଖିତ ଫଳନ ପାଇଁ କୋଶୀଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

1. a. $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ରେ, $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x$ b. $[1, 2]$ ରେ, $f(x) = x^2,\ g(x) = x^3$

   c. $[1, 3]$ ରେ, $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ d. $[1, e]$ ରେ, $f(x) = \log x,\ g(x) = \frac{1}{x}$

   e. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ରେ, $f(x) = (1+x)^{3/2},\ g(x) = \sqrt{1+x}$

2. ଯଦି f' ଏବଂ g', $[a,b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ ଅବକଳନୀୟ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $a < c < b$

$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)} = \frac{f''(c)}{g''(c)}$$

3. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \cot\theta, 0 < \alpha < \theta < \beta < \frac{\pi}{2}$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. a. $c = -\frac{\pi}{4}$ b. $c = \frac{14}{9}$ c. $c = \sqrt{3}$ d. $c = \frac{e}{e-1}$ e. $c = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}}$

ଆକର୍ଷଣୀୟ ତଥ୍ୟ

- ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ , ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନତା ଏବଂ ଅବକଳନୀୟତା ମଧ୍ୟରେ ଏକ ସଂଯୋଗ ସ୍ଥାପିତ କରୁଛି।
- ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ଉପଯୋଗ ସ୍ପିଡୋମିଟର ର ସଠିକତା ଯାଞ୍ଚ ପାଇଁ ମଧ୍ଯ କରାଯାଇଥାଏ ।
- ଏହା ଏକ ବିନ୍ଦୁର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କରେ ଯେଉଁଠାରେ ଅବକଳନ ବିଲୁପ୍ତ ହୋଇଥାଏ।

ଭିଡିଓ ସଂଯୋଗ

ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ

ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ଏବଂ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ

ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ

ICTର ଉପଯୋଗ :

- https://www.mathwarehouse.com/calculus/derivatives/what-is-rolles-theorem-php

ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ

- ଯଦି A ରୁ B ଯାତ୍ରା ସମୟରେ ହାରାହାରି ଗତି 50 km/hr ଧରାଯାଏ, ତେବେ ଏକ ସମୟ ଥିଲା ଯେତେବେଳେ ତତକ୍ଷଣାତ ଗତି 50km/hr ମଧ୍ଯ ଥିଲା। (ଯାହା କି ସର୍ବାଧିକ)
- ଋତୁମାନଙ୍କ ସୂର୍ଯ୍ୟାସ୍ତର ସମୟରେ ପରିବର୍ତ୍ତନର ହାର।
- ଯେତେବେଳେ ଏକ ବଲକୁ ବାୟୁରେ ଉପରକୁ ଫୋପାଡି ଦିଆଯାଏ, ଏହାର ପରିବେଗ କିଛି ସମୟରେ ଶୂନ୍ୟ ହୋଇଯାଏ । ରୋଲିଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରେ ଯେ ବଲର ପରିବେଗ କିଛି ସମୟରେ ଶୂନ୍ୟ ହୋଇଯାଏ।
- LMVT ର ଉପଯୋଗ କ୍ଷିପ୍ରଗତି ପାଇଁ ଚାଲଣ ଜାରି କରିବା ପାଇଁ କରାଯାଇଥାଏ।

2.2 ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ

ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ, ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟର ଏକ ବିସ୍ତାର ରୂପ ଯେପରି ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ, ଫଳନର ମୂଲ୍ୟକୁ ସମ୍ବନ୍ଧିତ କରେ ଏବଂ ଏହାର ପ୍ରଥମ ଘାତ ଅବକଳଜ ସହ ସମ୍ବନ୍ଧିତ କରେ କିନ୍ତୁ ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ, ଫଳନର ମୂଲ୍ୟ ଏବଂ ଏହାର ଉଚ୍ଚ ଘାତାଙ୍କ ଅବକଳଜ ସହିତ ସମ୍ବନ୍ଧିତ କରେ ।।

2.2.1 ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପ ସହିତ ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ

କଥନ: ଯଦି ଏକ ଫଳନ $f:[a,a+h]\to R$ ଯେପରି କି

i) ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[a,a+h]$ ରେ $f,f',f'.........f^{n-1}\ x$ ର ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ।

ii) ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $(a,a+h)$ ରେ $f^{n}(x)$, ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି, ତେବେ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା $\theta, 0<\theta<1$ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି, ଯେପରି କି,

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+...+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}f^n(\theta h+a)$$

ପ୍ରମାଣ: ମନେକର, ଏକ ଫଳନ $[a, a+h]\to R$ ଯେପରିକି

$$\phi(x)=f(x)+(a+h-x).f'(a)+\frac{(a+h-x)^2}{2!}f''(x)+...+\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)+\frac{(a+h-x)^n}{(n)!}A \quad ...(1)$$

ଯେଉଁଠାରେ 'A' ଏକ ଧ୍ରୁବକ,ଏପରି ମନୋନୀତ କରାଯାଇଛି, ଯେପରିକି,

$$\phi(a)=\phi(a+h) \quad ...(2)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ (1) ରେ $x=a$ ଏବଂ $x=a+h$ ରଖିଲେ ଆମେ ପାଉ,

$$\phi(a)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+...+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}A$$

ଏବଂ $\phi(a+h)=f(a+h)$

ସମୀକରଣ (2)ରେ ଏହିସବୁ ମୂଲ୍ୟ ରଖିଲେ ଆମେ ପାଉ:

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}A \quad ...(3)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ,

i) $[a,a+h]$ ରେ $\phi(x)$ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ, ଯେହେତୁ $[a,a+h]$ ରେ $f(x),f'(x),f''(x).........f^{n-1}(x)$, ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ $(a+h-x)$, $(a+h-x)^2$, ...$(a+h-x)^n$ ପଲିନୋମିଆଲ ଆଉମଧ୍ୟ ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[a,a+h]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ । ଏହା ବ୍ୟତିତ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନରେ ବୀଜଗଣିତୀୟ ଯୋଗ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ii) $\phi(x)$, ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $(a,a+h)$ ରେ ଅବକଳନୀୟ ଅଟେ । ଯେହେତୁ ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳ$(a,a+h)$ ରେ ସମସ୍ତ $f(x),f'(x),f''(x).........f^{n-1}(x)$, ଅବକଳନୀୟ ଅଟେ

ଏହା ବ୍ୟତୀତ $(a+h-x)$, $(a+h-x)^2$, ...$(a+h-x)^n$ ପଲିନୋମିଆଲ ହୋଇଥିବାରୁ ବିବୃତ

ଅନ୍ତରାଳ $(a, a+h)$ ରେ ଅବକଳନୀୟ।

iii) ଆଉ ମଧ୍ୟ $\phi(a) = \phi(a+h)$

$\therefore$ $\phi(x)$, $[a, a+h]$ ରେ ରୋଲଙ୍କ ସମସ୍ତ ତିନୋଟି ସର୍ତ୍ତକୁ ପୂରଣ କରୁଛି। ତେଣୁ, ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା q, 0 < q< 1 ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି ଯେପରି

$$\phi'(a+\theta h) = 0 \quad \ldots (4)$$

ସମୀକରଣ (1)କୁ x ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କରିବା ପରେ, ଆମେ ପାଉ,

$$\phi'(x) = f'(x) + (a+h-x).f''(x) - f'(x) + \frac{(a+h-x)^2}{2!} f'''(x) + \frac{2(a+h-x)}{2!}(-1) f''(x) + \ldots$$

$$+\ldots + .\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x) - \frac{(n-1)(a+h-x)^{n-2}}{(n-1)!} f^{n-1}(x) + \frac{n(a+h-x)^{n-1}(-1)}{(n)!} A$$

କିମ୍ବା $\phi'(x) = \dfrac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x) - \dfrac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!} A$

$$= \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}\left[f^n(x) - A\right]$$

$x = a + \theta h$ ରଖିବାରେ,

$$\phi'(a+\theta h) = \frac{\left[h(1-\theta)\right]^{n-1}}{(n-1)!}\left[f^n(a+\theta h) - A\right]$$

କିନ୍ତୁ $\phi'(a+\theta h) = 0$ [ସମୀକରଣ 4ରୁ]

$\Rightarrow$ $f^n(a+\theta h) - A = 0$ $\Rightarrow$ $A = f^n(a+\theta h)$ $[\because \; 1-\theta \neq 0 \text{ and } h \neq 0]$

ସମୀକରଣ (3) ରୁ, $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \dfrac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \dfrac{h^n}{(n)!} f^n(a+\theta h)$

ଯାହା ଉପପାଦ୍ୟର ଆବଶ୍ୟକୀୟ ଫଳାଫଳ।

ଏଠାରେ $(n+1)^{th}$ ତମ ପଦ ଅର୍ଥାତ $\dfrac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h)$ କୁ n^{th} ତମ ପଦ ପରେ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପ କୁହାଯାଏ।

2.2.2 ମ୍ୟାକଲରିନଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସହିତ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପ:

କଥନ: ଯଦି ଏକ ଫଳନ $f(x)$ ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[0, x]$ ରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୁଏ, ଯେପରି

i) ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[0, x]$ ରେ $f, f', f'' \ldots\ldots f^{n-1}$ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ।

ii) ଯଦି ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $(0, x)$ ରେ $f^n(x)$ ବିଦ୍ୟମାନ ହୁଏ ତେବେ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା θ, $0 < \theta < 1$

ଅଛି ଯେପରି;

$$f(x)=f(0)+x.f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+....+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+\frac{x^n}{(n)!}f^n(\theta x)$$

ପ୍ରମାଣ: ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟରୁ ଆମେ ପାଉ,

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+...+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}f^n(a+\theta h)$$

ଏହି ଉକ୍ତିରେ, $a=0, h=x$ ରଖିଲେ ଆମେ ପାଉ,

$$f(x)=f(0)+x.f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+\frac{x^n}{(n)!}f^n(\theta x),\ 0<\theta<1$$

ଉପରୋକ୍ତ ଉକ୍ତି ମ୍ୟାକଲରିନଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସହିତ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପ।

2.2.3 ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସହିତ କୋଶୀଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପ

କଥନ: ଯଦି ଏକ ଫଳନ $f:[a,a+h]\to\Re$ ହୁଏ ଯେପରି :

(i) ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[a,a+h]$ ରେ,ସମସ୍ତ $f, f', f''.........f^{n-1}$, x ର ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ।

(ii) ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $(a,a+h)$ ରେ $f^n(x)$ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି, ତେବେ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା θ, $0<\theta<1$ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି ଯେପରି,

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}f^n(a+\theta h)$$

ପ୍ରମାଣ: ମନେକର ଏକ ଫଳନ $f:[a,a+h]\to\Re$ ଯେପରି

$$\phi(x)=f(x)+(a+h-x).f'(a)+\frac{(a+h-x)^2}{2!}f''(x)+...+\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)+(a+h-x).A$$

...(1), $x\in(a,a+h)$

ଯେଉଁଠାରେ A ଏକ ଧ୍ରୁବକ ମନୋନିତ ହୋଇଛି, ଯେପରି $\phi(a)=\phi(a+h)$

ସମୀକରଣ (1) ରେ $x=a$ ରଖିବା ପରେ,

$$\phi(a)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+...+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}A \qquad ...(2)$$

ଏବଂ $\phi(a+h)=f(a+h)$

ସମୀକରଣ (1) ରେ $x=a+h$ ରଖିଲେ, ଆମେ ପାଉ:

$$\phi(a+h)=f(a+h)+0+0+....+=f(a+h) \qquad ...(3)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\phi(a+h)=\phi(a)$

ତେବେ ସମୀକରଣ, (2) ଏବଂ (3) ରୁ, ଆମେ ପାଇବା :

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+.......+.\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+hA \qquad ...(4)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ,

i) $[a, a+h]$ ରେ $\phi(x)$ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ, ଯେହେତୁ $[a, a+h]$ ରେ $f(x), f'(x), f''(x) \ldots\ldots f^{n-1}(x)$ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ $(a+h-x)$, $(a+h-x)^2$, ...$(a+h-x)^n$ ପଲିନୋମିଆଲ ହୋଇ ଥିବାରୁ $[a, a+h]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ।

ii) $(a, a+h)$ ରେ $\phi(x)$ ଅବକଳନୀୟ, ଯେହେତୁ $(a, a+h)$ ରେ ସମସ୍ତ $f(x), f^{/}(x), f^{//}(x) \ldots\ldots f^{n-1}(x)$ $(a+h-x)$, $(a+h-x)^2$, ...$(a+h-x)^n$ ପଲିନୋମିଆଲ ହୋଇଥିବାରୁ $(a, a+h)$ ରେ ଅବକଳନୀୟ ।

iii) ଆଉ ମଧ୍ୟ $\phi(a) = \phi(a+h)$

$\therefore$ ବର୍ତ୍ତମାନ $\phi(x)$, ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ସମସ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ କରୁଛି। ତେଣୁ, ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା q, $0 <$ q < 1 ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି,

ଯେପରି $\phi'(a+\theta h) = 0$

ସମୀକରଣ (1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ x ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$\phi'(x) = f'(x) + \left[(a+h-x).f''(x) - f'(x)\right] + \frac{1}{2!}\left[2(a+h-x) - f''(x)(-1)\frac{(a+h-x)^2}{2!}f'''(x)\right] + \ldots$$

$$+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\left[(a+h-x)^{n-1}f^n(x) - (n-1)(a+h-x)^{n-2}f^{n-1}(x)\right] - A$$

କିମ୍ବା $\phi'(x) = \dfrac{(a+h-x)^{n-1}f^n(x)}{(n-1)!} - A$

$x = a + \theta h$ ରଖିଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\phi'(a+\theta h) = \frac{(a+h-a-\theta h)^{n-1}f^n(a+\theta h)}{(n-1)!} - A$$

$$= \frac{\{h(1-\theta)\}^{n-1}\{f^n(a+\theta h)\}}{(n-1)!} - A$$

$$= \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(a+\theta h) - A$$

କିନ୍ତୁ $\phi'(a+\theta h) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(a+\theta h) - A = 0$

କିମ୍ବା $A = \dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(a+\theta h)$

'A'ର ଏହି ମୂଲ୍ୟକୁ ସମୀକରଣ (4)ରେ ରଖିଲେ ଆମେ ପାଉ

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+.......+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+h\left[\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(a+\theta h)\right]$$

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+.......+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(a+\theta h)$$

ଏହା କୋଶୀଙ୍କ ଶେଷଫଳ ରୂପ ସହିତ ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟର ଏକ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ରୂପ ।

ଏଠାରେ n^{th} ତମ ପଦ ପରେ $\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(a+\theta h)$ କୁ କୋଶିଙ୍କ ଶେଷଫଳର ରୂପ କୁହାଯାଏ ।

2.2.4 ମ୍ୟାକଲରିନ୍‌ଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସହିତ କୋଶୀଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପ

କଥନ: ଯଦି ଏକ ଫଳନ $f(x)$, $[0,x]$ ରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୁଏ, ଯେପରି

i) $[0,x]$ ରେ , $f, f', f''.........f^{n-1}$ (x) ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ଅଟେ ।

ii) $(0,x)$ ରେ $f^n(x)$, ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି, ତେବେ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା $\theta, 0<\theta<1$, ଯେପରି

$$f(x)=f(0)+x.f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+.......+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n)!}f^n(\theta x).\ \ 0<\theta<1$$

ପ୍ରମାଣ: କୋଶୀଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପ ସହିତ ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟରୁ, ଆମେ ପାଉ,

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+.......+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(a+\theta h)$$

ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟରେ $a=0$ ଏବଂ $h=x$ ରଖିଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$f(x)=f(0)+x.f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+.......+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+\frac{x^n}{(n)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(\theta x), 0<\theta<1$$

ଯାହା କି ମ୍ୟାକଲରିନଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସହିତ କୋଶୀଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 2.16. ଫଳନ $f(x)=(1-x)^{7/2}$ ର ପ୍ରସାର $f(0)+x f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(\theta x)$ ରେ θ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେତେବେଳେ $x\to 1$

ଉତ୍ତର: ଏଠାରେ $f(x)=(1-x)^{7/2}$ $f'(x)=-\frac{7}{2}(1-x)^{5/2}$

$$f''(x)=\frac{35}{4}(1-x)^{3/2}$$

$$f'''(x) = -\frac{105}{8}(1-x)^{1/2}$$

$x=0$ ରେ ଉପରୋକ୍ତ ଅବକଳନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲାପରେ, ଆମେ ପାଉ,

$$f(0)=1\ f'(0)=-\frac{7}{2},\quad f''(0)=\frac{35}{4},\quad f'''(\theta x)=-\frac{105}{8}(1-\theta x)^{1/2}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(\theta x)$$

$$\Rightarrow \quad (1-x)^{\frac{7}{2}} = 1-\frac{7}{2}x+\frac{35}{8}x^2-\frac{105}{48}(1-\theta x)^{1/2}x^3$$

ଯେତେବେଳେ $x \to 1$, ଆମେ ପାଉ,

$$0 = 1-\frac{7}{2}+\frac{35}{8}-\frac{105}{48}(1-\theta)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{105}{48}(1-\theta)^{1/2}=\frac{15}{8} \quad \Rightarrow \quad (1-\theta)^{1/2}=\frac{15}{8}\times\frac{48}{105}$$

$$\Rightarrow \quad (1-\theta)^{1/2}=\frac{6}{7}$$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ବର୍ଗ ନେଲେ

$$1-\theta=\frac{36}{49} \quad \Rightarrow \quad \theta=1-\frac{36}{49} \quad \Rightarrow \quad \theta=\frac{13}{49}$$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 2.17। ଦର୍ଶାଅ ଯେ, x ର ସମସ୍ତ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ :,

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin(\theta x)$$

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $f(x)=\cos x$

$$f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x)=-\cos x=\cos(x+\pi)$$

$$f'''(x)=\sin x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$$f^{iv}(x)=\cos=\cos(2\pi+x)$$

....

....

$$f^n(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n-1}(x)=\cos\left(x+(2n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n}(x)=\cos\left(x+2n.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n}(x)=\cos(x+n\pi)$$

$$f^{2n+1}(x)=\cos\left(x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n+1}(\theta x)=\cos\left(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

ତେଣୁ $f(0)=\cos 0=1$, $f^{/}(0)=-\sin 0=0$

$f^{//}(0)=-\cos 0=-1$, $f^{///}(0)=\sin 0=0$

$f^{iv}(0)=\cos 0=1$

....

....

$$f^{2n-1}(0)=\cos\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f^{2n}(0)=\cos n\pi=\begin{cases}1, & n=\text{ଯୁଗ୍ମ}\\ -1, & n=\text{ଅଯୁଗ୍ମ}\end{cases}$$

$$f^{2n+1}(\theta x)=\cos\left[\theta x+n\pi+\frac{\pi}{2}\right]=\begin{cases}-\sin\theta x, & n=\text{ଯୁଗ୍ମ}\\ \sin\theta x. & n=\text{ଅଯୁଗ୍ମ}\end{cases}=(-1)^{n+1}\sin\theta x$$

ମ୍ୟାକଲରିନଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ଦ୍ୱାରା ଆମେ ପାଉ:

$$f(x)=f(0)+x.f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+.\frac{x^3}{3!}f'''(0)+......+.\frac{x^{2n}}{(2n)!}f^{2n}(0)+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{2n+1}(\theta x)$$

ମୂଲ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କରିବା ପରେ, ଆମେ ପାଉ:

$$\cos x=1+x.0+\frac{x^2}{2!}(-1)+\frac{x^3}{3!}(0)+\frac{x^4}{4!}(1)+...........+\frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^{n+1}\sin(\theta x)$$

ଆର୍ଥାତ୍ $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...........+(-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin(\theta x)$ **ପ୍ରମାଣିତ**

ଉଦାହରଣ 2.18 ଯଦି ଏକ ଫଳନ f ଯେପରି f', $[a, b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ (a, b) ରେ ଅବକଳନୀୟ ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଏଠାରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା θ, $0<\theta<1$, ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି, ଯେପରି,

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''\left[a+\theta(b-a)\right].$$

ସମାଧାନ: ମନେକର, ଫଳନ

$$\phi(x) = f(x) + (b-x)f'(x) + (b-x)^2 A \quad \text{... (1)}$$

ଯେଉଁଠାରେ 'A' ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଏପରି ମନୋନୀତ ଯେପରି:

$$\phi(a) = \phi(b)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\phi(a) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 A$ ... (2)

ଏବଂ $\phi(b) = f(b)$

[ସମୀକରଣ (1) ରେ $x = a$ ଏବଂ $x = b$ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରାପ୍ତ ହୋଇଛି] ... (3)

ସମୀକରଣ (2) ରେ ସମୀକରଣ (3)କୁ ବ୍ୟବହାର କରିଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$f(x) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 A \quad \text{... (4)}$$

i) ଯେହେତୁ, $[a,b]$ ରେ $f(x)$ ଏବଂ $f'(x)$, ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ $(b-x), (b-x)^2$ ପଲିନୋମିଆଲ ହୋଇଥିବାରୁ, ଏହା ମଧ୍ୟ, $[a, b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

$\therefore$ $[a, b]$ ରେ $\phi(x)$, ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ii) ଯେହେତୁ (a,b) ରେ $f(x)$, $f'(x)$, ଅବକଳନୀୟ ଏବଂ $(b-x), (b-x)^2$ ପଲିନୋମିଆଲ ହୋଇଥିବାରୁ ଏହା ମଧ୍ୟ (a, b) ରେ ଅବକଳନୀୟ ।

$\therefore$ (a, b) ରେ $\phi(x)$ ଅବକଳନୀୟ

iii) ଆଉ ମଧ୍ୟ, $\phi(a) = \phi(b)$

ତେଣୁ, $\phi(x)$ ରୋଲଙ୍କ ସମସ୍ତ ସର୍ତ୍ତକୁ ପୂରଣ କରୁଛି ।

ତେଣୁ, ଏଠାରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା θ, $0 < \theta < 1$, ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି । ଯେପରି $\phi'[a + \theta(b-a)] = 0$ ...(5)

ସମୀକରଣ (1) କୁ x ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା :

$$\phi'(x) = f'(x) + (b-x)f''(x) + (-1)f'(x) + 2(b-x)(-1)A$$

କିମ୍ବା $\phi'(x) = (b-x)f''(x) - 2(b-x)A$

କିମ୍ବା $\phi'(x) = (b-x)[f''(x) - 2A]$

$x = a + \theta(b-a)$ ରଖିବା ପରେ, ଆମେ ପାଉ:

$$\Rightarrow \quad \phi'[a + \theta(b-a)] = (b - a - \theta(b-a))[f''(a + \theta(b-a)) - 2A]$$

[ସମୀକରଣ (5) ରୁ ଏବଂ $b - a \neq 0, 1 - \theta \neq 0$]

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} f''(a + \theta(b-a))$$

' A ' ର ମୂଲ୍ୟକୁ ସମୀକରଣ (4) ରେ ରଖିଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''\left[a+\theta(b-a)\right]$$

ଉଦାହରଣ 2.19. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\log(x+h)=\log x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+.....+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{n(x+\theta h)^n}$

ସମାଧାନ: ମନେକର: $f(x+h)=\log(x+h)$

$$f(x)=\log x$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x)=-\frac{2}{x^3}$$

$$f^{iv}(x)=-\frac{6}{x^4}=(-1)^3\frac{3!}{x^4}$$

....

....

ଏହି ପ୍ରକାରରେ ଆମେ ପାଉ, $f^{n-1}(x)=(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$

$$f^n(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$f^n(x+\theta h)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+\theta h)^n}$$

ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସହିତ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପ ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଇବା

$$f(x+h)=f(x)+h.f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+.......+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)+\frac{h^n}{(n)!}f^n(x+\theta h)$$

ସମସ୍ତ ମୂଲ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକୁ ରଖିବା ପରେ ଆମେ ପାଉ

$$\log(x+h)=\log x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3!}\times\frac{2!}{x^3}+.....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}+\frac{h^n}{n!}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+\theta h)^n}$$

କିମ୍ବା $$\log(x+h)=\log x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}+.....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)}\frac{(-1)^{n-2}}{x^{n-1}}+\frac{(-1)^{n-1}h^n}{n(x+\theta h)^n}$$

ଉଦାହରଣ 2.20. ମ୍ୟାକଲରିନଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସହିତ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପ ଦ୍ୱାରା $e^{ax} \sin bx$ କୁ n ପଦପରେ ବିସ୍ତାର କର

ସମାଧାନ: ମନେକର $$f(x) = e^{ax}.\sin bx$$

$$= e^{ax}(b.\cos bx.b + a.\sin bx)$$

$$f''(x) = e^{ax}\left(-b^2.\sin bx + ab\cos bx\right) + ae^{ax}\left(b\cos bx + a\sin bx\right)$$

$$= e^{ax}\left[\left(a^2 - b^2\right)\sin bx + 2ab\cos bx\right]$$

$$f'''(x) = e^{ax}\left[\left(a^2 - b^2\right)\cos bx.b - 2ab\sin bx.b\right] + ae^{ax}\left[\left(a^2 - b^2\right)\sin bx + 2ab\cos bx\right]$$

$$= e^{ax}\left[b\left(3a^2 - b^2\right)\cos bx + \left(a^3 - 3ab^2\right)\sin bx\right]$$

ଏହି ପ୍ରକାରରେ ଆମେ ପାଇବା

$$f^n(x) = \left(a^2 + b^2\right)^{n/2} e^{ax} \sin\left(bx + n.\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

$x = 0$ ରେ, ଆମେ ପାଇବା :

$$f(0) = 0\,,\; f'(0) = b\,,\; f''(0) = 2ab\,,$$

$$f'''(0) = b\left(3a^2 - b^2\right),$$

$$f^n(\theta x) = \left(a^2 + b^2\right)^{n/2} e^{ax} \sin\left(b\theta x + n.\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

ମ୍ୟାକଲରିନଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସହିତ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପ ଅନୁସାରେ

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots\dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)}f^{n-1}(0) + \frac{x^n}{n\,!}f^n(\theta x)$$

ସମସ୍ତ ମୂଲ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକ ରଖିବା ପରେ; ଆମେ ପାଉ

$$e^{ax}.\sin bx = 0 + x.b + \frac{x^2}{2!}(2ab) + \dots\dots + \frac{x^n}{n!}\left(a^2 + b^2\right)^{n/2} e^{a\theta x} \sin\left(b\theta x + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

କିମ୍ବା $$e^{ax}.\sin bx = bx + \frac{x^2}{2!}(2ab) + \frac{x^3}{3!}b\left(3a^2 - b^2\right) + \dots\dots + \frac{x^n}{n!}\left(a^2 + b^2\right)^{n/2} e^{a\theta x} \sin\left(b\theta x + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 2.4

1. ଦର୍ଶାଅ ଯେ x ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ବିସ୍ତାର,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin\theta x, 0<\theta<1.$$

2. ମ୍ୟାକଲରିନଙ୍କ ବିସ୍ତାର ସାହାଯ୍ୟରେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ:

a. $$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ....+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}.$$

b. $$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - .... - \frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{x^n}{n(1-\theta x)^n}.$$

3. ଯଦି $[a, a+h]$ ରେ f', ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ $(a, a+h)$ ରେ ଅବକଳନୀୟ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କରଯେ, a ଏବଂ $(a+h)$ ମଧ୍ୟରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା 'c' ଅଛି, ଯେପରି: $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(c)$.

4. ଏକ ଫଳନ $f(x) = (1-x)^{5/2}$ ବିସ୍ତାର ଦିଆଯାଇଛି, $f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(\theta x)$ ଯେତେବେଳେ $x \to 1$, θ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ଯଦି ସମ୍ଭବ, ମ୍ୟାକଲରିନଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି, x ର ଆରୋହଣ କ୍ରମରେ $\sqrt{x}$ ର ପ୍ରସାର କର।

6. ମ୍ୟାକଲରିନଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସହିତ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଫଳନ $f(x) = a^x$ କୁ, n ପଦପରେ ବିସ୍ତାର କର।

7. ମ୍ୟାକଲରିନଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସହିତ କୋଶୀଙ୍କ ଅବଶେଷ ରୂପକୁ ବ୍ୟବହାର $e^{ax}\sin 6x$ କରି କୁ n ପଦ ପରେ ବିସ୍ତାର କର।

ଉତ୍ତରମାଳା

4. $\theta = \frac{9}{25}$ 6. $1 + x\log a + \frac{x^2}{2!}(\log a)^2 + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}(\log a)^{n-1} + \frac{x^n}{n!}a^{\theta x}(\log a)^n + ...$

7. $bx + \frac{x^2}{2!}(2ab) + \frac{x^3}{3!}b(3a^2 - b^2) + ... + (a^2+b^2)^{n/2}(1-\theta)^{n-1} + \frac{x^n}{(n-1)!}e^{a\theta x}\sin\left(b\theta x + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

ଆକର୍ଷଣୀୟ ତଥ୍ୟ

- ଏହାର ବ୍ୟବହାର ସିଗନାଲ୍ ପ୍ରୋସେସିଂ ଉଦ୍ୟୋଗରେ ମଧ୍ୟ କରାଯାଏ ।ଯେଉଁଠାରେ ଆମେ ସାଇନୋସଏଡାଲ୍ ଫଳନର ଅନୁମାନିକ ମୂଲ୍ୟ ଆବଶ୍ୟକ କରିଥାଉ।
- ସିଗନାଲର ପ୍ରଭାବ ଯାଞ୍ଚ କରିବା ପାଇଁ ଏହା ଟ୍ରାନଜିଷ୍ଟର ଏବଂ ଏମ୍ପ୍ଲିଫାୟାର ଶିଳ୍ପରେ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ ।

ଭିଡିଓ ସଂଯୋଗ (ଉତ୍ସ NPTEL)

ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ-1

ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ -2

ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ

- କମ୍ପ୍ୟୁଟର ଏବଂ କାଲକୁଲେଟରରେ, ଅନେକ ଫଳନର ଆନୁମାନିକ ମୂଲ୍ୟ ଗଣନା ପାଇଁ ଏହା ସାହାଯ୍ୟ କରେ ।
- ଲିମିଟ୍ ସମାଧାନ କରିବାରେ ଏବଂ ଅନେକ ଅସୀମ ରାଶିର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ସେଗୁଡ଼ିକ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଉପଯୋଗୀ
- ଫଳନର ଅନନ୍ତ ସ୍ପର୍ଶୀ ଆଚରଣ କୁ ବୁଝିବାରେ ଏଗୁଡ଼ିକ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଉପଯୋଗୀ ।

2.3 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ ଏବଂ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ:

ମନେକର $f(x)$ ଏବଂ $g(x)$ ଦତ୍ତ ଦୁଇଟି ଫଳନ ଅଟେ । ତେବେ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ର ଲିମିଟ୍, ଯେପରି $x \to c$, ସାଧାରଣତଃ ଲବର ଲିମିଟ୍ ବିଭକ୍ତ ହରର ଲିମିଟ୍ ସହିତ ସମାନ ଅଟେ । କିନ୍ତୁ ଯେତେବେଳେ ଉଭୟ ଲିମିଟ୍ ଶୂନ୍ୟ ହୁଏ, ତେବେ ଭାଗଫଳ $\frac{0}{0}$ ରୂପକୁ ହ୍ରାସ କରେ ।

$\frac{0}{0}$ ରୂପକୁ ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ କୁହାଯାଏ ।

ଗାଣିତୀୟ ରୂପରେ ଏହାକୁ ଏହି ପ୍ରକାରରେ ବ୍ୟକ୍ତ କରାଯାଇ ପାରେ ;

ଲିମିଟ୍‌ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ପାଇଁ, $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

ଯଦି $l = 0, \ m \neq 0$ ତେବେ $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

ଯଦି $l \neq 0, \quad m = 0$ ତେବେ $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$

ଯଦି $l = 0, \quad m = 0$ ତେବେ $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କରାଯାଇ ପାରିବ ନାହିଁ। ଏବଂ ଏହାକୁ ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ କୁହାଯାଏ । ବିଭିନ୍ନ ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ କୁ ପ୍ରତୀକ ଦ୍ୱାରା ନିମ୍ନାନୁଶାରେ ଦର୍ଶାଇ ଦିଆଯାଏ

$$\frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ 0 \times \infty, \ \infty - \infty, \ 0^0, \ 1^\infty, \ \infty^0$$

ଏଠାରେ, ଆମେ ଏହି ସମସ୍ତ ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପକୁ ଉଦାହରଣ ସହିତ ବର୍ଣ୍ଣନା କରିବା

2.3.1 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ $\frac{0}{0}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ପାଇଁ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ (ପ୍ରକାର- 1)

ଉପପାଦ୍ୟ: ମନେକର ଫଳନ f ଏବଂ g, $x = a$ ରେ ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ ଅଟେ। ଏବଂ $f(a) = 0 = g(a)$, ତେବେ

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ପ୍ରମାଣ : ଯେହେତୁ $f(a) = 0 = g(a)$

ଆମେ ଲେଖିପାରିବା, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$

$x - a$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଲିମିଟ୍ ନେଲେ ଆମେ ପାଇବା:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} \qquad \left[\because \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\lim\limits_{x \to b} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} f(x)}\right]$$

$$= \frac{f'(a)}{g'(a)}$$ [ଅବକଳନର ସଂଜ୍ଞା ଅନୁସାରେ]

$$=\lim_{x \to a} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ସାଧାରଣତଃ, ଯଦି $f(a) = f'(a) = f''(a) .... = f^{n-1}(a) = 0$

$$g(a) = g'(a) = g''(a) .... = g^{n-1}(a) = 0$$

ଏବଂ $g^n(a) \neq 0$

ତେଣୁ, ଯଦି $\lim_{x \to a} \frac{f^n(x)}{g^n(x)}$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି

ତେବେ: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^n(x)}{g^n(x)}$

ଏହାକୁ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ କୁହାଯାଏ ।

କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ ନିୟମ:

ଯଦି $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ ଏବଂ $\frac{0}{0}$ ରୂପରେ ଅଛି, ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଣାଳୀ ଦ୍ୱାରା ଲିମିଟ୍ ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ହୋଇପାରିବ:

1. ପୃଥକ ଭାବେ ଲବ ଏବଂ ହରକୁ ଅବକଳନ କର ଅର୍ଥାତ୍ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କର

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ଦୁଇଟି ପରିସ୍ଥିତି ଦେଖାଦେବ:

ପରିସ୍ଥିତି-I : ଯଦି $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\frac{0}{0}$ ରୂପରେ ନାହିଁ, ତେବେ,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ପରିସ୍ଥିତି-II : ଯଦି $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\frac{0}{0}$ ରୂପରେ ଅଛି, ତେବେ, ପୃଥକ ଭାବେ ଆଉଥରେ ଲବ ଏବଂ ହରକୁ ଅବକଳନ କର ଅର୍ଥାତ୍ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କର ଯେପରି

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

2. $\lim_{x \to a} \frac{f^n(x)}{g^n(x)}$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପରେ ପହଞ୍ଚିବା ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ, ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ (ପରିସ୍ଥିତି-2)ର ପୁନରାବୃତ୍ତି କର,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^n(x)}{g^n(x)}$$

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ (ପ୍ରକାର:1)

ଉଦାହରଣ 2.21. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$

ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$ [$\frac{0}{0}$ ରୂପରେ ଅଛି]

$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$

ଉଦାହରଣ 2.22. $\lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{x-1-\log x}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{x-1-\log x}$ [$\frac{0}{0}$ ରୂପ]

$= \lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\log x)-1}{1-\frac{1}{x}}$ [ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କର]

$= \lim_{x\to 1}\frac{x^x + x^x\log x - 1}{1-\frac{1}{x}}$ [$\frac{0}{0}$ ରୂପ]

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\log x) + x^x.\frac{1}{x} + x^x(1+\log x)\log x}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x + x^x \log x) + x^{x-1} + (x^x + x^x \log x)\log x}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1+0+1+0}{1} = 2$$

ଉଦାହରଣ 2.23. 'a' ଏବଂ 'b' ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରି: $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3} = 1$.

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3} = 1$ [$\frac{0}{0}$ ରୂପ]

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x(-a\sin x)+(1+a\cos x)-b\cos x}{3x^2} = 1$ ... (1)

ଯେହେତୁ ସମୀକରଣ- (1)ର ଡାହାଣ ପାର୍ଶ୍ୱ ସସୀମ, ତେଣୁ ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ ନିଶ୍ଚିନ୍ତ ସସୀମ, ଯେତେବେଳେ $x \to 0$

କିନ୍ତୁ ଯେତେବେଳେ $x \to 0$ ହର $\to 0$

ଏବଂ ଯେତେବେଳେ $x \to 0$ ଲବ $\to 0$

$$\Rightarrow \quad 1 + a - b = 0$$

$$\Rightarrow \quad a - b = -1 \qquad \dots (2)$$

ପୁନର୍ବାର ସମୀକରଣ (1)ର ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଉ:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-a\sin x - ax\cos x - a\sin x + b\sin x}{6x} = 1 \qquad [\tfrac{0}{0} \text{ ରୂପ}]$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-a\cos x - a\cos x + ax\sin x - a\cos x + b\cos x}{6} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-3a + b}{6} = 1 \quad \Rightarrow \quad -3a + b = 6 \qquad \dots (3)$$

ସମୀକରଣ (2) ଏବଂ (3) କୁ ବ୍ୟବହାର କଲେ, ଆମେ ପାଇବା, $a = -\frac{5}{2},\ b = -\frac{3}{2}$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 2.24. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^3}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କରନ୍ତୁ ।

ସମାଧାନ: $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^3} \qquad [\tfrac{0}{0} \text{ ରୂପ}]$$

ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \cos x + e^x \sin x - 1 - 2x}{3x^2}$$

କିମ୍ବା $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x (\cos x + \sin x) - 1 - 2x}{3x^2} \qquad [\tfrac{0}{0} \text{ ରୂପ}]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x (\cos x + \sin x) + e^x (-\sin x + \cos x) - 2}{6x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2e^x \cos x - 2}{6x} \qquad [\tfrac{0}{0} \text{ ରୂପ}]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2e^x \cos x - 2e^x \sin x}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 2.25. 'a' ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରି $\lim_{x\to 0}\dfrac{a\sin x-\sin 2x}{\tan^3 x}$ ସସୀମ ଅଟେ।

ସମାଧାନ: $\lim_{x\to 0}\dfrac{a\sin x-\sin 2x}{\tan^3 x}$ $[\frac{0}{0}$ ରୂପ$]$

ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା :

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\cos x-2\cos 2x}{3\tan^2 x.\sec^2 x}=\frac{a-2}{0}$$

କିନ୍ତୁ ଦିଆଯାଇଛି ଯେ, $\lim_{x\to 0}\dfrac{a\sin x-\sin 2x}{\tan^3 x}$ ସସୀମ

$\therefore \quad a-2=0$

$\Rightarrow \quad a=2$ (ଉତ୍ତର)

2.3.1.1 ଶ୍ରେଣୀର ବିସ୍ତାର ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା ସୀମା ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ

i) $e^x=1+x\log a+\dfrac{x^2}{2!}(\log a)^2+\dfrac{x^3}{3!}(\log a)^3+..........$

ii) $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+..........$

iii) $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+..........|x|<1$

iv) $\log(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+..........|x|<1$

v) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+..........|x|<1$

vi) $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+..........|x|<1$

vii) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}..........\forall x$

viii) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}..........\forall x$

ix) $\sinh x=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}..........\forall x$

x) $\cosh x=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}..........\forall x$

xi) $\tan x=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{15}x^5+.........\forall x$

xii) $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + ...$

ଉଦାହରଣ 2.26 . $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\log(1+x)}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\log(1+x)}$ [$\frac{0}{0}$ ରୂପ]

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}..........\right)}{x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+.........\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+.........}{\left(x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{4}+.........\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+........\right)}{x^2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-.........\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+........}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-.........}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$ **(ଉତ୍ତର)**

ବିକଳ୍ପ ପଦ୍ଧତି: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\log(1+x)}$ [$\frac{0}{0}$ ରୂପ]

ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କର।

$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{x}{1+x}+\log(1+x)}$ [$\frac{0}{0}$ ରୂପ]

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

ଉଦାହରଣ 2.27. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\log(1+x)}{x^2}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\log(1+x)}{x^2}$ $\left[\frac{0}{0}\text{ ରୂପ}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}..........\right]-\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+..........\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}..........\right]-\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+..........\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{6}+..........\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}-\frac{5x}{6}+..........\right]=\frac{1}{2}$$ **(ଉତ୍ତର)**

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା -2.5

1. ନିମ୍ନଲିଖିତର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର:

a. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2\log(1+x)}{x\sin x}$

b. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$

c. $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x+\log(1-x)}{x\tan^2 x}$

d. $\lim_{x\to 0}\frac{\left(\tan^{-1}x\right)^2}{\log\left(1+x^2\right)}$

e. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2\sin x}$

f. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

g. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{b^x-1}$

h. $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{\sqrt{x}}$

i. $\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x-x}{\sin x-x\cos x}$

j. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^{\sin x}-e^x}$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସୀମା ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର :

a. $\lim_{a\to b}\frac{a^b-b^a}{a^a-b^b}$

b. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos bx-\cos x}{x\sin x}$

c. $\lim_{x\to b}\frac{x^b-b^x}{x^a-b^b}$

d. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}$

e. $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-\log(1+x)}{x^2}$

f. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\sin x}{\cos^2 x}$

g. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x-x^2}{x^2+x\log(1-x)}$

h. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\cos x+e^{-x}}{x\sin x}$

3. ଯଦି $\lim_{x\to 0}\frac{re^x-q\cos x+pe^{-x}}{x\tan x}=3$ ହୁଏ, ତେବେ p, q ଏବଂ r ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

4. a, b ଏବଂ c ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଯେପରି $\lim_{x\to 0}\frac{ae^x-b\cos x+ce^{-x}}{x\sin x}=2$

5. ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର :

i. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. a. 1 b. $\frac{1}{2}$ c. $-\frac{1}{2}$ d. 1 e. $\frac{1}{3}$

f. 1 g. $\frac{\log a}{\log b}$ h. 0 i. $\frac{1}{2}$ j. -1

2. a. $\frac{1-\log b}{1+\log b}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{1-\log b}{1+\log b}$ d. $\frac{1}{3}$ e. $\frac{3}{2}$

f. 1 g. $-\frac{2}{3}$ h. 2

3. $p=\frac{3}{2}, q=3, r=\frac{3}{2}$ 4. $a=1, b=2, c=1$ 5. i. 1 ii. 1

2.3.2 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ $\frac{\infty}{\infty}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ପାଇଁ, ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ (ପ୍ରକାର II)

ଉପପାଦ୍ୟ: ଯଦି $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ ଏବଂ $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$, ହୁଏ, ତେବେ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

ଯଦି ଡାହାଣ ପାର୍ଶ୍ୱର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି ।   (ସସୀମ କିମ୍ବା ଅସୀମ)

କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ ନିୟମ:

1. ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ $\frac{\infty}{\infty}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କରିବା ପାଇଁ, $\frac{0}{0}$ ରୂପକୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ କର ଏବଂ ପରେ ସମାଧାନ କର ।

2. ଯେତେବେଳେ $x\to\infty$, ତେବେ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, ଯେତେବେଳ $x\to\infty$, $x\to\frac{1}{y}$ କୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ କର, ତେବେ $y\to 0$

   ମନେକର $x=\frac{1}{y}$, ତେବେ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}$, ଏବଂ ଆଗକୁ ଅଗ୍ରଗତି କର

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ (ପ୍ରକାର II)

ଉଦାହରଣ 2.28. $\lim_{x\to 0}\frac{\log\tan 2x}{\log\tan x}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର ।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\lim_{x\to 0}\frac{\log\tan 2x}{\log\tan x}$ [$\frac{\infty}{\infty}$ ରୂପ]

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\tan 2x}.\sec^2 2x.\,2}{\frac{1}{\tan x}.\sec^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2.\tan x.\sec^2 2x}{\tan 2x.\sec^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2.\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x}}{2.\frac{\sin 2x}{\cos 2x}.\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2.\sin x}{\sin 2x}.\frac{\cos x}{\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}=1$$

ଉଦାହରଣ 2.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^3-100}{4x^4+x^2+2x+100}$ ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କରନ୍ତୁ

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^3-100}{4x^4+x^2+2x+100}$

ଯେତେବେଳେ $x\to\infty, x=\dfrac{1}{y}$ ନେଲେ $=1\,y\to 0$

$\Rightarrow\ y\to 0$

$$\lim_{y\to 0}\frac{2.\frac{1}{y^4}+3.\frac{1}{y^3}-100}{4.\frac{1}{y^4}+\frac{1}{y^2}+2.\frac{1}{y}+100}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{2.+3y-100y^4}{4.+y^2+2y^3+100y^4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

ଉଦାହରଣ 2.30. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$ $[\frac{\infty}{\infty}$ ରୂପ$]$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}$$

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x} \qquad [\tfrac{0}{0}\text{ ରୂପ}]$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{3}\left[\frac{-2\cos 3x.\sin 3x.3}{-2\cos x.\sin x}\right]$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{3}\left[\frac{\sin 6x}{\sin 2x}\right] \qquad [\because \sin 2x=2\sin x.\cos x] \qquad [\tfrac{0}{0}\text{ ରୂପ}]$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{3}\left[\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}\right]=\frac{3\cos 3\pi}{\cos\pi}=\frac{3(-1)}{(-1)}=3$$

2.3.3 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ $0\times\infty$ ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ପାଇଁ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ (ପ୍ରକାର-III)

ଯଦି $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ ଏବଂ $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, ହୁଏ ତେବେ $\lim\limits_{x\to a}f(x).g(x)$ ନିୟମ $0\times$ ¥ ରୂପରେ ଅଛି

ରୂପାନ୍ତର ପରେ

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ କିମ୍ବା } = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

ଯାହାକି $\frac{0}{0}$ କିମ୍ବା $\frac{\infty}{\infty}$ ରୂପ ଏବଂ ପୂର୍ବ ଆଲୋଚିତ ପଦ୍ଧତି ସହିତ ସମାଧାନ କର

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ ପ୍ରକାର-III

$\lim_{x\to 0} x\log x$

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $\lim_{x\to 0} x\log x$ [$0 \times \infty$ ରୂପ]

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$ [$\frac{\infty}{\infty}$ ରୂପ]

ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

ଉଦାହରଣ 2.32. $\lim_{x\to 0} x\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\lim_{x\to 0} x\cot x$ [$0 \times \infty$ ରୂପ]

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\cot x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$$ [$\frac{0}{0}$ ରୂପ]

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sec^2 x} = 1$$

ଉଦାହରଣ 2.33. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$ [$0 \times \infty$ ରୂପ]

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cot x}$$ [$\frac{0}{0}$ ରୂପ]

ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\operatorname{cosec}^2 x}=-1$$

ଉଦାହରଣ 2.34. $\lim_{x\to\infty} 2^x.\sin\frac{a}{2^x}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\lim_{x\to\infty} 2^x.\sin\frac{a}{2^x}$ [0 × ∞ ରୂପ]

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{2^x}}{\frac{1}{2^x}}$$ [$\frac{0}{0}$ ରୂପ]

ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{a}{2x}\left(\frac{-a.2^x.\log 2}{\left(2^x\right)^2}\right)\frac{a}{2^x}}{\frac{-2^x.\log 2}{\left(2^x\right)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty} a.\cos\frac{a}{2^x}=a$$

2.3.4 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ ∞−∞ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ପାଇଁ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ (ପ୍ରକାର-IV)

ଯଦି $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ ଏବଂ $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$, ହୁଏ ତେବେ $\lim_{x\to a} f(x)-g(x)$, $\infty-\infty$ ରୂପରେ ରହିବ।

ଏହି ରୂପରେ ରୂପାନ୍ତର କର $\lim_{x\to a} f(x)-g(x)=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x.)g(x)}}$

ଯାହାର ମୂଲ୍ୟ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ ଯେପରି ପ୍ରଥମରୁ କରାଯାଇଥିଲା।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ (ପ୍ରକାର-IV)

ଉଦାହରଣ 2.35. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{cosec} x}{x}\right)$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{cosec} x}{x}\right)$ [$\infty-\infty$ ରୂପ]

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2\sin x}\right)$$ [$\frac{0}{0}$ ରୂପ]

ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2\cos x+2x\sin x}\right)$$ [$\frac{0}{0}$ ରୂପ]

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{-x^2\sin x+2x\cos x+2x\cos x+2\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{-x^2\sin x+4x\cos x}\right)$$ [$\frac{0}{0}$ ରୂପ]

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\cos x}{-x^2\cos x-6x\sin x+6\cos x}\right)=-\frac{1}{6}$$

ଉଦାହରଣ 2.36. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$ [$\infty-\infty$ ରୂପ]

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)$$ [$\frac{0}{0}$ ରୂପ]

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-\cos x}{-\sin x}\right)$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{1}=0$$

ଉଦାହରଣ 2.37. $\lim_{x\to 0}\left(\cos ec^2 x - \frac{1}{x^2}\right)$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\lim_{x\to 0}\left(\cos ec^2 x - \frac{1}{x^2}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) \qquad [\infty - \infty \text{ ରୂପ}]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}\right) \qquad [\frac{0}{0} \text{ ରୂପ}]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}\right)\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}\right) \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}\right) \qquad \left[\because \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1\right] [\frac{0}{0} \text{ ରୂପ}]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ......\right)^2}{x^4}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60} - ...}{x^4}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{60}}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{3} - \frac{x^2}{60} + x \text{ ର ଉଚ୍ଚ ଘାତାଙ୍କ ପଦ}$$

$$= \frac{1}{3}$$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 2.6

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସୀମା ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\log \sin x}{\cot x}$

b. $\lim_{x\to a} \frac{\log(x-a)}{\log(e^x-e^a)}$

c. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-8x^2+2x+1}{x^4-x^2+2x-3}$

d. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$

e. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos ecx}{\log x}$

f. $\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\cot x}$

f. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}, n\in N$

g. $\lim_{x\to 5} \frac{\log(1-x)}{\cot \pi x}$

i. $\lim_{x\to 0} \log_x .\sin x$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

a. $\lim_{x\to 0} x.\log x.\tan x$

b. $\lim_{x\to\infty} x.\tan\frac{1}{x}$

c. $\lim_{x\to a} (a-x).\tan\frac{\pi x}{2a}$

d. $\lim_{x\to 1} \sec\frac{\pi}{2x}\log x$

e. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x).\tan x$

f. $\lim_{x\to\infty} \left(a^{1/x}-1\right)x$

3. ନିମ୍ନଲିଖିତର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

a. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\cos ecx\right)$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)}{x}$

c. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$

d. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$

e. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$

f. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\log(1+x)\right)$

g. $\lim_{x\to\pi/2} (2x\tan x-\pi.\sec x)$

h. $\lim_{x\to 0} (\cos ecx-\cot x)$

ଉତ୍ତରମାଳା

1.	a. 0	b. 1	c. 0	d. 0
	e. $-\infty$	f. 0	g. 0	h. 0
	i. 1			
2.	a. 0	b. 1	c. $\frac{2a}{\pi}$	d. $\frac{2}{\pi}$
	e. 0	f. $\log a$		
3.	a. 0	b. $\frac{1}{3}$	c. $\frac{2}{3}$	d. $\frac{1}{2}$
	e. $\frac{1}{3}$	f. $\frac{1}{2}$	g. -2	h. 0

2.3.5 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ 0^0ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ପାଇଁ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ (ପ୍ରକାର- V)

ଯଦି $\lim_{x\to a} f(x)=0$ ଏବଂ $\lim_{x\to a} g(x)=0$, ତେବେ $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ 0^0 ରୂପରେ ଅଛି।

ଏହି ପ୍ରକାର ରୂପକୁ ସମାଧାନ କରିବା ପାଇଁ ମନେକର $y=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$

$$\log y=\lim_{x\to a} g(x).\log f(x) \qquad ....(i)$$

ଯାହାକି $0\times\infty$ ରୂପରେ ଅଛି ଏବଂ ପୂର୍ବ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା ସମାଧାନ ହୋଇପାରିବ

ମନେକର

$$\lim_{x\to a} g(x).\log f(x)=l$$

ତେବେ ସମୀକରଣ (1) ରୁ, $\log y=l\Rightarrow y=e^l$

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ (ପ୍ରକାର-V)

ଉଦାହରଣ 2.38. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର

ସମାଧାନ: ମନେକର, $y = \lim\limits_{x\to 0} x^x$ [0^0 ରୂପ]

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର log ନେଲେ

$$\log y = \lim_{x\to 0} x\log x \quad [0\times\infty \text{ ରୂପ }]$$

$$\log y = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} \quad [\tfrac{\infty}{\infty} \text{ ରୂପ}]$$

ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \qquad = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

ଏହିପରି $\log y = 0$

$$\Rightarrow y = e^0 = 1$$

ତେଣୁ $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$

ଉଦାହରଣ 2.39. $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{\log(1-x)}}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର $y = \lim\limits_{x\to 1}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{\log(1-x)}}$ [0^0 ରୂପ]

ତେବେ, $\log y = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\log(1-x)}\log\left(1-x^2\right)$ [$\tfrac{\infty}{\infty}$ ରୂପ]

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\log(1-x)+\log(1+x)}{\log(1-x)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(1+\frac{\log(1+x)}{\log(1-x)}\right)$$

$$= 1+\lim_{x\to 1}\frac{\log(1+x)}{\log(1-x)}$$

$$= 1 + \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}} = 1 + \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1+x}$$

$$= 1 + \frac{0}{2} = 1$$

ଏହିପରି, $\log y = 1$

$$\Rightarrow y = e^1 = e$$

ତେଣୁ, $\lim_{x\to 1}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{\log(1-x)}} = e$

2.3.6 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ 1^∞ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ପାଇଁ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ (ପ୍ରକାର-VI)

ଯଦି $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ ଏବଂ $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, ହୁଏ ତେବେ $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ 1^∞ ରୂପରେ ଅଛି ।

ଏହାକୁ ସମାଧାନ କରିବାପାଇଁ, ମନେକର $y = \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$

$\therefore$ $\log y = \lim_{x\to a} g(x).\log f(x)$

ପୂର୍ବ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା ସମାଧାନ ହୋଇପାରିବ ।

ତାହା ପରେ, ମନେକର, $\lim_{x\to a} y = l$

ତେବେ $y = e^l$

ଅର୍ଥାତ $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^l$.

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ ପ୍ରକାର-VII

ଉଦାହରଣ 2.40. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର ।

ସମାଧାନ: ମନେକର $y = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ [1^∞ ରୂପ]

$\therefore$ $\log y = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\log\cos x$ [$0\times\infty$ ରୂପ]

ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}.(-\sin x)}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\tan x}{2x} \qquad [\tfrac{0}{0}\text{ ରୂପ }]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sec^2 x}{2} = -\frac{1}{2}$$

ଏହିପରି $\log y = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}}$$

ତେଣୁ $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$

ଉଦାହରଣ 2.41. ଦତ୍ତ ସୀମା ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x}$

ସମାଧାନ: ମନେକର $y = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x}$ $[1^\infty$ ରୂପ $]$

$\therefore$ $\log y = \lim_{x\to 0} \cot^2 x \log\cos x$ $[0\times\infty$ ରୂପ$]$

$$\log y = \lim_{x\to 0} \frac{\log\cos x}{\tan^2 x} \qquad [\tfrac{0}{0}\text{ ରୂପ}]$$

ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}.(-\sin x)}{2\tan x.\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\tan x}{2\tan x.\sec^2 x}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

ଏହିପରି $\log y = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}}$$

$\therefore$ ତେଣୁ $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x} = e^{-\frac{1}{2}}$

2.3.7 ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ ¥^{0}ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ ପାଇଁ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ (ପ୍ରକାର-VII)

ଯଦି $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ ଏବଂ $\lim_{x\to a} g(x)=0$, ହୁଏ ତେବେ, $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ ∞^0 ରୂପରେ ଅଛି

ଏହି ପ୍ରକାରର ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପକୁ ସମାଧାନ ପାଇଁ

ମନେକର $\quad y=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ ...(1) [$0\times\infty$ ରୂପ]

$\therefore \quad \log y=\lim_{x\to a} g(x).\log f(x)$

ଯାହାକି ପୂର୍ବ ଆଲୋଚିତ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ।

ତାହା ପରେ ମନେକର $\quad \log y=l$

ତେବେ $\quad y=e^l$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^l$$

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ (ପ୍ରକାର-VII)

ଉଦାହରଣ 2.42. $\lim_{x\to 0}(\cot x)^{\frac{1}{\log x}}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର

ସମାଧାନ: ମନେକର, $\quad y=\lim_{x\to 0}(\cot x)^{\frac{1}{\log x}}$ [∞^0 ରୂପ]

$\therefore \quad \log y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\log x}\log\cot x$ [$\frac{\infty}{\infty}$ ରୂପ]

ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cot x}.\left(-\cos ec^2 x\right)}{\frac{1}{x}} \qquad =\lim_{x\to 0}\frac{-x\cos ec^2 x}{\cot x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\cos x.\sin x} \qquad [\ \tfrac{0}{0}\ \text{ରୂପ}\ ]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\cos^2 x-\sin^2 x}=-1$$

ଏହିପରି $\quad \log y=-1 \quad \Rightarrow \quad y=e^{-1}=\frac{1}{e}$

ତେଣୁ $\lim_{x\to 0}(\cot x)^{\frac{1}{\log x}} = \frac{1}{e}$

ଉଦାହରଣ 2.43. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x+1}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର $f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x+1}, \quad x>1$

$$\therefore \log f(x) = \lim_{x\to\infty}(x+1)\log\left(1-\frac{1}{2x}\right), \; x>1$$

$$\log f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{x+1}}$$ [$\frac{0}{0}$ ରୂପ]

ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2x}\right)}\cdot\frac{1}{2x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{(2x-1)}\cdot\frac{1}{2x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{-x(2x-1)} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1+2x}{-2x^2+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}}{-2+\frac{1}{x}}$$ [ଲବ ଏବଂ ହରକୁ x^2 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ]

$$= -\frac{1}{2}$$

ଏହିପରି $\log f(x) = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad f(x) = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x+1} = e^{-\frac{1}{2}}$$

ଉଦାହରଣ 2.44. $\lim_{x\to\pi/2}(\sec x)^{\cot x}$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର $y=\lim_{x\to\pi/2}(\sec x)^{\cot x}$ [∞^0 ରୂପ]

$\therefore$ $\log y=\lim_{x\to\pi/2}\cot x.\log\sec x$ [$0\times\infty$ ରୂପ]

$$\log y=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\log\sec x}{\tan x}$$ [$\frac{\infty}{\infty}$ ରୂପ]

ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{\sec x}.\sec x.\tan x}{\sec^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{\sec x}.\sec x.\tan x}{\sec^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan x}{\sec^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\sin x.\cos x$$

$$=0$$

ଏହିପରି $\log y=0$

$\Rightarrow$ $y=e^0=1$

ତେଣୁ $\lim_{x\to\pi/2}(\sec x)^{\cot x}=1$

ଉଦାହରଣ 2.45. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+2}=e^3$

ସମାଧାନ: ମନେକର $y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+2}$ [1^∞ ରୂପ]

$\therefore$ $\log y=\lim_{x\to\infty}(3x+2)\log\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}(3x+2)\log\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)$$ [$0\times\infty$ ରୂପ]

ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$$=\lim_{x\to\infty}(3x+2)\left[\frac{2}{2x+1}-\left(\frac{2}{2x+1}\right)^{2}.\frac{1}{2}+......\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2(3x+2)}{2x+1}-\left(\frac{2}{2x+1}\right)^{2}.\frac{(3x+2)}{2}+......\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2}{2x}.\frac{\left(1+\frac{2}{3x}\right).3x}{\left(1+\frac{2}{3x}\right)}-\frac{2.3x\left(1+\frac{2}{3x}\right)}{(2x)^2\left(1+\frac{2}{3x}\right)^2}+.......\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{3.\left(1+\frac{2}{3x}\right)}{\left(1+\frac{2}{3x}\right)}-\frac{3}{2x}\frac{\left(1+\frac{2}{3x}\right)}{\left(1+\frac{2}{3x}\right)^2}+.......\right]$$

$$= 3$$

ଏହିପରି $\log y = 3$

$\Rightarrow$ $y = e^3$

ତେଣୁ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+2} = e^3$

ଉଦାହରଣ 2.46. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} = -\frac{e}{2}$

ସମାଧାନ: ମନେକର $y=(1+x)^{1/x}$

$\therefore$ $\log y = \frac{1}{x}\log(1+x)$

$$= \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+....\right)$$

$$= 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+...$$

$$\Rightarrow\quad y = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+...}$$

$= e.e^t$ ଯେଉଁଠାରେ $t = -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+.......$

$$= e.\left[1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+.......\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+.......\right)^2+......\right]$$

$$= e.\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}ex^2 + ...\right]$$

$$= e - \frac{ex}{2} + \frac{11}{24}ex^2 + ...$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(e - \frac{ex}{2} + \frac{11}{24}ex^2 + ...\right) - e}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-e}{2} + \frac{11}{24}ex + ...$$

$$= \frac{-e}{2}$$

ଉଦାହରଣ 2.47. $\lim_{x \to \infty}\left[n + n^2.\log\frac{n}{n+1}\right]$ ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $$\lim_{x \to \infty}\left[n + n^2.\log\frac{n}{n+1}\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left[n + n^2.\log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left[n + n^2.\left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{3(n+1)^3} - ....\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left[n - \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{2(n+1)^2} - \frac{n^2}{3(n+1)^3} - ......\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left[\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{n^2}{(n+1)^3} - ......\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 - \frac{1}{3}.\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} - ......\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ତେଣୁ $$\lim_{x \to \infty}\left[n + n^2.\log\frac{n}{n+1}\right] = \frac{1}{2}$$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 2.7

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସୀମାର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କର।

a. $\lim_{x\to\pi/2} (\cos x)^{\cos x}$ b. $\lim_{x\to 1} (x-1)^{x-1}$ c. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^{1/x}$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସୀମାର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

a. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}$ b. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$ c. $\lim_{x\to\pi/2} (\sin x)^{\tan x}$

d. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sinh x}{x}\right)^{1/x}$ e. $\lim_{x\to 0} (\cos ecx)^{1/\log x}$ f. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$

g. $\lim_{x\to a} \left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$ h. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$ i. $\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\cot x}$

j. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$ k. $\lim_{x\to\pi/2} (\sin x)^{\tan^2 x}$

3. a. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{ex}{2}}{x^2} = \frac{11e}{24}$

b. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{ex}{2} - \frac{11}{24}ex^2}{x^3} = -\frac{7}{16}e$

4. a. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\lim_{x\to\infty} (1+x)^{1/x} = 1$ b. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^k$

c. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\lim_{x\to\infty} \left(x+e^x\right)^{2/x} = e^2$ d. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{3x+2} = e^{-3}$

5. ମୂଲ୍ୟାଙ୍କର କର

a. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$ ଏବଂ ତାପରେ ଦର୍ଶାଅ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2^x + 3^x}{2}\right)^{1/x} = \sqrt{6}$

b. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\log x}{x}\right)^{1/x}$ c. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+n^2\right)}{n}$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. **a.** 1   b. 1   c. 1

2. **a.** e^a b. 1   c. 1   d. 1

   e. $\frac{1}{e}$ f. $e^{1/3}$ g. $e^{2/\pi}$ h. $e^{-1/6}$

   i. e j. e^2 k. $e^{-1/2}$

5. **b.** 1   c. 0

ଆକର୍ଷଣୀୟ ତଥ୍ୟ

- ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ ଗୁଡ଼ିକ ପଦାର୍ଥ ବିଜ୍ଞାନରେ ମଧ୍ୟ ମିଳିଥାଏ: କ୍ୱାଣ୍ଟମ ପଦାର୍ଥ ବିଜ୍ଞାନ, କଣିକା କ୍ଷୟ, କ୍ୱାଣ୍ଟାମ ମେକାନିକ୍ସ, ଥର୍ମୋଡାଇନାମିକ୍ସ ଇତ୍ୟାଦିରେ ଆମେ ଏହାର ବ୍ୟବହାର ଦେଖିପାରୁ ।
- ଜୋହାନ ବର୍ଣ୍ଣଲି ଏହି ଅନନ୍ୟ ନିୟମ ସୃଷ୍ଟିରେ ନିୟୋଜିତ ଥିଲେ ।
- ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ବେଳେ ବେଳେ କଦାପି ଶେଷ ନହେବା ଚକ୍ରରେ ପଡିବା ଦ୍ୱାରା ବିଫଳ ହୁଏ ।
- ଯେହେତୁ 'L'Hospital' ରୂପରେ ଲେଖାଯଇଛି କିନ୍ତୁ ଶବ୍ଦଟି ଉଚ୍ଚାରଣ ହେଉଛି ଲୋପିତାଲ।

ଭିଡିଓ ସଂଯୋଗ (ଉତ୍ସ: NPTEL)

ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ -1

ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ

- ବାଣିଜ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏହାର ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରୟୋଗ ଅଛି, ଯେଉଁଠାରେ ପ୍ରତିଦିନ ନିରନ୍ତର ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ହାର ସାମ୍ନାକୁ ଆସେ, ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଭାବାରେ ନିବେସରେ ,ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ଖାତାରେ, କ୍ରେଡିଟ୍ କାର୍ଡ ବିଲ୍, ବନ୍ଧକ ଇତ୍ୟାଦି ପ୍ରଦାନ କରିବା ସମୟରେ
- ଏହା ଗାମା ଫଳନରେ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ, ଯାହାକି ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ କ୍ୱାଣ୍ଟମ୍ ପଦାର୍ଥ ବିଜ୍ଞାନ, ପରିସଂଖ୍ୟାନ, ଜ୍ୟୋତିର୍ବିଜ୍ଞାନ, ଫ୍ଲୁଇଡ୍ ଡାଇନାମିକ୍ସ, କମ୍ବିନୋଟୋରୀ, ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ଇତ୍ୟାଦିରେ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ ।

2.4 ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠ

ଏକ ଫଳନ f କୁ, x= a ରେ ଅଧିକ ତମ ମୂଲ୍ୟ କୁହାଯାଏ ଯଦି $f(a) > f(x)$ ଅର୍ଥାତ୍, $f(x) - f(a) < 0$.

x ର ସମସ୍ତ ମୂଲ୍ୟ ଯେଉଁଠାରେ a, x ର ସମୀପ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ।

ଏକ ଫଳନ f କୁ $x=h$ ରେ ମୂଲ୍ୟ କୁହାଯାଏ ଯଦି f(a)< $f(x)$, ଅର୍ଥାତ୍, $f(x)$- $f(x)$ >0, x ର ସମସ୍ତ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ, ଯେଉଁଠାରେ 'a', x ର ସମୀପ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ । ସଲଗ୍ନ ***ଚିତ୍ର 2.7*** ରେ, $f((x)$ ର $x=a$, ରେ ଅଧିକତମ ମୂଲ୍ୟ ଅଛି ଯେହେତୁ f(a)ର ମାନ f(x)ର ନିକଟବର୍ତ୍ତି ମାନ ଠାରୁ ଅଧିକ ଏହି ପ୍ରକାରରେ $f(x), x=b$ ନ୍ୟୁନତମ ଏବଂ d ରେ ଅଧିକତମ । ଧ୍ୟାନ ଦିଅନ୍ତୁ ଯେ $f(x)$ ର ସର୍ବାଧିକ ମୂଲ୍ୟ $x=a$ ରେ ଅଛି ଯଦିଓ $f(a)<f(x)$,'a' ର ଅଛି । ଏହିପରି f(x)ର ସର୍ବାଧିକ ମୂଲ୍ୟ ଆବଶ୍ୟକ । ରୂପରେ f(x)ର ସବୁଠାରୁ ବଡ ମୂଲ୍ୟ ନୁହେଁ।

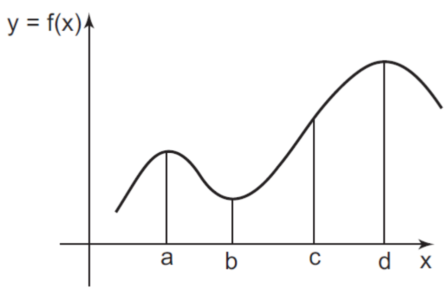
2.4.1 ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠ ପାଇଁ ସର୍ତ୍ତ:

ବିନ୍ଦୁ 'a' ରେ ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତାର କଲେ, ଆମେ ପାଉ:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \ldots$$

ଅର୍ଥାତ୍, $$f(x) - f(a) = (x-a) f'(a) + \frac{1}{21}(x-a)^2 f''(a) + \ldots$$

କିମ୍ବା $$= (x-a)\left\{f'(a) + \frac{1}{21}(x-a) f''(a) + \ldots\right\} \quad \ldots (1)$$



ଚିତ୍ର 2.7

ଯେତେବେଳେ $x \to a$ ଛୋଟ ହୁଏ , $f'(a)$ ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ରୂପରେ ଉତ୍ତରବର୍ତ୍ତୀ ପଦମାନଙ୍କ ଠାରୁ ଅଧିକ ହୁଏ । ତେଣୁ $f(x) - f(a)$ ରେ ନିର୍ଭର କରେ। କିନ୍ତୁ ଏହାର କେବଳ ଗୋଟିଏ ଚିହ୍ନ ରହିବ ଯେତେବେଳେ $x > a$ ଏବଂ ଅନ୍ୟଟି ଯେତେବେଳେ $x < a$ ତେଣୁ $x = a$ ରେ ସର୍ବାଧିକ ଏବଂ ସର୍ବନିମ୍ନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ଯେପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ $f'(a) = 0$ ନୁହେଁ।

ଯଦି $f(a) = 0$, ତେବେ ସମୀକରଣ (1) ହେବ

$$f(x) - f(a) = (x-a)^2 \left\{\frac{1}{2} f''(a) + \frac{1}{6}(x-a) f'''(a) \ldots\right\}$$

$(x-a)$ର ଛୋଟ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ, $\frac{1}{2}f''(a)$, $f^{11}(a)$ ର ଉତ୍ତରବର୍ତ୍ତୀ ପଦ ଗୁଡ଼ିକର ତୁଳନାରେ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ମୂଲ୍ୟ ଅଛି $f(x)-f(a)$ ର ଚିହ୍ନ $\frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)$ କିମ୍ବା $f''(a)$ରେ ନିର୍ଭର କରେ। ଯେହେତୁ $\frac{1}{2}(x-a)^2$ ସର୍ବଦା ଧନାତ୍ମକ ।ତେଣୁ ଫଳନ $f(x)$ର, $x = a$ ରେ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠ ମୂଲ୍ୟ ଅଛି ଯଦି :

(i) $f'(a)=0$ ଓ $f''(a)=$ ଋଣାତ୍ମକ, $f(x)$, 'a' ରେ ସର୍ବାଧିକ ।

(ii) $f'(a)=0$ ଓ $f''(a)=$ ଧନାତ୍ମକ, $f(x)$, 'a' ସର୍ବନିମ୍ନ ।

(iii) $f'(a)=0$ ଓ $f''(a)=0$, $f(x)$, $x = a$ ରେ ନା ସର୍ବାଧିକ କିମ୍ବା ସର୍ବନିମ୍ନ ଯେ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ $f'''(a)=0$. $f^{iv}(a)$ର ଚିହ୍ନ $f(x)$ର ପ୍ରକୃତି ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ କରିବ. ।

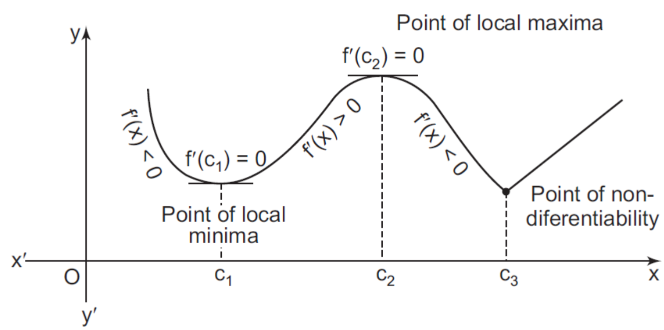
2.42 ଚରମମାନ (ଗରିଷ୍ଠ କିମ୍ବା ଲଘିଷ୍ଠ) ପାଇଁ ପ୍ରଥମ ଅବକଳଜ ପରୀକ୍ଷା

ମନେକର, f, ଅନ୍ତରାଳ $I=(a,b)$ରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଏକ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ଅଟେ ଏବଂ ମନେକର c, Iରେ କ୍ରାନ୍ତିକ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ । $c\in I$, ତେବେ:

i. $f'(x)$ ଧନାତ୍ମକରୁ ଋଣାତ୍ମକ କୁ ଚିହ୍ନ ବଦଳାଏ ଯେପରି x, c ମଧ୍ୟଦେଇ ବୃଦ୍ଧି ହୁଏ । ଅର୍ଥାତ୍, $f'(x)\geq 0$, $x \in (c-\delta, c+\delta)$ ପାଇଁ ଏବଂ $f'(x) \leq 0$, $x \in (c-\delta, c+\delta)$ ପାଇଁ ତେବେ c, ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ଏବଂ f ର ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ c ରେ ଅଛି।

ii. $f'(x)$, ଋଣାତ୍ମକ ରୁ ଧନାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ ବଦଳାଏ, ଯେପରି x,'c' ମଧ୍ୟଦେଇ ବୃଦ୍ଧି ହୁଏ। ଅର୍ଥାତ୍ $f'(x)$ £ 0, $x\in (c-\delta, c)$ ପାଇଁ ଏବଂ $f'(x)\geq 0$, $x \in (c, c+\delta)$ ପାଇଁ ତେବେ c, ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ଏବଂ f ର ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ c ରେ ଅଛି।

iii. $f'(x)$, ଚିହ୍ନ ବଦଳାଏ ନାହିଁ ଯେତେବେଳେ x ,' c ' ମାଧଦେଇ ବୃଦ୍ଧି ହୁଏ, ତେବେ f ର ଚରମମାନ (ନା ଗରିଷ୍ଠ କିମ୍ବା ଲଘିଷ୍ଠ) c ରେ ନାହିଁ ଏବଂ ସେହି ବିନ୍ଦୁକୁ ଇନ୍‌ଫ୍ଲେକସନ ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।



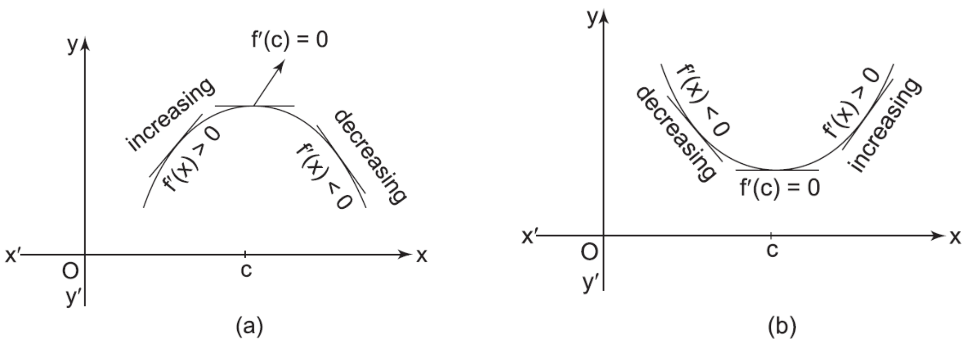
ଚିତ୍ର 2.8

ସଂଜ୍ଞା f ର କ୍ରାନ୍ତିକ ବିନ୍ଦୁ: ମନେକର f, ଅନ୍ତରାଳ I ଏବଂ $c \in I$, ରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଏକ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ, ତେବେ 'c' କୁ କ୍ରାନ୍ତିକ ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ଯଦି $f'(c) = 0$ କିମ୍ବା f, I ର ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକରେ ଅବକଳନୀୟ ନୁହେଁ।

ସଂଜ୍ଞା ମନେକର , f ଏକ ବାସ୍ତବ ମୂଲ୍ୟ ଫଳନ ଅଟେ ଏବଂ ମନେକର c, f ପ୍ରାନ୍ତରେ ଏକ ଆଭ୍ୟନ୍ତର ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ, ତେବେ

a. 'c' କୁ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠର ଏକ ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ, ଯଦି ସେଠାରେ ଏକ $h > 0$ ଅଛି, ଯେପରିକି $f(c) > f(x)$, $\forall$ $x. \in (c - h, c + h)$, $f(c)$ ର ମୂଲ୍ୟକୁ, 'f' ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମୂଲ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

b. 'c' ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ଯଦି ସେଠାରେ ଏକ $h > 0$ ଅଛି ଯେପରିକି $f(c) < f(x)$, $\forall$ $x \in (c - h, c + h)$ $f(c)$ କୁ 'f ର ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।



ଚିତ୍ର 2.9

ଜ୍ୟାମିତିକ ରୂପରେ, ଉପରୋକ୍ତ ସଂଜ୍ଞା ଦର୍ଶାଏ ଯେ, ଯଦି $x = c, f$ ର ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ 'c'ର ଚତୁର୍ଦ୍ଦିଗରେ f ର ରେଖାଚିତ୍ର ଦିଆଯାଇଥିବା ଚିତ୍ର ଅନୁସାରେ ହେବ ।

ଧ୍ୟାନ ଦିଅନ୍ତୁ କି ଫଳନ f, ଅନ୍ତରାଳ $(c - h, c)$ରେ ବୃଦ୍ଧି ହେଉଛି (ଅର୍ଥାତ୍, $f'(x) > 0$) ଏବଂ ଅନ୍ତରାଳ $(c, c+h)$ ହ୍ରାସ ପାଉଛି (ଅର୍ଥାତ୍, $f'(x) < 0$), ଏହା ସୂଚିତ କରେ ଯେ $f'(c)$ ନିଶ୍ଚିତ ଭାବରେ ଶୂନ୍ୟ ହେବ।

ଉଦାହରଣ 2.48. ଫଳନ 'f ର ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଏବଂ ଲଘିଷ୍ଠ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। ଯେତେବେଳେ $f(x) = x^3 - 3x + 3$ ।

ସମାଧାନ: ଦର $f(x) = x^3 - 3x + 3$

x ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$= 3(x^2 - 1)$$
$$= 3(x - 1)(x + 1)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3(x - 1)(x + 1) = 0$

$$\Rightarrow \quad x = 1, -1$$

ତେଣୁ, $x = \pm 1$କେବଳ କ୍ରାନ୍ତିକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ଫଳନର ସର୍ବୋଚ୍ଚ କିମ୍ବା ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ $x = 1, -1$ ରେ ରହିପାରିବ
ପ୍ରଥମ ଅବକଳଜ ପରୀକ୍ଷଣ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

x ର ମୂଲ୍ୟ		$f'(x)=3(x-1)(x1+)$ର ଚିହ୍ନ
x=1	→ ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ (0.98) ମନେକର	$f'(x)<o$
	→ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (1.01)	$f'(x)>o$
x=–1	→ ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ (–1.01) ମନେକର	$f'(x)>o$
	→ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (–0.9) ମନେକର	$f'(x)<o$

$x = 1$ରେ f¢(x), ଋଣାତ୍ମକ ରୁ ଧନାତ୍ମକ କୁ ଚିହ୍ନ ବଦଳାଏ ।

$\therefore\ x = 1$, ଏବଂ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 3 = 1$ ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ଅଟେ ।
$x = -1$ ରେ, $f'(x)$ ଧନାତ୍ମକ ଋଣାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ ବଦଳାଏ ।

$\therefore\ x = -1$ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3 = 5$ ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମୂଲ୍ୟ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 49.2. ଫଳନ 'f'ର ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଏବଂ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠର ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଠାରେ $f(x) = x^3 + 1$ ।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $f(x) = x^3 + 1$

x ଭିତ୍ତିକ ଅବକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$f'(x) = 3x^2$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

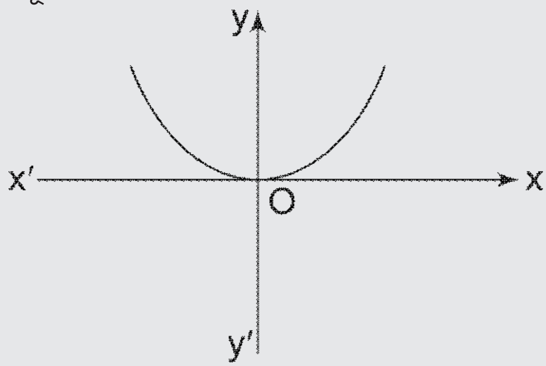
ତେଣୁ, $x = 0$, 'f' ର ଏକମାତ୍ର କ୍ରାନ୍ତିକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ଫଳନରେ ଉଚ୍ଚତମ ଏବଂ ନିମ୍ନତମ ମୂଲ୍ୟ $x = 0$ ରେ ରହିପାରିବ ।
ପ୍ରଥମ ଅବକଳଜ ପରୀକ୍ଷା ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

x ର ମୂଲ୍ୟ		$f'(x)=3x^2$ର ଚିହ୍ନ
x=1	→ ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ (-0.1) ମନେକର	$>o$
	→ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (0.1) ମନେକର	$>o$

ଏହିପରି $x = 0$ ରେ , $f'(x)$ ଚିହ୍ନ ବଦଳାଏ ନାହିଁ। ତେଣୁ $x = 0$ ରେ ନା ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ କିମ୍ବା ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ
ତେଣୁ $x = 0$, ଏକ ଇନ୍‌ଫ୍ଲେକସନ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ।

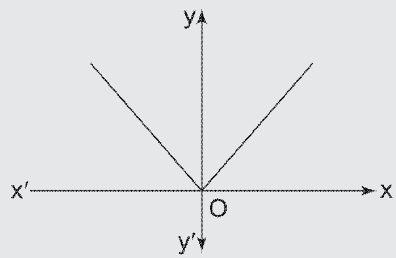
ମନ୍ତବ୍ୟ

(i) ମନେକର ଏକ ଫଳନ $f(x) = x^2$, x î R ସ୍ୱଷ୍ଟ ଭାବରେ, $x=0$ ରେ f ର ନିମ୍ନତମ ମୂଲ୍ୟ ଅଛି ଓ $f(0)=0$ କିନ୍ତୁ 'f'' ର କୌଣସି ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମୂଲ୍ୟ Rରେ ନାହିଁ



ଚିତ୍ର 2.10

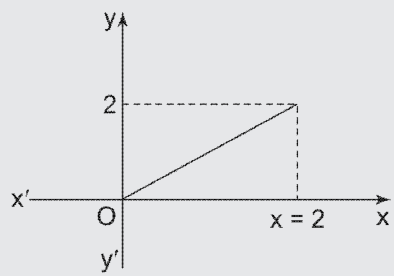
(ii) ମନେକର ଫଳନ $f(x) = |x|$, x î R



ଚିତ୍ର 2.11

x=0ରେ f ର ନିମ୍ନତମ ମୂଲ୍ୟ ଅଛି। ଆଉ ମଧ୍ୟ $f(0)=|0|=0$, କିନ୍ତୁ f' ର କୌଣସି ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମୂଲ୍ୟ Rରେ ନାହିଁ

(iii) ମନେକର ଫଳନ $f(x) = x$ î $(0,2)$ $(0,2)$ ଅନ୍ତରାଳରେ f' ର ଗରିଷ୍ଠ କିମ୍ବା ଲଘିଷ୍ଠ ମୂଲ୍ୟ ନାହିଁ। $f(x)=x$, x î $(0,2)$, $f'(x)=1$



ଚିତ୍ର 2.12

ଅନ୍ତରାଳ (0,2)ର ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ, f''(x)>0 ଅର୍ଥାତ୍ ଚିହ୍ନରେ କୌଣସି ପରିବର୍ତ୍ତନ ନାହିଁ।

∴ ଅନ୍ତରାଳ (0,2)ରେ ଫଳନ fର ଗରିଷ୍ଠ କିମ୍ବା ଲଘିଷ୍ଠ ନାହିଁ।

2.4.3 ଚରମ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ଦ୍ୱିତୀୟ ଅବକଳଜ ପରୀକ୍ଷା (ଗରିଷ୍ଠ କିମ୍ବା ଲଘିଷ୍ଠ)

ମନେକର f, ଅନ୍ତରାଳ I ଏବଂ $c \in I$ ରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଏକ ଦ୍ୱିତୀୟ ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ ଅଟେ । ତେବେ

i. ଯଦି $f'(c) = 0$ ଏବଂ $f''(c) < 0$, ତେବେ $x = c$ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ଓ $f(c)$, f ର ସ୍ଥାନୀୟ ବୃହତ୍ତମ ମୂଲ୍ୟ ଅଟେ ।

ii. ଯଦି $f'(c) = 0$ ଏବଂ $f''(c) > 0$, ତେବେ $x = c$ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ଏବଂ $f(c)$, f ର ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ଅଟେ ।

iii. ଯଦି $f'(c) = 0$ ଏବଂ $f''(c) = 0$, ତେବେ ପରୀକ୍ଷଣ ବିଫଳ ହେବ । ଚରମ ମାନର ଯାଞ୍ଚ ପାଇଁ ପରବର୍ତ୍ତୀ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ଆବଶ୍ୟକତା ଅଛି ।

ଉଦାହରଣ 2.50. ଫଳନ ' f ' ର ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଏବଂ ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10,\ x \in R$ ଦିଆଯାଇଥିବା ଫଳନ।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10$

ବର୍ତ୍ତମାନ $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$

$= 5x^2(x-3)(x-1)$

$\therefore$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^2(x-3)(x-1) = 0$

ବର୍ତ୍ତମାନ $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$

$$= \begin{cases} f''(0) = 0 \\ f''(1) = -10 < 0 \\ f'''(3) = 90 > 0 \end{cases}$$

ଦ୍ୱିତୀୟ ଅବକଳଜ ପରୀକ୍ଷା ଦ୍ୱାରା, $x = 1$, ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମୂଲ୍ୟ $f(1) = 11$

ଏବଂ $x = 3$ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ $f(3) = -17$

$x = 0$ ରେ ଦ୍ୱିତୀୟ ଅବକଳଜ ପରୀକ୍ଷା ବିଫଳ ହୁଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଥମ ଅବକଳଜ ପରିକ୍ଷା ଦ୍ୱାରା :

x ର ମୂଲ୍ୟ		$f'(x)=5x^2(x-3)(x-1)$ ର ଚିହ୍ନ
x=0	→ ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ (-0.1) ମନେକର	$>o$
	→ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (0.1) ମନେକର	$>o$

ତେଣୁ $x = 0$ ରେ, f ର ଗରିଷ୍ଠ କିମ୍ବା ଲଘିଷ୍ଠ ନାହିଁ ।

ଉଦାହରଣ2.51 . ଫଳନ 'f' ଦ୍ଵାରା ଦିଆଯାଇଥିବା $f(x)=|x+2|-1$ ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ କିମ୍ବା ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $f(x)=|x+2|-1$

କିମ୍ବା $f(x)=\begin{cases} x+2-1, & x\geq -2 \\ -(x+2)-1, & x\leq -2 \end{cases}$

କିମ୍ବା $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geq -2 \\ -x-3, & x\leq -2 \end{cases}$

ବର୍ତ୍ତମାନ $f'(x)=\begin{cases} 1, & x>-2 \\ -1, & x<-2 \end{cases}$

ପ୍ରଥମ ଅବକଳଜ ପରୀକ୍ଷା ଦ୍ଵାରା,

x ର ମୂଲ୍ୟ		$f'(x)$ର ଚିହ୍ନ
x=-2	→ ବାମ ପାର୍ଶ୍ଵ (-2.1) ମନେକର	$<o$
	→ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ଵ (-1.9) ମନେକର	$>o$

$f'(x)$, ଋଣାତ୍ମକରୁ ଧନାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରେ ।

\ $f(x)$ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ $x=-2$ ରେ ଅଛି ଏବଂ ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ହେଉଛି $f(-2)=|-2+2|-1=-1$

$f(x)$ ର ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ନାହିଁ ଏବଂ ତେଣୁ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମୂଲ୍ୟ ନାହିଁ ।

ଆମେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉପାୟରେ ମଧ୍ୟ ଯାଞ୍ଚ କରିପାରିବା:

ଏଠାରେ $f(x)=|x+2|-1$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, $|x+2|$ ³ 0

ସର୍ବନିମ୍ନ ପାଇଁ $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

ତେଣୁ , $f(x)$ର ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ–2 ରେ ଅଛି ଏବଂ $f(-2)=-1$

ଉଦାହରଣ 2.52. ଫଳନ $f(x)=\sin 2x+5$ ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଏବଂ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $f(x)=\sin 2x+5$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ –1 £ sin x £ 1 ଏବଂ –1 £ sin 2x £ 1

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ଵରେ '5' ଯୋଗ କଲେ

–1 + 5 < sin 2x + 5 £ 1 + 5

4 £ sin 2x + 5 £ 6

ତେଣୁ, $f(x)$ ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମୂଲ୍ୟ6 ଏବଂ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ .4

ଉଦାହରଣ 2.53. ଫଳନ $f(x)=x\sqrt{1-x},\ x>0$, ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଏବଂ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $f(x)=x\sqrt{1-x},\ x>0$

$$f'(x)=\sqrt{1-x}+\frac{x(-1)}{2\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}=0 \quad\Rightarrow\quad 2-3x=0 \quad\Rightarrow\quad x=2/3$$

ବର୍ତ୍ତମାନ

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1-x}(-3)-(2-3x).\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{(1-x)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-6(1-x)+(2-3x)}{2(1-x)^{3/2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-6(1-x)+(2-3x)}{2(1-x)^{3/2}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{-4+3x}{2(1-x)^{3/2}}\right]$$

$x=\frac{2}{3}$ ରେ $$f''(2/3)=\frac{1}{2}\left[\frac{-2}{2\left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}}\right]$$

ଦ୍ୱିତୀୟ ଅବକଳଜ ପରୀକ୍ଷା ଦ୍ୱାରା, $x = 2/3$ ଏକ ଗରିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ f ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମୂଲ୍ୟ $x = 2/3$ ରେ

$$f(2/3)=\frac{2}{3}\sqrt{1-2/3}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$ (ପରିମେୟ କରଣ)

$$=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 2.8

1. $(x-1)(x-2)(x-3)$ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $x^3 - 3x^2 + 3x + 7$ ର $x = 1$ରେ ନା ସର୍ବୋଚ୍ଚ କିମ୍ବା ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ଅଛି ।

3. ଦର୍ଶାଅ $\sin x(1+\cos x)$ ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମୂଲ୍ୟ $x=\frac{1}{3}\pi$ ରେ ଅଛି ।

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଫଳନ ଗୁଡ଼ିକର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଏବଂ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (i) $f(x)=(2x-1)^2+3$ *(ii)* $f(x)=9x^2+12x+2$ *(iii)* $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$

5. ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଫଳନ ଗୁଡ଼ିକର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଏବଂ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (i) $f(x)=x^3-3x$ *(ii)* $f(x)=\sin x-\cos x, x\in(0,2\pi)$

   (iii) $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x},\ \ x>0$ *(iv)* $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$

   (v) $f(x)=\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ *(vi)* $f(x)=(x-1)^4(x-2)^2$

   (vii) $f(x)=2x^3-6x^2+6x+5$

6. ପରୀକ୍ଷା କର କି '*f*'ର ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ କିମ୍ବା ସର୍ବନିମ୍ନ '0' ରେ ଅଛି ।

   (i) $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x>0\\ -3x+1, & x\le 0\end{cases}$ *(ii)* $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\le 0\\ -3x+1, & x>0\end{cases}$

   (iii) $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\ge 0\\ -3x+1, & x<0\end{cases}$ *(iv)* $f(x)=|x|+|x-1|$

7. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଫଳନ ଗୁଡ଼ିକର ସର୍ବୋଚ୍ଚ / ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (i) $f(x)=-|x+1|+3$ *(ii)* $f(x)=|\sin 4x+3|$

   (iii) $f(x)=x+1,\ \ x\in(-1,1)$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

4. *(i)* ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ =-2

(ii) ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ = -2

(iii) ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ = 1/3, ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମୂଲ୍ୟ = 3

5. (i) 1ର ସର୍ବନିମ୍ନ $f(1)= -2$, -1 ରେ ସର୍ବୋଚ୍ଚ, $f(-1)= 2$

(ii) $\frac{7}{4}\pi$ ରେ ସର୍ବନିମ୍ନ $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, ସର୍ବୋଚ୍ଚ $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\sqrt{2}$,

(iii) $x = 2$ ରେ ସର୍ବନିମ୍ନ, $f(2) = 1$

(iv) 0 ରେ ସର୍ବୋଚ୍ଚ, $f(0)=\frac{1}{2}$

(v) 1, ସର୍ବୋଚ୍ଚ $f(1)=\frac{1}{4}$, -1 ରେ ସର୍ବନିମ୍ନ $f(-1)=-\frac{1}{4}$

(vi) $1, \frac{5}{3}$ ରେ ସର୍ବୋଚ୍ଚ $f(1)=0$, $f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{16}{729}$, $x=2$, ରେ ସର୍ବନିମ୍ନ $f(2)=0$

(vii) ଗରିଷ୍ଠ କିମ୍ବା ଲଘିଷ୍ଠ ନାହିଁ।

6. (i) ସର୍ବନିମ୍ନ (ii) ସର୍ବୋଚ୍ଚ

(iii) ସର୍ବୋଚ୍ଚ କିମ୍ବା ସର୍ବନିମ୍ନ ନୁହେଁ (iv) ସର୍ବନିମ୍ନ

7. (i) ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମୂଲ୍ୟ =3 ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ନାହିଁ

(ii) ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ =2, ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମୂଲ୍ୟ =4 (iii) ସର୍ବୋଚ୍ଚ କିମ୍ବା ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ନାହିଁ।

କେତେକ ବିବିଧ ଉଦାହରଣ

ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠ ରେ ଆଧାରିତ

ଉଦାହରଣ 2.54: ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଦତ୍ତ ପରିସୀମା ସହିତ ସମସ୍ତ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରରେ, ବର୍ଗର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସବୁଠାରୁ ବଡ଼।

ସମାଧାନ: ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କର।

ଉଦାହରଣ 2.55: ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଦତ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହିତ ସମସ୍ତ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରରେ, ବର୍ଗର ପରିସୀମା ସବୁଠାରୁ ଛୋଟ।

ସମାଧାନ: ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କର।

ଉଦାହରଣ 2.56: ଯଦି ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୂଜର ଏକ ବାହୁ ଓ କର୍ଣ୍ଣର ଲମ୍ବର ଯୋଗଫଳ ଦିଆଯାଇଛି, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ ତ୍ରିଭୂଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ହେବ ଯେତେବେଳେ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ କୋଣ $\frac{\pi}{3}$ ହେବ।

ସମାଧାନ: ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କର।

ଉଦାହରଣ 2.57: ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତରେ ଉଲ୍ଲେଖ କରାଯାଇଥିବା ସମସ୍ତ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରରେ, ବର୍ଗର କ୍ଷେତ୍ର ସର୍ବାଧିକ।

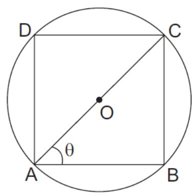
ସମାଧାନ: ମନେକର ABCD, କେନ୍ଦ୍ର 'O' ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 'r ' ବିଶିଷ୍ଟ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତରେ ଅଙ୍କିତ ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର

ମନେକର $\angle CAB = \theta$ ତେବେ, $AC = 2r,\ AB = 2r\cos\theta$ ଏବଂ $BC = 2r\sin\theta$.

ମନେକର 'A' ABCD ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

ତେବେ, $A = AB \times BC = 4r^2 \sin\theta\cos\theta = 2r^2 \sin 2\theta$

ତେଣୁ : $A = 2r^2 \sin 2\theta$ ଯେଉଁଠାରେ 'r' ଏକ ଧ୍ରୁବକ



ଚିତ୍ର *2.13*

$\therefore \quad \frac{dA}{d\theta} = 4r^2 \cos 2\theta$ ଏବଂ $\frac{d^2A}{d\theta^2} = -8r^2 \sin 2\theta$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\frac{dA}{d\theta} = 0 \quad \Rightarrow 4r^2 \cos 2\theta = 0$

$\Rightarrow \quad \cos 2\theta = 0 \quad \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$ ଅର୍ଥାତ୍ $\theta = \frac{\pi}{4}$

ଏବଂ $\left[\frac{d^2A}{d\theta^2}\right]_{\theta=\pi/4} = -8r^2 \sin\frac{\pi}{2} = -8r^2 < 0$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}$ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ର ଏକ ବିନ୍ଦୁ ।

ତେଣୁ, ଯେତେବେଳେ $\theta = \frac{\pi}{4}$ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ହେବ,

ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ, $AB = 2r\cos\frac{\pi}{4} = r\sqrt{2}$

ଏବଂ $BC = 2r\sin\frac{\pi}{4} = r\sqrt{2}$

ଏହିପରି, $AB = BC$ ଏବଂ ABCD ଏକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 2.58. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତରେ ଅଙ୍କିତ ସର୍ବୋତ୍ତମ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଯୁକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଟେ ।

ସମାଧାନ: ମନେକର ABC, କେନ୍ଦ୍ର 'O' ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 'r' ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତରେ ଅଙ୍କିତ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ସର୍ବୋଚ୍ଚ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ପାଇଁ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A, ଭୂମି BC ଠାରୁ ସର୍ବାଧିକ ଦୂରତାରେ ରହିବା ଉଚିତ।

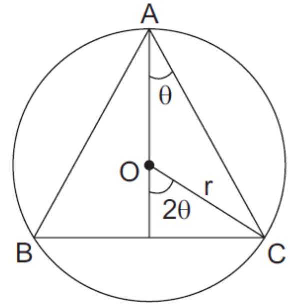
ତେଣୁ 'A' ନିଶ୍ଚିତ ବ୍ୟାସ ରେ BC ସହିତ ଲମ୍ବ ଭାବରେ ରହିବ ।

ତେଣୁ AD⊥ BC ତେଣୁ ତ୍ରିଭୁଜ ABC ନିଶ୍ଚିତ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ ।

ମନେକର $\angle CAD = \theta$.

ବର୍ତ୍ତମାନ, $BC = 2CD = 2OC\sin 2\theta = 2r\sin 2\theta$

ଏବଂ, $AD = (OA + OD) = (r + r\cos 2\theta)$.



ଚିତ୍ର *2.14*

ମନେକର 'A' ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଅଟେ।

ତେବେ $A=\frac{1}{2}BC\times AD=r^2\sin 2\theta(1+\cos 2\theta)$.

$\therefore \quad \frac{dA}{d\theta}=r^2\left\{\sin 2\theta(-2\sin 2\theta)+(1+\cos 2\theta).2\cos 2\theta\right\}$

$=r^2\left\{2\left(\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta\right)+2\cos 2\theta\right\}=2r^2\left[\cos 4\theta+\cos 2\theta\right]$

ଏବଂ $\frac{d^2A}{d\theta^2}=2r^2\left\{-4\sin 4\theta-2\sin 2\theta\right\}=-4r^2\left[2\sin 4\theta+\sin 2\theta\right]$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\frac{dA}{d\theta}=0 \quad \Rightarrow \quad \cos 4\theta+\cos 2\theta=0$

$\Rightarrow \quad \cos 4\theta=-\cos 2\theta=\cos(\pi-2\theta)$

$\Rightarrow \quad 4\theta=\pi-2\theta \quad \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$

ଏବଂ $\left[\frac{d^2A}{d\theta^2}\right]_{\theta=\pi/6}=-4r^2\left(2\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)=-6r^2\sqrt{3}<0$

$\therefore \quad \theta=\frac{\pi}{6}$ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ର ଏକ ବିନ୍ଦୁ।

ତେଣୁ, ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ, ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ଅଟେ।

ତେଣୁ ABC ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ।

ଘନବସ୍ତୁର ଘନଫଳ ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଆଧାରରେ ପ୍ରଶ୍ନ

ଉଦାହରଣ 2.59 ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଦତ୍ତ ଘନଫଳର ଏକ ସିଲିଣ୍ଡର ଯାହାର ଶୀର୍ଷ ଖୋଲା ଅଛି, ତାର ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସର୍ବନିମ୍ନ, ଯଦି ଏହାର ଉଚ୍ଚତା ତାର ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହ ସମାନ ହେବ।

ସମାଧାନ: ନିଜେ ଚେଷ୍ଟାକର।

ଉଦାହରଣ 2.60 ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଏକ ସିଲିଣ୍ଡର ର ଉଚ୍ଚତା ଯାହାର ଉପର ଖୋଲା ଅଛି, ଏକ ଦତ୍ତ ପୃଷ୍ଠଭୂମି ଏବଂ ବୃହତମ ଘନଫଳ ଅଛି, ଏହାର ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହିତ ସମାନ।

ସମାଧାନ: ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କର

ଉଦାହରଣ 2.61 ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଏକ ସିଲିଣ୍ଡର ର ଉଚ୍ଚତା ଯାହାର ଉପର ଖୋଲା ଅଛି; ଯାହାର ପୃଷ୍ଠକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବୃହତମ ଘନଫଳ $\sin^{-1}(1/3)$, ଅଟେ।

ସମାଧାନ: ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କରନ୍ତୁ.

ଉଦାହରଣ 2.62 ଦର୍ଶାଅ ଯେ ବର୍ଗାକାର ଭୂମି ସହିତ ଏକ ବନ୍ଦ ଘନାକାର ବସ୍ତୁର ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏବଂ ଦତ୍ତ ଘନଫଳ ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବ ଯେତେବେଳେ ଏହା ଏକ ଘନ ହେବ।

ସମାଧାନ: ମନେକର 'V' ଏକ ବନ୍ଦ ଘନାକାର ବସ୍ତୁର ସ୍ଥିର ଘନଫଳ ଯାହାର ଲମ୍ବା a, ଚୌଡା a ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା h ଅଟେ। ମନେକର S, ଏହାର ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ।

ତେବେ : $V = (a \times a \times h)$ କିମ୍ବା $h = \dfrac{V}{a^2}$ ... (1)

ବର୍ତ୍ତମାନ $S = 2\left(a^2 + ah + ah\right) = 2\left(a^2 + 2ah\right) = 2\left(a^2 + \dfrac{2V}{a}\right)$ [(1)କୁ ଉପଯୋଗ କଲେ]

ଅର୍ଥାତ୍ $S = 2\left(a^2 + \dfrac{2V}{a}\right)$, $\setminus$ $\dfrac{dS}{da} = 2\left(2a - \dfrac{2V}{a^2}\right)$ ଏବଂ $\dfrac{d^2S}{da^2} = \left(4 + \dfrac{8V}{a^3}\right)$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\dfrac{dS}{da} = 0 \Rightarrow V = a^3 \Rightarrow a \times a \times h = a^3 \Rightarrow h = a$

ଯେତେବେଳେ $h = a$, ଆମେ ପାଇବା :

$$V = a^3$$

$$\therefore \quad \left[\frac{d^2S}{da^2}\right]_{h=a} = 4\left(4 + \frac{8a^3}{a^3}\right) = 12 > 0$$

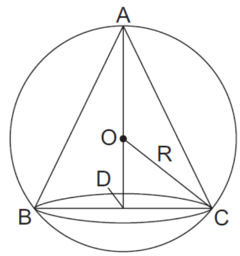
ତେଣୁ S ସର୍ବ ନିମ୍ନ ଯେତେବେଳେ ଲମ୍ବା = *a*, ଚୌଡା = *a* ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା = *a*, ଅର୍ଥାତ, ଯେତେବେଳେ ଏହା ଏକ ଘନ ହୁଏ।

ଉଦାହରଣ 2.63: ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଦତ୍ତ ପୃଷ୍ଠର ଏକ ବନ୍ଦ ସିଲିଣ୍ଡରର ଉଚ୍ଚତା ଓ ସର୍ବାଧିକ ଘନଫଳ ଏହାର ଭୂମିର ବ୍ୟାସ ସହିତ ସମାନ।

ସମାଧାନ: ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କର।

ଉଦାହରଣ 2.64: ଦର୍ଶାଅ ଯେ ସର୍ବାଧିକ ଘନଫଳର କୋନ ଯାହାକି ଦତ୍ତ ଗୋଲକରେ ଏପରି ଅଙ୍କିତ ହୋଇପାରିବ ଯେ ଏହାର ଉଚ୍ଚତାର ତିନିଗୁଣ, ଗୋଲକର ବ୍ୟାସର ଦୁଇ ଗୁଣ ସହିତ ସମାନ। ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ R ର ଏକ ଗୋଲକରେ ଅଙ୍କିତ ସବୁଠାରୁ ବଡ଼ କୋନର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର *R* ଦତ୍ତ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଯାହାର କେନ୍ଦ୍ର *O*। ଏବଂ ମନେକର *V* ଅଙ୍କିତ କରାଯାଇଥିବା କୋନ୍‌ର ଘନଫଳ, ଏହାର ଉଚ୍ଚତା, *h* ଏବଂ *r* ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ।



ଚିତ୍ର 2.15

ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ, ଆମେ ପାଉ

$$OD = AD - AO = (h - R)$$

$$R^2 = (h-R)^2 + r^2 \quad \text{କିମ୍ବା} \quad r^2 = h(2R-h) \qquad \ldots (1)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h^2 (2R-h)$ [ସମୀକରଣ(1) ଉପଯୋଗ କଲେ]

$\therefore \quad \frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi h(4R-3h)$

ଏବଂ $\frac{d^2V}{dh^2} = \left(\frac{4}{3}\pi R - 2\pi h\right)$ ଗରିଷ୍ଠ କିମ୍ବା ଲଘିଷ୍ଠ ପାଇଁ, ଆମେ ପାଇବୁ

$\frac{dV}{dh} = 0$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\frac{dV}{dh} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi h(4R-3h) = 0$

$\Rightarrow h = 0$ କିମ୍ବା $(4R-3h) = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{4}{3}R \qquad [\because h \neq 0]$

ଏବଂ $\left[\frac{d^2V}{dh^2}\right]_{h=(4/3)R} = -\frac{4\pi R}{3} < 0$

ତେଣୁ, V ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଯେତେବେଳେ $h = \frac{4}{3}R$, ଅର୍ଥାତ୍ ଯେତେବେଳେ (3h = 2(2R)

ଅର୍ଥାତ୍ ଉଚ୍ଚତାର 3 ଗୁଣା = ବ୍ୟାସ 2 ଗୁଣା

ବୃହତ୍ତମ କୋନ୍‌ର ଘନଫଳ $= \frac{1}{3}\pi \times \frac{16R^2}{9} \times \left(2R - \frac{4R}{3}\right) = \frac{32\pi R^3}{81}$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 2.9

1. 8କୁ ଦୁଇଟି ଧନାତ୍ମକ ଅଂଶରେ ବିଭାଜିତ କର ଯେପରି କି ଗୋଟିଏର ବର୍ଗ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟର ଘନର ଯୋଗଫଳ ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବ।
2. 'a'କୁ ଦୁଇଟି ଅଂଶରେ ବିଭାଜିତ କର ଯେପରିକି ଏକ ଅଂଶର pth ଘାତ ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଂଶର qth ଘାତର ଗୁଣଫଳ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ହୋଇପାରେ।
3. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଦତ୍ତ ପରିସୀମା ସହିତ ସବୁଠାରୁ ବଡ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଏକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ହେବ ।
4. ଏକ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରରର ପରିସୀମାକୁ ଦେଖି ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଯେତେବେଳେ ଏହା ଏକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ହେବ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣ ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବ ।
5. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଦିଆଯାଇଥିବା କର୍ଣ୍ଣର ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୂଜର ପରିସୀମା ସର୍ବୋଚ୍ଚ, ଯେତେବେଳେ ତ୍ରିଭୂଜ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ହୁଏ।
6. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ନ୍ୟୁନତମ ବକ୍ରପୃଷ୍ଠ ଓ ଦିଆଯାଇଥିବା ଘନଫଳର ଲମ୍ବ ବୃତ୍ତୀୟ କୋନ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା ହେଉଛି ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର $\sqrt{2}$ ଗୁଣା ସହ ସମାନ ।

7. ବକ୍ର $y^2 = 4ax$ ରେ ବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାକି, (2,-8) ବିନ୍ଦୁର ନିକଟତମ ଅଟେ।

8. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବର୍ଗାକାର ଭୂମି ଓ ଦିଆଯାଇଥିବା ଘନଫଳ ଥିବା ବନ୍ଦ ଘନାକୃତି ବସ୍ତୁର ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବ ଯେତେବେଳେ ଏହା ଏକ ଘନ।

ଉତ୍ତରମାଳା

1. 6 , 2   2. $\frac{ap}{p+q}, \frac{aq}{p+q}$ 7. (4,-4)

ଆକର୍ଷଣୀୟ ତଥ୍ୟ

- ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଏବଂ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ଯାହା ଉଚ୍ଚତମ ଏବଂ ନିମ୍ନତମ ଉପଯୋଗ କରି ମିଳିଛି, ଏକତ୍ରଭାବେ ଏହା ଚରମ ଭାବରେ ଜଣାଶୁଣା (ଚରମ ମୂଲ୍ୟର ବହୁବଚନ)
- କାଜାଖସ୍ତାନର ଆସ୍ଥାନାରେ ବିଶ୍ୱ ଏକ୍ସପୋ 2017 ରେ ଏକ ଶିଳ୍ପକଳା ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହୋଇଥିଲା, ଯାହାକୁ ଗରିଷ୍ଠ/ ଲଘିଷ୍ଠ ରୂପରେ ନାମିତ କରାଯାଇଥିଲା,ଯାହାର ଡିଜାଇନ ଅଦ୍ୱିତୀୟ ଥିଲା ।

ଭିଡିଓ ସଂଯୋଗ (ଉତ୍ସ: NPTEL)

ଚରମ ମୂଲ୍ୟ -1

ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ

- ଔଷଧର ପ୍ରଭାବ ଅଧ୍ୟୟନ କରି / ରୋଗର ପ୍ରସାର ଅଧ୍ୟୟନ କରିବା ସମୟରେ ଚିକିତ୍ସାରେ ପ୍ରୟୋଗ । (ଅର୍ଥାତ୍, କେତେ ସମୟ ପରେ ସର୍ବାଧିକ ଦକ୍ଷତା କରାଯାଏ)।
- ପରମାଣୁ ଶକ୍ତି କ୍ଷେତ୍ରରେ କ୍ଷୟର ଅଧ୍ୟୟନ।
- ବ୍ୟବସାୟରେ, ଶିଳ୍ପ ସେମାନଙ୍କର ଲାଭକୁ ବୃଦ୍ଧି କରିବା କିମ୍ବା ସେମାନଙ୍କ କ୍ଷତି କମାଇବା ପାଇଁ ଏହି ଧାରଣାକୁ ବ୍ୟବହାର କରେ, ଦ୍ରବ୍ୟର ମୂଲ୍ୟକୁ ଆକଳନ କରି ଏବଂ ଆହୁରି ମଧ୍ୟ କେତେ ଭଣ୍ଡାର ରଖିବାକୁ ହେବ।
- ଜନସଂଖ୍ୟା ବୃଦ୍ଧି ବକ୍ର।

ସମାହିତ କଠିନ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

ଉଦାହରଣ 1: ମନେକର *f: [2, 5]* ® *R* ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ *(2, 5)* ରେ ଅବକଳନୀୟ । ଧରାଯାଉ ଯେ $f'(x)=[f(x)]^2+\pi$ ସମସ୍ତ $x \in (2, 5)$ ପାଇଁ। *f(5) – f(2)* ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ଅଛି *f*, [2, 5]ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ (2, 5)ରେ ଅବକଳନୀୟ ।

ତେଣୁ, ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ଦ୍ୱାରା ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଏକ $c \in (2,5)$ ଅଛି ଯେପରିକି

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad \text{ଏଠାରେ } b=5, a=2$$

ତେବେ $$\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=(f(c))^2+\pi \qquad \left[\because (f(c))^2 \geq 0 \;\; \forall c \in (2,5)\right]$$

$$\frac{f(5)-f(2)}{3} \geq \pi$$

\ $$f(5)-f(2) \geq 3\pi$$

ଉଦାହରଣ 2. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $e^x \cos x = 1$,ର ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ମୂଳ ମଧ୍ୟରେ, $e^x \sin x - 1 = 0$ ର ଅତି କମରେ ଗୋଟିଏ ମୂଳ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି ।

ସମାଧାନ। ପ୍ରଦତ୍ତ ଅଛି $e^x \cos x = 1$

ପୁନଃସଜ୍ଜିତ କରିବା ପରେ, ଆମେ ପାଇବା,

$$\cos x = e^{-x}$$

ମନେକର $f(x) = \cos x - e^{-x}$

(i) Cosine ଫଳନ ଏବଂ ଘାତାଙ୍କ ଫଳନ ଉଭୟ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ R ରେ ଅବକଳନୀୟ,ତେଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତରାଳ [a, b] ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଓ ଅବକଳନୀୟ (ମନେକର)

(ii) ଧରାଯାଉ ଯେ '*f*' ର ମୂଳ a,b ଅଟେ ।

ତେବେ $f(a) = f(b) = 0$

ତେଣୁ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ଦ୍ୱାରା, $\exists\, c \in (a, b)$, ଯେପରିକି

$$f'(c) = 0$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $f'(x) = -\sin x + e^{-x}$

$\Rightarrow \quad -\sin c + e^{-c} = 0$

$\Rightarrow \quad e^{-c} = \sin c$

କିମ୍ବା $$1 = e^c \sin c$$

ଅର୍ଥାତ୍ $$e^c \sin c - 1 = 0$$

ଏହାର ଅର୍ଥ $e^x \sin x - 1 = 0$ ର ଗୋଟିଏ ମୂଳ $c \in (a, b)$ ଅର୍ଥାତ୍, $e^x \cos x = 1$ ର ଦୁଇଟି ମୂଳ ମଧ୍ୟରେ।

ଉଦାହରଣ 3: ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $f(x) = 3px^2 + 2qx + r = 0$ ର $(0, 1)$ ରେ ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅଛି ଯଦି $P + q + r = 0$

ସମାଧାନ ମନେକର $f(x) = px^3 + 2qx + rx$

i) ସ୍ପଷ୍ଟ ଭାବରେ $f(x)$, x ର ପଲିନୋମିଆଲ ହୋଇଥିବାରୁ ଅନ୍ତରାଳ $[0.1]$ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ,

ii) $f'(x) = 3px^2 + 2qx + r$ ପୁଣି x ର ପଲିନୋମିଆଲ ହୋଇଥିବାରୁ $f(x)$, $(1, 0)$ରେ ଅବକଳନୀୟ ।

iii) $f(0) = p(0)^3 + q(0)^2 + r(0) = 0$

$f(1) = p(1)^3 + q(1)^3 + r(1) = p + q + r = 0$

ତେଣୁ, ରୋଲଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ପୂରଣ ହେଲା । ଅତିକମରେ ଏଠାରେ ଗୋଟିଏ $c \in (0, 1)$ ଅଛି ଯେପରି କି

$$f'(c) = 0$$

$$f'(c) = 3pc^2 + 2qc + r$$

କିମ୍ବା $$f'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3pc^2 + 2qc + r = 0$$

ଯାହା କି c ରେ ଦ୍ୱିଘାତି ଏବଂ $c \in (0, 1)$

ତେଣୁ $(0, 1)$ରେ $3px^2 + 2qx + r = 0$ ର ମୂଳ ଅଛି।

ଉଦାହରଣ 4. ମନେକର ଫଳନ f ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳ $[a,b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ, ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳ (a, b) ରେ ଅବକଳନୀୟ ଏବଂ $f'(x) = 0$ ସମସ୍ତ $x \in (a, b)$ ପାଇଁ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ f, ଅନ୍ତରାଳ $[a,b]$ ରେ ଧ୍ରୁବକ ।

ସମାଧାନ। f, $[a,b]$ରେ ଧ୍ରୁବକ ଦେଖାଇବା ପାଇଁ ଏହା ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ ଯଥେଷ୍ଟ ଯେ $f(x) = f(a)\ \forall\ x \in [a, b]$

ମନେକର $x \in [a, b]$ ଯେପରି କି $x > a$.

ବର୍ତ୍ତମାନ $[a, x]$ ରେ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ :

(i) f, $[a,b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ

$\therefore$ f, $[a, x]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ

(ii) ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ f, (a, b) ରେ ଅବକଳନୀୟ।

$\therefore$ f, (a, x) ରେ ଅବକଳନୀୟ।

ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ଦ୍ୱାରା, ଅତିକମରେ ଏଠାରେ ଗୋଟିଏ $c \in (a, x)$ ଅଛି ଯେପରି କି

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c) \quad \ldots (1)$$

ଯେହେତୁ $f'(c)=0$ $\left[\therefore f'(x)=0 \, \forall \, x\in(a,b)\right]$

ସମୀକରଣ (1) ରୁ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$

$\therefore$ $f(x)-f(a)=0$

$\Rightarrow$ $f(x)=f(a)$ ଯକୌଣସି $x\in[a,b]$ ପାଇଁ.

$\therefore$ *[a,b]* ରେ *f* ଏକ ଧ୍ରୁବକ

ଉଦାହରଣ 5. ମନେକର $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ଯଦି } 0<x\le 1 \\ 0, & \text{ଯଦି } x=0 \end{cases}$ ଏବଂ $g(x)=x^2$ ସମସ୍ତ $x\in[0,1]$ ପାଇଁ

ତେବେ ଉଭୟ *f* ଏବଂ *g*, *[0,1]* ରେ ଅବକଳନୀୟ ଏବଂ $g(x)>0,\ x\neq 0$ ପାଇଁ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ

$\lim_{x\to 0} f(x)=0=\lim_{x\to 0} g(x)$ ଏବଂ $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ ବିଦ୍ୟମାନ ନାହିଁ,

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ଯଦି } 0<x\le 1 \\ 0, & \text{ଯଦି } x=0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0,\ x\neq 0$$

ଆଉମଧ୍ଯ $g(x)=x^2,\ \forall\, x\in(0,1)$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} x^2=0,\ \forall\, x$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $x\neq 0$ ପାଇଁ $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin 1/x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

$=\sin(\infty)$

$=-1$ ଏବଂ 1 ମଧ୍ୟରେ ଦୋଳନ କରିଥାଏ

$=$ ବିଦ୍ୟମାନ ନାହିଁ

ଉଦାହରଣ 6. *f*(*x*) ପାଇଁ ମ୍ୟାକ୍‌ଲରିନ ପଲିନୋମିଆଲର n^{th} ଅର୍ଡରର ଅବଶେଷ ବ୍ୟବହାର କରି, ଯାହାକି

$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(c)\ge 0,\quad 0\le c\le x$ ଭାବରେ ସଂଜ୍ଞାବହୁତ ହୋଇଛି

ମ୍ୟାକଲରିନ ପଲିନୋମିଆଲର ଅତିକ୍ରମରେ କ'ଣ ହେବ, ଯାହାକି *sin(0.1)* ଗଣନାରେ 10^{-6} ଅଧିକ, ପରମ ଯଥାର୍ଥ ତ୍ରୁଟି ପାଇବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ଅଛି $$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c) \geq 0, \quad 0 \leq c \leq x$$

$$R_n(0.1) = \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c) \geq 0, \quad 0 \leq c \leq 0.1$$

ଯେହେତୁ $f(x)$ର ଅବକଳଜ $\sin x$ ଏବଂ $\cos x$ ଏବଂ $|\sin x| \leq 1$ ଓ $|\cos x| \leq 1$

$\therefore$ $$|f^{n+1}(c)| \leq 1$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $$R_n(0.1) \leq \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!}(1)$$

$$R_n(0.1) = \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ତେଣୁ, ଯେତେବେଳେ $$R_n(0.1) < 10^{-6}$$

ଅର୍ଥାତ୍ $$\frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

ଏହା କେବଳ ସମ୍ଭବ, ଯେତେବେଳେ $n \geq 4.$

କିନ୍ତୁ, ଯେହେତୁ $\sin x$ ପାଇଁ ମ୍ୟାକଲଇନଙ୍କ ଗଲିନୋମିଆଲରେ କେବଳ ଅଯୁଗ୍ମ ପଦ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଅଛି ତେଣୁ, $n \geq 5.$

ଉଦାହରଣ 7: ମନେକର $f:(0,\infty) \to R$ ଅବକଳନୀୟ

ମନେକର $\lim_{x\to\infty} f(x) + f'(x) = L$.

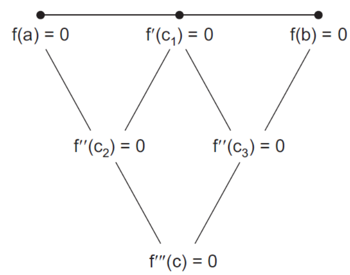
ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ଏବଂ $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$

ସମାଧାନ: ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କର।

ଉଦାହରଣ 8. ମନେକର $f:(a,b) \to R$ ରେ ତିନିଥର ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ ଯେପରି କି $f(a) = f(b) = 0$ ଏବଂ

$f'(a) = f'(b) = 0$ ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

ଏଠାରେ $c \in (a, b)$ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି ଯେପରି କି $f'''(c) = 0$ ଅଛି.



ଚିତ୍ର 2.16

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $f:(a,b) \to R$ ରେ ଏକ ତିନିଥର ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ ।

$\Rightarrow f,\ [a, b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ $f,\ (a, b)$ ରେ ଅବକଳନୀୟ ଏବଂ

ଆଉ ମଧ୍ୟ $f(a) = f(b) = 0$

ତେବେ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ଦ୍ୱାରା, ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ $G \in (a, b)$ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି, ଯେପରି କି $f'(c_1) = 0$

ଆଉଥରେ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ f' ପାଇଁ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

i) f', $[a, b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ ତେଣୁ $[a, c1]$ ଓ $[c1, b]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ii) f', (a, b) ରେ ଅବକଳନୀୟ, ତେଣୁ $(a, c1)$ ଓ $(c1, b)$ ରେ ଅବକଳନୀୟ

iii) $f'(a) = f'(c1) = f(b) = 0$

ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ଦ୍ୱାରା, ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ $c2 \in (a, c1)$ ଅଛି ଏବଂ ଗୋଟିଏ $c3 \in (c1, b)$ ଅଛି ଯେପରି କି

$c2 \in (a, c1)$ ପାଇଁ $f''(c2) = 0$,

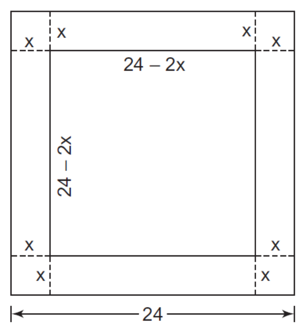
ଏବଂ $c3 \in (c1, b)$ ପାଇଁ $f''(c3) = 0$,

ଏହିପରି $(c2, c3)$ ରେ, f'' ରେ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, f'' ଯେହେତୁ, $[c2, c3]$ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ $(c2, c3)$ରେ ଅବକଳନୀୟ ଏବଂ $f''(c2) = f''(c3) = 0$ ତେବେ ଏଠାରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ $c \in (c2, c3)$ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି, ଯେପରି କି $c \in (c2, c3)$ ପାଇଁ $f'''(c) = 0$,

ତେଣୁ $c \in (a, b)$ ପାଇଁ $f'''(c) = 0$,

ଉଦାହରଣ 9: 24 ସେଣ୍ଟିମିଟର ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବର୍ଗାକାର ଟିଣ ଖଣ୍ଡକୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣରୁ ଏକ ବର୍ଗ କାଟି ଏବଂ ଶୀର୍ଷ ନଥିବା ଏକ ବାକ୍ସ ଗଠନ ପାଇଁ ଫ୍ଲାପଗୁଡ଼ିକୁ ଭାଙ୍ଗିକରି ଏକ ବାକ୍ସରେ ତିଆରି କରାଯିବ। କାଟିବା ପାଇଁ ବର୍ଗର ପାର୍ଶ୍ୱ କ'ଣ ହେବା ଉଚିତ ଯାହାଦ୍ୱାରା ବାକ୍ସର ଘନଫଳ ସର୍ବାଧିକ ହେବ। ଆଉ ମଧ୍ୟ ଏହି ସର୍ବାଧିକ ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର ବର୍ଗର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ ଯାହାକୁ କି କଟାଯାଇଛି = x



ଚିତ୍ର 2.17

$\therefore$ ବାକ୍ସ ପାଇଁ, ଲମ୍ବ = $24–2x$

ପ୍ରସ୍ଥ = $24–2x$

ଉଚ୍ଚତା = x

ମନେକର ବାକ୍ସର ଫଳାଫଳ $V = x(24-2x)^2$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dx} = x.2(24-2x)(-2)+(24-2x)^2.1$$

$$= (24-2x)(24-6x)$$

ଗରିଷ୍ଠ କିମ୍ବା ଲଘିଷ୍ଠ ପାଇଁ, $\frac{dV}{dx} = 0$

$\Rightarrow$ $(24-2x)(24-6x) = 0 \Rightarrow x = 4, 12$

$x = 4$ [$\because$ x =12ସେ.ମି ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ]

ଆଉମଧ୍ୟ $\frac{d^2V}{dx^2} = (24-2x)(-6) + (24-6x)(-2)$

$x = 4$ ରେ $\frac{d^2V}{dx^2} = (24-8)(-6) =$ ରଣାତ୍ମକ

$\Rightarrow$ ଯେତେବେଳେ $x = 4$ V ହେବ ସର୍ବାଧିକ

$\therefore$ ଯେତେବେଳେ ବର୍ଗର ବାହୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣରୁ 4 ସେଣ୍ଟିମିଟର କଟାଯାଏ, ଘନଫଳ ସର୍ବାଧିକ ହେବ।

$\therefore$ ସର୍ବାଧିକ ଘନଫଳ = 4(24 – 8)2 = 1024 ଘନ ସେଣ୍ଟିମିଟର

ଉଦାହରଣ 10: ଶୀର୍ଷରେ ଖୋଲାଥିବା ଏକ ଆୟତାକାର ଭୂମି ଓ ଆୟତାକାର ପାର୍ଶ୍ୱ ଥିବା ଏକ ଟାଙ୍କି ତିଆରି କରାଯିବ, ଯାହାର ଗଭୀର 2 ମିଟର ଓ ଘନଫଳ 8 ଘନ ମିଟର ଅଟେ। ଯଦି ଟାଙ୍କିର ନିର୍ମାଣ ପାଇଁ ଭୂମିର ଖର୍ଚ୍ଚ ₹70 ପ୍ରତି ବର୍ଗ ମିଟର ପିଛା ଓ ପାର୍ଶ୍ୱର ଖର୍ଚ୍ଚ ₹45 ପ୍ରତି ବର୍ଗ ମିଟର ପିଛା ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ସର୍ବନିମ୍ନ କେତେ ଟଙ୍କା ଖର୍ଚ୍ଚରେ ଟାଙ୍କି ନିର୍ମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ।

ସମାଧାନ: ମନେକର x ମିଟର ଓ y ମିଟର ଟ୍ୟାଙ୍କିର ଭୂମିର ବାହୁ ଅଟେ। ଟ୍ୟାଙ୍କିର ଗଭୀର 2 ମିଟର ଦତ୍ତ ଅଛି।

ଟ୍ୟାଙ୍କିର ଘନଫଳ = $2xy\ m^3$

$\Rightarrow$ $2xy = 8$

$\Rightarrow$ $xy = 4$ [$\because$ ଟ୍ୟାଙ୍କିର ଘନଫଳ = $8m^3$ (ଦତ୍ତ ଅଛି)]

ଟ୍ୟାଙ୍କିର ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $(x \times y)\ M^2$

ବର୍ତ୍ତମାନ, ଏଠାରେ ଦିଆଯାଇଛି ଯେ ଟ୍ୟାଙ୍କିର ଭୂମିର ନିର୍ନାଣ ଖର୍ଚ୍ଚ ବର୍ଗମିଟର ପିଛା 70 ଟଙ୍କା।

$\therefore$ ଟ୍ୟାଙ୍କିର ଭୂମିର ନିର୍ମାଣ ମୂଲ୍ୟ = 70 xy

ଟ୍ୟାଙ୍କିର ପାର୍ଶ୍ୱ ଗୁଡ଼ିକର ସମୁଦାୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

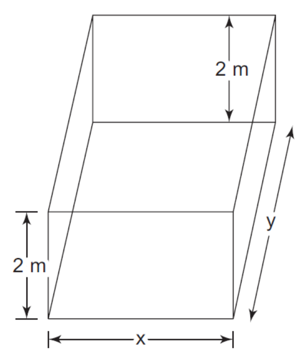
$= (2x + 2x + 2y + 2y)\ M^2 = 4(x + y)\ M^2$

ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ ଟ୍ୟାଙ୍କିର ପାର୍ଶ୍ୱର ନିର୍ମାଣ ମୂଲ୍ୟ ବର୍ଗ ମିଟର ପିଛା 45 ଟଙ୍କା।

ଟ୍ୟାଙ୍କିର ପାର୍ଶ୍ୱର ନିର୍ମାଣ ମୂଲ୍ୟ= 180(x + y)

ମନେକର 'C' ହେଉଛି ଟ୍ୟାଙ୍କିର ନିର୍ମାଣରେ ସମୁଦାୟ ମୂଲ୍ୟ

$C =$ ₹ $[70xy + 180\ (x + y)]$



ଚିତ୍ର 2.18

$$= ₹\left[70(4)+180\left(x+\frac{4}{x}\right)\right] \qquad [\because\ xy=4]$$

$$= ₹\left[280+180x+\frac{720}{x}\right]$$

$$\therefore \qquad \frac{dC}{dx}=180-\frac{720}{x^2}$$

ଗରିଷ୍ଠ କିମ୍ବା ଲଘିଷ୍ଠ ପାଇଁ, $\frac{dC}{dx}=0$

ଅର୍ଥାତ୍ $\quad 180-\frac{720}{x^2}=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2$ $\quad$ [$\because$ x, ଋଣାତ୍ମକ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ]

ବର୍ତ୍ତମାନ $\quad \frac{d^2C}{dx^2}=\frac{140}{x^3}$

$x=2$ ରେ, $\quad \frac{d^2C}{dx^2}=\frac{1440}{(2)^3}$ = ଧନାତ୍ମକ (+ve)

$\therefore$ C (ଅର୍ଥାତ୍ ମୋଟ୍ ମୂଲ୍ୟ) ସର୍ବନିମ୍ନ ଯେତେବେଳେ $x=2$

ତେଣୁ ଟାଙ୍କି ନିର୍ମାଣରେ ସର୍ବନିମ୍ନ ଖର୍ଚ୍ଚ = ₹ $\left[280+18(2)+\frac{720}{2}\right]$ = ₹ 1000

ସାରାଂଶ

1. ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ, ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରିବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତ ଏହାକି ଫଳନ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଓ ଅବକଳନୀୟ ହେବା ଉଚିତ୍ ।

2. $f(x)$ ର ବିସ୍ତାର, x ର ଘାତାଙ୍କରେ (ମ୍ୟାକଲରିନଙ୍କ ଶ୍ରେଣୀ)

   $$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots$$

   $x=a$ ରେ, ଫଳନ $f(x)$ ର ବିସ୍ତାର $(x-a)$ ର ଘାତାଙ୍କରେ (ଟେଲରଙ୍କ ଶ୍ରେଣୀ)

   $$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots$$

3. ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ

   i. $\frac{0}{0}$ $\quad$ *ii.* $\frac{\infty}{\infty}$ $\quad$ *iii.* $0\times\infty$ $\quad$ *iv.* $\infty-\infty$

   v. 1^{∞} $\quad$ *vi.* 0^0 $\quad$ *vii.* ∞^0

4. ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ (L'Hospital Rule)

ଯଦି $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = 0$ ଓ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a) = 0$ ହୁଏ ତେବେ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

5. ସୀମା ମାନକ ଫଳାଫଳ ଗୁଡ଼ିକ

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$ c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \log a$ d. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

6. ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠ: ଫଳନ $f(x)$ ପାଇଁ, ଆମେ $f'(x)$ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଏବଂ ଏହାକୁ ଶୂନ୍ୟ ସହିତ ସମାନ କରିବା। ଅର୍ଥାତ୍ $f'(x) = 0$ ଯାହାକି $f(x)$ ର କ୍ରାନ୍ତିକ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇଥାଏ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଏହି କ୍ରାନ୍ତିକ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକରେ ଆମେ $f(x)$ ର ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠ ଯାଞ୍ଚ କରିବା।

ପରିସ୍ଥିତି I: ପ୍ରଥମେ କ୍ରାନ୍ତିକ ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକରେ $f''(x)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରନ୍ତୁ, ଯଦି $f''(x) > 0$ ହୁଏ ତେବେ କ୍ରାନ୍ତିକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ।

ପରିସ୍ଥିତି II: ଯଦି $f''(x) < 0$, ତେବେ କ୍ରାନ୍ତିକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ଗରିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ।

8. ଫଳନ ଗୁଡ଼ିକର କିଛି ମାନକ ବିସ୍ତାର

a. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots$ b. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!}. + \ldots$

c. $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \ldots$ d. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^{3\ 5}}{3!} + \ldots$

e. $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} \ldots$ ଯଦି $|x| < 1$

f. $\log(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} \ldots$

g. $(1-x)^n$, $|x| < 1$ ପାଇଁ

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 \ldots |x| < 1$$

ବସ୍ତୁନିଷ୍ଠ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

1. $\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{p^5.p!}{5.6...(5+p)}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   a. 4! *b.* 5! *c.* 0 *d.* π

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2)}{x}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   a. ∞ *b.* -1 *c.* 0 *d.* 2^2

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}}{x}$ ର ମୂଲ୍ୟ।

   a. 1 *b.* -1 *c.* 0 *d.* ବିଦ୍ୟମାନ ନାହିଁ

4. ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କରିବା ପାଇଁ କେଉଁଟି ଆବଶ୍ୟକ ?

   i. ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ ଅବକଳନୀୟ

   ii. ବିବୃତ ଅନ୍ତରାଳରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳରେ ଅବକଳନୀୟ

   iii. ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ ବିବୃତ୍ତି ଅନ୍ତରାଳରେ ଅବକଳନୀୟ

   iv. ସଂବୃତ ଅନ୍ତରାଳରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ ଅବକଳନୀୟ

5. ଯେତେବେଳେ $[a, b]$ ରେ $f(x)$ ପାଇଁ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା ହେଉଛି ତେବେ, ଏଠାରେ 'c' ଏପରି ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି ଯେପରିକି

   a. $c \in [a, b]$ ଯେପରି କି $f'(c) = 0$ b. $c \in (a, b)$ ଯେପରି କି $f'(c) = 0$

   c. $c \in [a, b)$ ଯେପରି କି $f'(c) = 0$ *d.* $c \in (a, b]$ ଯେପରି କି $f'(c) = 0$

6. ଯଦି ଫଳନ $f(x) = x^2 - 8x + 12$, (2, 6) ରେ ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ର ସର୍ତ୍ତକୁ ପୂରଣ କରେ, 'c' ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରି କି $f'(c) = 0$

   a. 6 *b.* 4 *c.* 8 *d.* 2

7. ଯଦି $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, ତେବେ ଅନ୍ତରାଳ $[0, 18\pi]$ ରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି ଯେପରି କି $f'(c) = 0$

   a. 8 *b.* 9 *c.* 17 *d.* 18

8. ଯଦି $f(x)=\log(10-x^2), x\in[-3,3]$, ତେବେ ଅନ୍ତରାଳ $[-3, 3]$ ରେ ସେହି ବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଠାରେ ସ୍ପର୍ଶରେଖାର ଆନତି (ସ୍ଲୋପ) ଶୂନ୍ୟ ହୁଏ।

   a 0 *b.* 2

c. ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ପ୍ରୟୋଗ ହୁଏ ନାହିଁ କାରଣ ଫଳନ $[-3, 3]$ ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ନୁହେଁ।

d. ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ ପ୍ରୟୋଗ ହୁଏ ନାହିଁ, କାରଣ ଫଳନ $[-3, 3]$ ରେ ଅବକଳନୀୟ ନୁହେଁ।

9. ଅନ୍ତରାଳ $[0, 1]$ ରେ ବକ୍ର $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ ରେ 'c' ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁଠାରେ ଏକ ବକ୍ରକୁ ସ୍ପର୍ଶ ରେଖାର ଆନତି, $(0, 1)$ ଓ $(1, 4)$ ସଂଯୋଗ ରେଖାର ଆନତି ସହ ସମାନ।

   a. 0.64   *b.* 0.44   *c.* 0.54   *d.* 0.34

10. ଫଳନ $f(x) = x^3 + x + 1$, ପାଇଁ ଆମ ପାଖରେ କିଛି ରୋଲଙ୍କ ବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ। ବାମାବର୍ତ୍ତ ଦିଗରେ 60ଡିଗ୍ରୀ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରି, ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷଗୁଡ଼ିକ ରୂପାନ୍ତରିତ ହୋଇଛି। ତେବେ ନୂଆ ରୋଲିଙ୍କ ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି?

   a. $\sqrt{3/2}$ *b.* ଫଳନରେ କଦାପି ରୋଲଙ୍କ ବିନ୍ଦୁ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ

   c. $\sqrt{3}$ *d.* $\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}}$

11. ବକ୍ର $y = \log x$ ରେ ସେହି ବିନ୍ଦୁ ଖୋଜ ଯେଉଁଠାରେ ସ୍ପର୍ଶରେଖା, $(1, 0)$ ଏବଂ $(e, 1)$ ବିନ୍ଦୁକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ଜ୍ୟା ସହିତ ସମାନ୍ତର ଅଟେ।

   a. e *b.* $e - 1$ *c.* $1 - e$ *d.* $-e$

12. ଯଦି ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟରେ $f(a) = f(b)$, ତେବେ ଏହା ହେବ

   a. ଲେବନିଜ୍‌ଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ   b. ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ

   c. ଏକ ଫଳନର ଟେଲରଙ୍କ ଶ୍ରେଣୀ   d. କୋଶୀଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ

13. ଯଦି $f(x) = \sin x . \cos x$ ଅନ୍ତରାଳ $(0, x)$, ରେ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ ଅବକଳନୀୟ ତେବେ

   a. $1 < \frac{\cos x . \sin x}{x} < \sin 2x$ b. $1 < \frac{\cos x . \sin x}{x} < \cos 2x$

   c. $1 < \frac{\cos x . \sin x}{x} < x \cos 2x$ d. $1 < \frac{\cos x . \sin x}{x} < 1 + \cos 2x$

14. ଅନ୍ତରାଳ $[0, 1]$ ରେ ଫଳନ $x^{25}(1-x)^{75}$ ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମୂଲ୍ୟ ହେବ।

   a. 0   *b.* $1/2$ *c.* 1   *d.* $1/4$

15. $x = 0$ ରେ ଫଳନ $f(x)=e^{-x2}$ ପାଇଁ ଟେଲରଙ୍କ ଶ୍ରେଣୀରେ, x^2 ର ସହଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

   a. $1/4$ *b.* -1   *c.* $1/2$ *d.* -2

16. $f(x) = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 6x^6 + ... + 100x^{100}$ ଏକ ବାସ୍ତବ ଚଳରାଶି x ର ପଲିନୋମିଆଲ ହେଲେ, $f(x)$ ର ଅଛି

   a. ନା ସର୍ବୋଚ୍ଚ କିମ୍ବା ସର୍ବନିମ୍ନ   *b.* କେବଳ ଗୋଟିଏ ସର୍ବୋଚ୍ଚ

c. କେବଳ ଗୋଟିଏ ସର୍ବନିମ୍ନ *d.* ଗୋଟିଏ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଏବଂ ଗୋଟିଏ ସର୍ବନିମ୍ନ

17. ମ୍ୟାକଲରିନ୍‌ଙ୍କ ଶ୍ରେଣୀର ବ୍ୟବହାର କରି ଫଳନ $f(x)$ର ବିସ୍ତାର ହେଉଛି।

a. $f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+...$ *b.* $1+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+...$

c. $f(0)-\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...$ *d.* $f(1)+\frac{x}{1!}f'(1)+\frac{x^2}{2!}f''(1)+\frac{x^3}{3!}f'''(1)+...$

18. ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x କୁ ଯେବେ ଏହାର ବ୍ୟତିକ୍ରମ ଯୋଗ କରାଯାଏ ତେବେ ଯୋଗର ଯୋଗଫଳର ମୂଲ୍ୟ 'x'ରେ ହେବ?

a. -2 *b.* 2 *c.* 1 *d.* –1

19. ଯଦି ଫଳନ $f(x) = 2x2 - 9ax2 + 12a2x + 1$, ଯେଉଁଠାରେ $a > 0$, ଯଥାକ୍ରମେ p ଏବଂ q ରେ ଏହାର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଓ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ହାସଲ କରେ, ଯେପରି କି $p^2 = q$, ତା'ପରେ 'a' ସହିତ ସମାନ।

a. 1/2 *b.* 3 *c.* 1 *d.* 2

20. ଫଳନ $f(x)$ ପାଇଁ ମ୍ୟାକଲାରିନଙ୍କ ବିସ୍ତାର ସତ୍ୟ ହେବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତ।

a. ଏହା ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ହେବା ଉଚିତ୍ *b.* ଏହା ଅବକଳନୀୟ ହେବା ଉଚିତ୍

c. ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁରେ ଏହା ବିଦ୍ୟମାନ ହେବା ଉଚିତ

d. ଏହା ଉଭୟ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ ଅବକଳନୀୟ ହେବା ଉଚିତ

ଉତ୍ତରମାଳା

1. *a*	2. *c*	3. *d*	4. *c*
5. *b*	6. *b*	7. *d*	8. *a*
9. *c*	10. *d*	11. *b*	12. *b*
13. *b*	14. *d*	15. *b*	16. *c*
17. *a*	18. *c*	19. *c*	20. *d*

ଅସମାହିତ କଠିନ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

1. ମନେକର $f(x)$, R ରେ ଏକ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଓ ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $f(x)$ ର ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବିକ ମୂଳ ମଧ୍ୟରେ $f'(x)$ ର ଅତି କମରେ ଗୋଟିଏ ମୂଳ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି।

2. ମନେକର $f : [a, b] \to R$ ତିନିଥର ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ ଯେପରି କି $f(a) = f(b) = f'(a) = f''(a) = 0$, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏଠାରେ $c \in (a, b)$ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି ଯେପରି କି $f'''(c) = 0$.

3. ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି ପ୍ରମାନ କର ଯେ $|\sin x - \sin y| \le |x - y|\ \forall\ x, y \in R.$

4. ମନେକର $f : (0, ¥) \to R$ ଏକ ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,ଯେକୌଣସି $a > 0$ ପାଇଁ, ଯଦି $\lim_{x\to\infty}\left(af(x)+f'(x)\right)=L$ ତେବେ $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{L}{a}$

5. ଯଦି $a_0 + a_1 + ... + a_n = 0$ ଯେଉଁଠାରେ $a_i \in R, 1 \le i \le n$ ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $a_0 + 2a_1x + ... + (n + 1)a_n x^n = 0$ ର, $(0, 1)$ ରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ମୂଳ ଅଛି ।

6. ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି ପ୍ରମାଣ କର ଅସମାନତା :

$$\frac{y-x}{y} < \log\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{y-x}{y}$$ ସମସ୍ତ $0 < x < y$ ପାଇଁ

7. ମନେକର $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ ଏବଂ $g(x)=\sin x\ \ \forall x\in R$, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ କିନ୍ତୁ $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ବିଦ୍ୟମାନ ନାହିଁ ।

8. ମନେକର $f : R \to R$ ଏକ ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ ଯେପରି କି $\left|\frac{df(x)}{dx}\right| \le 4$ ଓ $f(0)=0$ ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $f(1) \in [-4, 4]$ ଏବଂ $f(2) \in [-8, 8]$.

9. ମନେକର I ଏକ ଅନ୍ତରାଳ ଏବଂ $f : I \to R$, Iରେ ଅବକଳନୀୟ ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଯଦି ଅବକଳଜ f', I ରେ କଦାପି ଶୂନ୍ୟ ନୁହେଁ ତେବେ: $f'(x) > 0\ \forall\ x \in I$ କିମ୍ବା $f'(x) < 0\ \forall\ x \in I.$

10. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଉଚ୍ଚତା h ଓ ଅର୍ଦ୍ଧ-ଶୀର୍ଷକୋଣ 30^0 ର ଏକ କୋନରେ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଥିବା ବୃହତ୍ତମ ସିଲିଣ୍ଡରର ଘନଫଳ $\frac{4}{81}\pi h^3$ ଅଟେ।

11. ଏକ ପାଣି ଟାଙ୍କି ଓଲଟା ଲମ୍ବ ବୃତ୍ତୀୟ କୋନ ଆକାରରେ ଅଛି। ଯାହାର ଅକ୍ଷ ଭୂଲମ୍ବ ଏବଂ ଶୀର୍ଷ ନିମ୍ନତମ। ଏହାର ଅର୍ଦ୍ଧ-ଶୀର୍ଷ $tan^{-1}(0.5)$ କୋଣ ଅଟେ। ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି 5 ଘନ ମିଟର ସ୍ଥିର ହାରରେ ଏଥିରେ ପାଣି ଚଳାଯାଏ। ଟାଙ୍କିରେ ଜଳର ଗଭୀରତା 4 ମିଟର ଥିବାବେଳେ, ଏହି ସମୟରେ ଜଳର ସ୍ତର ଯେଉଁ ହାରରେ ବୃଦ୍ଧି ପାଉଛି, ଏହାକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ବ୍ୟବହାରିକ

1. MATLAB କୋର୍ଡ ଗୁଡ଼ିକ ବ୍ୟବହାର କରି, $[0, 2\pi]$ ରେ Sine ଓ Cosine ଫଳନର ଗ୍ରାଫ କର।
2. MATLAB କୋର୍ଡ ଗୁଡ଼ିକ ବ୍ୟବହାର କରି R ରେ e^{3x} ପାଇଁ ଗ୍ରାଫ ପ୍ଲଟ୍ କର ।
3. ବୃହତ୍ତମ ପୂର୍ଣ୍ଣାଙ୍କ ଫଳନ [x] କୁ ଅନ୍ତରାଳ [0, 5]ରେ M.S. Excel ରେ ଆଙ୍କନ୍ତୁ।

କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ

1. ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କରିବା ପାଇଁ ନିମ୍ନ ଫଳନ ପାଇଁ MATLAB କୋଡ ଲେଖ।

   (i) x^2 , ଅନ୍ତରାଳ [–3, 3] ରେ

   (ii) $(x + 2)^3 * (x - 3)^4$ ଅନ୍ତରାଳ [–2, 3] ରେ ଆଉ ମଧ୍ୟ ଏଥିପାଇଁ ବକ୍ରର ପ୍ଲଟ କର।

ଅଧିକ ଜାଣନ୍ତୁ

1. $\lim_{x \to 0} \left\{ \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right\}^{1/x}$ ମୂଲ୍ୟ ଅଟେ।

   a. abc b. $(abc)^{1/3}$ c. $(abc)^{1/8}$ d. $\frac{1}{abc}$

2. x^x ର ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ଏବଂ $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମୂଲ୍ୟର ଗୁଣଫଳ

   a. e b. $\frac{1}{e}$ c. 1 d. e^2

3. $e^{\sin x}$ ର ବିସ୍ତାର

   a. $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \ldots$ b. $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \ldots$

   c. $1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \ldots$ d. $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{10} + \ldots$

4. 'a' ଏବଂ 'b' ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି $\lim_{x \to 0} \frac{ae^x + be^{2x}}{be^x + ae^{2x}}$ ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ ଏକକ କରିବା ପରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସୀମା ପ୍ରାପ୍ତ ହେବ।

   a. $b/a = 2$ b. $a/b = 2$ c. a = b d. a = – b

5. ଦିଆଯାଇଥିବା ସୀମା $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(ax) + \cos(bx) - 2\cos(cx)}{\cos(ax) + 2\cos(bx) - 3\cos(cx)}$ ର ସସୀମ ସୀମା ପାଇବା ପାଇଁ କେତେଥର ଅବକଳଜ କରିବା ଆବଶ୍ୟକତା ହେବ ଦତ୍ତ ଅଛି $a \neq b \neq c$

   a. 3 b. 0 c. 2 d. 4

ଉତ୍ତରମାଳା

1. b 2. *c* 3. b 4. d

5. c

ସହାୟକ ଓ ପରାମର୍ଶମୂଳକ ପଠନ

1. Bary, N.K. (1964). A Treatise on Trigonometric Series, Pergamon Press.
2. Courant R. (1988). Differential and Integral Calculus, Wiley, NewYork.
3. Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.
4. Fleming, W.H. (1965). Functions of Several Variables, Addison Wesley Publishing Company, Reading, MA.
5. Garg, Reena (2019). Engineering Mathematics-I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
6. Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers.
7. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition, Narosa.
8. Knopp, K. (1947). Theory of Functions, Dover, NewYork.
9. Philip, Franklin (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. NewYork.
10. Piskunov, N. (1969). Differential and Integral Calculus, MIR Publishers, Moscow.
11. Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.
12. Ram, Babu. Engineering Mathematics, Pearson.
13. Thomas, G.B. and Finney, R.L.(1992). Calculus and Analytic Geometry, Addision-Wesley, Reading, MA.
14. Tichmarsh, E.C. (1939). Theory of Functions, Oxford University Press, London.

3 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ (Matrix)

ଅଧ୍ୟାୟ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ ଏହାର ପ୍ରକାର, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରେ ପ୍ରକ୍ରିୟା, ଏବଂ ଏହାର ର ଗୁଣଧର୍ମ, ଭେକ୍ଟର, ଭେକ୍ଟର ପ୍ରକ୍ରିୟା, ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ଏବଂ ଏହାର ଗୁଣଧର୍ମ, ଓ ପ୍ରୟୋଗ, ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କ, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ, କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ, ଗସ୍‌ଙ୍କ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି ଏବଂ ଗସ୍-ଜୋର୍ଡାନଙ୍କ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତିର ବିସ୍ତୃତ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ସମସ୍ତ ବିଷୟ ଧାରଣାକୁ ଏପରି ଭାବରେ ବ୍ୟାଖା କରାଯାଇଛି ଯେପରିକି, ବିଦ୍ୟାଥୀମାନେ ଏହାର ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରୟୋହକୁ ବୁଝିପାରିବେ ।

ଯୁକ୍ତିଯୁକ୍ତତା

ରୈଖିକ ବୀଜିୟ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନରେ, ରୈଖିକ ଏବଂ ଅରୈଖିକ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସମାଧାନରେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟାପକ ଭାବରେ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ । ଅନେକ ଭୌତିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଯେପରିକି ବିବର୍ଦ୍ଧନ, ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଏବଂ ପ୍ରତିଫଳନ ସାହାଯ୍ୟରେ ଗାଣିତିକ ଭାବରେ ଉପସ୍ଥାପିତ ହୋଇପାରେ । ଏନକ୍ରିପସନରେ ଆମେ ଏହାକୁ ଡାଟାଏନକୋଡ୍ କରିବା ଏବଂ ଡିକୋଡ କରିବାପାଇଁ ସୁରକ୍ଷା ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟରେ ଡାଟାକୁ ସାଂକେତିକ ଶବ୍ଦରେ ବଦଳାଇବା ପାଇଁ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ । ବାସ୍ତବ ଦୁନିଆରେ ଲୋକମାନଙ୍କର ଗୁଣ, ଜନସଂଖ୍ୟା, ଅଭ୍ୟାସ ଇତ୍ୟାଦି ତଥ୍ୟକୁ ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କରିବାରେ ଏହା ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ । ରୋବଟିକ୍ସ ଏବଂ ସ୍ୱୟଂଚାଳିତ କ୍ଷେତ୍ରରେ, ରୋବଟ ଗତିବିଧି ପାଇଁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହେଉଛି ମୂଳ ଉପାଦାନ। ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହର ବ୍ୟବହାର ଅନେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ହୋଇଥାଏ, ଯେପରିକି ବୟସ-ସମସ୍ୟା, ଗତି-ସମୟ ଇତ୍ୟାଦି

ପ୍ରାକ୍-ଆବଶ୍ୟକତା

1. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବୀଜଗଣିତରେ ମୌଳିକ ଜ୍ଞାନ|
2. ଆଡଜଏଣ୍ଟ, ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ଏବଂ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ର ଧାରଣା ଇତ୍ୟାଦିର ଗୁଣଧର୍ମ ।
3. ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହରୁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଗଠନ ।

ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ (UO)

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବାପରେ, ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ନିମ୍ନଲିଖିତରେ ସକ୍ଷମ ହେବେ:

U3-01: ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସଙ୍ଗତ ଓ ଅସଙ୍ଗତ ପ୍ରଣାଳୀକୁ ଚିହ୍ନିପାରିବେ ଏବଂ ରାଙ୍କ ବ୍ୟବହାର କରି ଅଗମେଣ୍ଟେଡ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସରୁ ଧାଡି ଇକେଲନ୍ ରୂପଦ୍ୱାରା ଏହାର ସମାଧାନ ଗଣନା କରିପାରିବେ।

U3-02: R^n ରେ ଭେକ୍ଟରର ବୀଜଗଣିତୀୟ ଏବଂ ଜ୍ୟାମିତିକ ଧାରଣାର ଉପସ୍ଥାପନା ଏବଂ ଯୋଗ, ସ୍କେଲାର ଗୁଣନ, ଡଟ୍ ଗୁଣଫଳ ସହିତ ସେମାନଙ୍କ {ପ୍ରକ୍ରିୟା} ସହିତ ନିଜକୁ ପରିଚିତ କରିପାରିବେ ।

U3-03: ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ପାଇଭଟର ସ୍ଥିତି ଏବଂ ରୈଖିକ ସମଘାତୀୟ ଏବଂ ଅସମଘାତୀ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସାମାଧାନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସମାନ ବକ୍ତବ୍ୟକୁ ଚିହ୍ନିପାରିବେ ଏବଂ ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବେ ।

U3-04: ଗସ୍‌ଙ୍କ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି, ଗସ୍- ଜୋର୍ଡାନ୍ ପଦ୍ଧତି ଏବଂ କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଏବଂ ଅଦ୍ୱିତୀୟତା ଗଣନା କରିପାରିବେ ।

ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ ସହିତ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳର ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ

ୟୁନିଟ୍ -3 ଫଳାଫଳ	ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳ ସହିତ ଆଶାକରାଯାଉଥିବା ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ (1- ଦୁର୍ବଳ ସହସମ୍ବନ୍ଧ; 2- ମଧ୍ୟମ ସହସମ୍ବନ୍ଧ; 3- ଦୃଢ ସହସମ୍ବନ୍ଧ				
	CO-1	**CO-2**	**CO-3**	**CO-4**	**CO-5**
U3-01	-	-	3	1	1
U3-02	-	-	1	3	2
U3-03	-	-	3	2	1
U3-04	-	-	3	-	-

ଇତିହାସ

ଶ୍ରୀନିବାସ
ରାମାନୁଜନ୍
(1887-1920)

ଇତିହାସ ଅନୁସାରେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ଅଧ୍ୟୟନ ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ ଦ୍ୱିତୀୟ ଶତାବ୍ଦୀରେ ହୋଇଥଲା ଯଦି ଓ ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ ଚତୁର୍ଥ ଶତାବ୍ଦୀରୁ ଏହାର ଚିହ୍ନ ଦେଖିବାକୁ ମିଳେ ।

ଏହା ଆଶ୍ଚର୍ଯ୍ୟଜନକ ନୁହେଁଯେ , ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ଆରମ୍ଭ ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହର ଅଧ୍ୟୟନ ସମୟରେ ହୋଇଥିଲା । ବାବିଲୋନିଆନ୍ ଗଣିତଜ୍ଞଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ରୈଖିକ ସହସମୀକରଣ ରେ ଆଧାରିତ ପ୍ରଶ୍ନ ଗୁଡିକର ଅଧ୍ୟୟନ କରାଯାଇଥିଲା ଏବଂ ଏଥିମଧ୍ୟରୁ କିଛି ମୃତ୍ତିକା ଫଳକରେ ସଂରକ୍ଷିତ ହୋଇରହିଥିଲା ଯାହା ବଞ୍ଚି ରହିଥିଲା।

ତଥାପି ସପ୍ତମ ଶତାବ୍ଦୀର ଶେଷ ଭାଗରେ ଧାରଣା ପୁନର୍ବାର ଦେଖାଗଲା ଏବଂ ବିକାଶ ପ୍ରକୃତିରେ ଚାଲିଥିଲା ଏହା ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ନୁହେଁ, କିନ୍ତୁ କିଛି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ବର୍ଗାକାର ସଂଖ୍ୟାଗତ ସାରଣୀ ସହିତ ଜଡିତ ଥିଲା ଏବଂ ଏହାକୁ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ କୁହାଗଲା ଯାହା ପ୍ରଥମେ ଚିହ୍ନଟ ହୋଇଥିଲା। କେବଳ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଧାରଣା ଧୀରେ ଧୀରେ ବୀଜଗଣିତର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଭାବେରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଲା

ଉନବିଂଶ ଶତାବ୍ଦୀରେ ଇଂରାଜୀ ଗଣିତଜ୍ଞ ଜେମ୍ସ ସିଲଭେଷ୍ଟରଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଶବ୍ଦ ପ୍ରବର୍ତ୍ତନ କରାଯାଇଥିଲେ। କିନ୍ତୁ ତାଙ୍କର ବନ୍ଧୁ ଗଣିତଜ୍ଞ ଆର୍ଥର କେଲେ ଯିଏ 1850 ମସିହାରେ ତାଙ୍କର ଦୁଇଟି ଗବେଷଣା ପ୍ରବନ୍ଧରେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବୀଜଗଣିତର ଦିଗର ବିକଶିତ କରିଥିଲେ । କେଲେ ସର୍ବ ପ୍ରଥମେ ଏହାକୁ ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହର ଅଧ୍ୟୟନରେ ପ୍ରୟୋଗ କରିଥିଲେ, ଯେଉଁରେ ସେଗୁଡିକ ମଧ୍ୟ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ କାରଣ, କେଲେ ସ୍ୱୀକୃତି ଦେଇଥିଲେ ଯେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର କିଛି ସେଟ୍ ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରଣାଳୀ ସୃଷ୍ଟିକରେ ଯେଉଁଥିରେ ଘଣିତର ଅନେକ ସାଧାରଣ ନିୟମ (ଯଥା ସଂଯୋଗୀ ନିୟମ ଓ ବଣ୍ଟନ ନିୟମ) ଯୁକ୍ତି ସଙ୍ଗତ କିନ୍ତୁ ଯେଉଁଥିରେ ଅନ୍ୟ ନିୟମ (ଯଥା କ୍ରମବିନିମୟ ନିୟମ) ଯୁକ୍ତି ସଙ୍ଗତ ନୁହେଁ। ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କମ୍ପ୍ୟୁଟର ଗ୍ରାଫିକ୍ସରେ ମଧ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରୟୋଗଗୁଡିକ ଅଛି। ଯେଉଁରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଓ ପ୍ରତିଛବିଗୁଡିକର ଅନ୍ୟ ରୂପାନ୍ତରଣକୁ ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କରିବା ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇଛି।

ଉପକ୍ରମ

ମାଟ୍ରିସେସ୍ ଶବ୍ଦ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଶବ୍ଦର ବହୁବଚନ ଅଟେ । ଆର୍ଥର କେଲେ, 1860 ମସିହାରେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଧାରଣା ପ୍ରଥମେ ପ୍ରଚଳନ କରିଥିଲେ ।

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ଅଧ୍ୟୟନ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ରୈଖିକ ସମସ୍ୟା ର ଧାରଣାରୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିଲା । ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ ସହିତ ଏହାର ଏକ ବିଶେଷ ସମ୍ପର୍କ ଅଛି, ଯାହା ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ଘଟେ । ଏହା ରୈଖିକ ବୀଜଗଣିତ ର ଅଧ୍ୟୟନ

ଏବଂ ବିକାଶରେ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଭୂମିକା ନିଏ । ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମିକ ଇଂଜିନିୟରିଂ ଏବଂ କଣ୍ଟ୍ରୋଲ ସିଷ୍ଟମରେ ରୈଖିକ ନମୁନା ଗୁଡିକର ଉପସ୍ଥାପନାରେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟବହାର ହୋଇଥାଏ ।

ଗଣିତ, ବିଜ୍ଞାନ ଏବଂ ଇଂଜିନିୟରିଂ ର ପ୍ରତେକ ଶାଖାର ଅଧ୍ୟୟନରେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବହୁଳ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।

3.1 ସଂଜ୍ଞା

ଏକ mn ସଂଖ୍ୟାଗୁଡିକର (ବାସ୍ତବ କିମ୍ବା ସମ୍ମିଶ୍ର) ସେଟକୁ ଆୟତକାର ସାରଣୀରେ m ଧାଡି (ଭୂସମାନ୍ତର ରେଖା) ଏବଂ n ସ୍ତମ୍ଭ (ଭୂଲମ୍ବ ରେଖା) ରେ ସଜ୍ଜିତ କରିବାକୁ m × n 'ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ' କୁହାଯାଏ । ଏହାକୁ ଏପରିଭାବେ ପଢାଯାଏ ଯେପରି 'm ବାଏ n ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ' କିମ୍ବା 'ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଅର୍ଡର m ବାଏ n' କିମ୍ବା 'ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରକାର m ବାଏ n' କୁହାଯାଏ ।

ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ସାଧାରଣତଃ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରକାରେ ଦର୍ଶାଇଦିଆଯାଇଥାଏ ଯେପରିକି $[a_{ij}]$ କିମ୍ବା (a_{ij}) କିମ୍ବା $\|a_{ij}\|$

ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ପ୍ରାୟତଃ ବଡ଼ ଅକ୍ଷର A, B, C ଇତ୍ୟାଦି ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଏ ।

m × n ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A'କୁ ନିମ୍ନଭାବରେ ଲେଖାଯାଏ ।

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ କିମ୍ବା $A = [a_{ij}]$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$ ଯେଉଁରେ $i = 1, 2, ..., m$ ଏବଂ $j = 1, 2, ..., n$

ପ୍ରତ୍ୟେକ m × n ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସରେ m.n ସଂଖ୍ୟକ ଉପାଦାନ ଅଛି ।

> **ଧ୍ୟାନ ଦିଅନ୍ତୁ:** ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରବେଶକୁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଉପାଦାନ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ମନେକର ଏକ ସମୀକରଣ ସମୂହକୁ ବିଚାର କରାଯାଉ ।

$$2x + 3y + 3z + 2t = 0$$
$$3x + 2y + 5z + 3t = 0$$
$$4x + 5y + 6z + 7t = 0$$
$$2x + 3y + 4z + 5t = 0$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, ଆମେ ଉପରୋକ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୁଡିକର x, y, z ଏବଂ t ର ସହଗ ଲେଖିବା ଏବଂ ସେଗୁଡିକୁ ବନ୍ଧନୀରେ ଆବଦ୍ଧକରିବା ପରେ, ଆମେ ପାଉ !

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ଉପରୋକ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ସମୂହକୁ ଧାଡି ଏବଂ ସ୍ତମ୍ଭ ଦ୍ୱାରା ଆୟତା କାର ସାରଣୀରେ ସଜ୍ଜିତ କରି ବନ୍ଧନୀରେ ଆବଦ୍ଧକଲେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ନିଳେ ।

ଏଥିରେ 4 ଧାଡି ଏବଂ 4 ସ୍ତମ୍ଭ ଏବଂ ସମସ୍ତ 4 × 4 = 16 ଉପାଦାନ ଅଛି । ଏହାକୁ 4×4 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ । କୌଣସି ଉପାଦାନର ଦ୍ୱିପାଦାଙ୍କ(i, j)ରେ ପ୍ରଥମ ସବସ୍କ୍ରିପ୍ଟ i ଧାଡିକୁ ସୂଚାଏ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ ସବସ୍କ୍ରିପ୍ଟ j ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟାକୁ ସୂଚାଏ ।

3.1.1 ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

1. **ବାସ୍ତବ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ :** ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ବାସ୍ତବ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ଯଦି ଏହାର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା।

ଉଦାହରଣ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$ ଏକ ବାସ୍ତବ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

2. **ସମ୍ମିଶ୍ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ:** ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହାର ଉପାଦାନରେ ସମ୍ମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାଥାଏ, ତାହକୁ ସମ୍ମିଶ୍ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ।

ଉଦାହରଣ: $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$ ଏକ ସମ୍ମିଶ୍ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

3. **ଧାଡି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ:** ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହା କେବଳ ଏକ ଧାଡି ବିଶିଷ୍ଟ ଏବଂ ଯେକୌଣସି ସଂଖ୍ୟକ ସ୍ତମ୍ଭ ରହିଥାଏ । ତାହାକୁ ଧାଡି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{1\times4}$ ଏକ ଧାଡି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

4. **ସ୍ତମ୍ଭ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ:** ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହା ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ ବିଶିଷ୍ଟ ଏବଂ ଯେକୌଣସି ସଂଖ୍ୟକ ଧାଡି ରହିଥାଏ, ତାହା ସ୍ତମ୍ଭ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ।

ଉଦାହରଣ: $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4\times1}$ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ।

5. **ଶୂନ୍ୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କିମ୍ବା ଶୂନ୍ୟକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ:** ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହାର ସବୁ ଉପାଦାନ ଶୂନ୍ୟହୁଏ ତାହାକୁ ଶୂନ୍ୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କିମ୍ବା ଶୂନ୍ୟକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ।

ଉଦାହରଣ: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$ ଏବଂ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$ ଶୂନ୍ୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ।

6. **ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ:** ଏକ m × n ଅର୍ଡର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ଯଦି m = n ଅର୍ଥାତ୍ ଧାଡି ଗୁଡିକର ସଂଖ୍ୟା ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡିକର ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମାନ ଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$ ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

7. **ଆୟତାକାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ:** ଏକ m × n ଅର୍ଡର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଏକ ଆୟତାକାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ, ଯଦି m ≠

n ଅର୍ଥାତ୍ ଧାଡି ଗୁଡିକର ସଂଖ୍ୟା ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡିକର ସଂଖ୍ୟା ସହିତ ସମାନ ନୁହେଁ ।।

ଉଦାହରଣ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ ଏକ ଆୟତାକାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ।

8. କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ: ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଏକ କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ଯଦି ଏହାର ସବୁ ଅବୀକର୍ଣ୍ଣୟ ଉପାଦାନ ଶୂନ୍ୟ ଅଟେ ।

ମନେକର $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ଏବଂ ଯଦି $i \neq j$ ପାଇଁ $a_{ij} = 0$ ହୁଏ, ତେବେ A, $n \times n$ ଅର୍ଡର କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁ $\text{Diag}[a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}]$ ର ରୂପରେ ମଧ୍ୟ ଲେଖାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ ଏକ କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

ସ୍ମରଣଯୋଗ୍ୟ ଯେ କର୍ଣ୍ଣ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସରେ ଅତିକମରେ ଏକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ରହିବା ଆବଶ୍ୟକ।

9. ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କିମ୍ବା ଅଭେଦ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ:ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ଯଦି କର୍ଣ୍ଣର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ 1 ଅଟେ ଏବଂ ଅବକର୍ଣ୍ଣୀୟ ଉପାଦାନ 0 ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ ଏବଂ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

ଅର୍ଡର n ର ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ $I_{n\times n}$ ରୂପରେ ମଧ୍ୟ ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

10. ସିଙ୍ଗୁଲାର ଏବଂ ଅଣସିଙ୍ଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ: ଏକ ବର୍ଗାକାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' କୁ ସିଙ୍ଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ଯଦି ଏହାର $|A| = 0$ ଅର୍ଥାତ୍, ଯଦି 'A' ର ଉପାଦାନ ଗୁଡିକରୁ ତିଆରି ହୋଇଥିବା ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ମୂଲ୍ୟ ଶୂନ ହୁଏ ।

ଉଦାହରଣ% ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ପାଇଁ $|A| = 0$ (ସିଙ୍ଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ)

ଯଦି $|A| \neq 0$, (ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ଶୂନ୍ୟ ସହିତ ସମାନ ନୁହେଁ) ତେବେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' କୁ ଅଣସିଙ୍ଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ

ଉଦାହରଣ: ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ପାଇଁ $|A| = -10 \neq 0$ (ଅଣସିଙ୍ଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ)

11. ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ: ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = [a_{ij}]$ କୁ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ଯଦି $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$

କିମ୍ବା $A = A'$ ($A' = A$ ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ)

ଉଦାହରଣ: $A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}_{3\times3}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times3}$ ସମମିତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ।

12. **ବିଷମ-ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ:** ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = [a_{ij}]$କୁ ବିଷମ –ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ଯଦି $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall$ i ଏବଂ j କିମ୍ବା $A = -A'$

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମସ୍ତ କର୍ଣ୍ଣ ଉପାଦାନ ଶୂନ୍ୟ ହୁଏ

ଉଦାହରଣ: $\begin{bmatrix} 0 & -h & -g \\ h & 0 & -f \\ g & f & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$ ଏକ ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ।

13. **ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ:** ମନେକର $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ତେବେ A ରୁପ୍ରାପ୍ତ $n \times m$ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Aର ଧାଡିକୁ ସ୍ତମ୍ଭ ଗୁଡିକରେ ଏବଂ ତାହାରି ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡିକୁ ଧାଡି ଗୁଡିକରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କଲାପରେ ଯେଉଁ ନୂଆ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ମିଳେ ହୁଏ ତାହା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ କୁହାଯାଏ । ଏବଂ ଏହାକୁ A′ କିମ୍ବା A^T ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ।

ଉଦାହରଣ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}_{3\times2}$ ହେଲେ $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times3}$ ଏବଂ $B = [1\ 2\ 3]_{1\times3}$ ହେଲେ $B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1}$

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଟ୍ରାନ୍ସଯୋଜ ର ଗୁଣଧର୍ମ : ଯଦି A′ ଏବଂ B′ ଯଥାକ୍ରମେ A ଏବଂ B ର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟନ୍ତି ତାହେଲେ,

a. $(A')' = A$

b. $(A + B)' = A' + B'$

c. $(kA)' = kA'$, ଯେଉଁଠି k ଏକ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ

d. $(AB)' = B'A'$

e. $(ABC)' = C'B'A'$

14. **ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ:** ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' କୁ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ଯଦି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' ଏବଂ ତାହାର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ A′ ର ଗୁଣଫଳ ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅର୍ଥାତ୍ $A. A' = I$, ଯେଉଁରେ I ଏକ ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

ଉଦାହରଣ: $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, ହେଲେ $A' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore AA' = I$

(ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ମାନେ ଏହାକୁ ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରିପାରିବେ)

ତେଣୁ A ଏକ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

15. ତ୍ରିଭୂଜୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ: ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଯଦି କର୍ଣ୍ଣ ଉପରିସ୍ଥ କିମ୍ବା କର୍ଣ୍ଣର ନିମ୍ନସ୍ଥ ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ଶୂନ୍ୟ ତେବେ ଏହା ଏକ ତ୍ରିଭୁଜୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ।

ତ୍ରିଭୁଜୀୟ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଦୁଇ ପ୍ରକାରର ହୋଇଥାଏ

a. **ଉର୍ଦ୍ଧ ତ୍ରିଭୂଜୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ:** ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ଯାହାର ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ନିମ୍ନସ୍ଥ ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ଶୂନ୍ୟ, ତାହା ଏକ ଉର୍ଦ୍ଧ ତ୍ରିଭୁଜୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ← ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣ ଏହା ଏକ ଉର୍ଦ୍ଧ ତ୍ରିଭୁଜୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

b. **ନିମ୍ନ ତ୍ରିଭୂଜୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ:** ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହାର ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣ ଉପରର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ଶୂନ୍ୟ, ତେବେ ତାହାକୁ ନିମ୍ନ ତ୍ରିଭୂଜୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ: ଏକ ନିମ୍ନ ତ୍ରିଭୁଜୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ ← ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣ

16. ସଂଯୁଗ୍ମୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ:

ମନେକର $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-3i & 4 \\ 7+2i & -i & 3-2i \end{bmatrix}$

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ସଂଯୁଗ୍ମୀ କୁ $\bar{A}$ ରେ ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

$$\therefore \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2+3i & 4 \\ 7-2i & i & 3+2i \end{bmatrix}$$

ମନ୍ତବ୍ୟ: ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Aର ସଂଯୁଗ୍ମ ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ A^θ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ଅର୍ଥାତ୍ $A^\theta = (\bar{A})'$ ।

ମନେ କର $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-3i & 4 \\ 7+2i & -i & 3-2i \end{bmatrix}$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2+3i & 4 \\ 7-2i & i & 3+2i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (\bar{A})' = \begin{bmatrix} 1-i & 7-2i \\ 2+3i & i \\ 4 & 3+2i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^\theta = \begin{bmatrix} 1-i & 7-2i \\ 2+3i & i \\ 4 & 3+2i \end{bmatrix}$$

17. **ୟୁନିଟାରି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ :** ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ ୟୁନିଟାରି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ଯଦି $A.A^{\theta} = 1$

ଉଦାହରଣ: $A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}$, ଏବଂ $A^{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $A^{\theta}A = I$. (ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୁଣନ ପରେ ଆଲୋଚିତ ହେବ)

18. **ହର୍ମିସିଆନ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ: ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ** $A = [a_{ij}]$ କୁ ହର୍ମିସିଆନ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ, ଯଦି Aର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ $(ij)^{th}$ ଉପାଦାନ, A ର ସଂଯୁଗ୍ମୀ $(ji)^{th}$ ଉପାଦନ ସହ ସମାନ ହୁଏ ।

ଭିନ୍ନ ଶବ୍ଦରେ ଆମେ କହିପାରିବା $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$

ଉଦାହରଣ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 3+i \\ 2-3i & 2 & 1-2i \\ 3-i & 1+2i & 5 \end{bmatrix}$

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ହର୍ମିସିଆନ ହୋବାପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ଏବଂ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ହେଲା $A = A^{\theta}$ ଅର୍ଥାତ୍,

$A = (\bar{A})'$.

19. **ବିଷମ- ହର୍ମିସିଆନ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ:** ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = [a_{ij}]$କୁ ବିଷମ ହର୍ମିସିଆନ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ଯଦି A ର ପ୍ରତ୍ୟେକ (ij)th ଉପାଦାନ, A ର(ji)th ଉପାଦାନର ରୁଣାତ୍ମକ ସଂଯୁଗ୍ମୀ ସହିତ ସମାନ ହୁଏ ।

ସାଙ୍କେତିକ ଭାବେ

$a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$

ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ନିମ୍ନ ରୂପରେ ହୋଇଥାଏ ।

$a_{ii} = -\bar{a}_{ii}$ କିମ୍ବା $a_{ii} + \bar{a}_{ii} = 0$

ଯଦି $a_{ii} = a + ib$ ତେବେ $\bar{a}_{ii} = a - ib$

$\Rightarrow (a + ib) + (a - ib) = 0$ କିମ୍ବା $2a = 0$ କିମ୍ବା $a = 0$

ତେଣୁ a_{ii} ବିଶୁଦ୍ଧ ଭାବରେ କାଳ୍ପନିକ ଅଟେ କିମ୍ବା $a_{ii} = 0$

ତେଣୁ ଏକ ବିଷମ - ହର୍ମିସିଆନ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସମସ୍ତ କର୍ଣ୍ଣ ଉପାଦାନ ଶୂନ୍ୟ କିମ୍ବା ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଭାବରେ କାଳ୍ପନିକ ।

ଉଦାହରଣ: $\begin{bmatrix} i & 2-3i & 4+5i \\ -(2+3i) & 0 & 2i \\ -(4-5i) & 2i & -3i \end{bmatrix}$

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ବିଷମ ହର୍ମିସିଆନ ହେବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ଏବଂ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ଅଟେ ଯଦି

$A^{\theta} = -A$

$\Rightarrow$ $(\bar{A})' = -A$

20. ବର୍ଗସମ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ: ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ ବର୍ଗସମ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ। ଯଦି $A^2 = A$ ହୁଏ।

ଉଦାହରଣ: ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

ତେବେ $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$

21. ଆବର୍ତ୍ତୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ: ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ ଆବର୍ତ୍ତୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯିବ, ଯଦି $A^{k+1}=A$

ଯେଉଁରେ 'k' ଏକ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଅଟେ । k ର ନିମ୍ନତମ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ଯଦି $A^{k+1}=A$ ଏହା ସତ୍ୟ, ତେବେ k କୁ A ର ଆବର୍ତ୍ତ କୁହାଯାଏ । ଯଦି ଆମେ k = 1 ନେବା, ତେବେ ଆମକୁ! $A^2 = A$ ପ୍ରାପ୍ତ ହେବ ଏବଂ ଏହାକୁ ଆମେ ଏକ ଆଇଡିପୋଡେଣ୍ଟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କହିବା ।

22. ନିଲପୋଟେଣ୍ଟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ: ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ ନିଲପୋଟେଣ୍ଟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ, ଯଦି $A^k = 0$ (ଶୂନ୍ୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ), ଯେଉଁରେ k ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଅଟେ; ଯଦି ପୁର୍ନବାର k ସର୍ବନିମ୍ନ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ଯାହାପାଇଁ $A^k = 0$ ଅଟେ, ତେବେ k କୁ ନିଲପୋଟେଣ୍ଟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସସୂଚାଙ୍କ କୁହାଯିବ ।

ଉଦାହରଣ: $A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$, ତେବେ $A^2 = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

ତେଣୁ ' A 'ଏକ ନିଲପୋଟେଣ୍ଟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ । ଯାହାର ସୂଚାଙ୍କ 2 ।

23. ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟୋରି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ: ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' କୁ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟୋରି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯିବ ଯଦି $A^2 = I$, ଯେଉଁରେ I ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ

ଯେହେତୁ $I^2 = I$ (ସର୍ବଦା ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହେବ)

$\therefore$ ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏକ ଇନଭୋଲ୍ୟୁଟୋରି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ।

24. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଟ୍ରେସ୍ : ମନେକର A, ଅର୍ଡର n ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ । ତେବେ ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣସ୍ଥିତ ଉପାଦାନଗୁଡିକର ଯୋଗଫଳକୁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ଅନୁରେଖ ବା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ଟ୍ରେସ୍ କୁହାଯାଏ। ଏହାକୁ Tr(A) ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ।

ତେଣୁ, ଯଦି $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, ତେବେ

$$Tra(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots a_{nn}$$

ମନେକର $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

ତେବେ $trace$ (A) = tr (A) = 1 + (−3) + 5 = 3

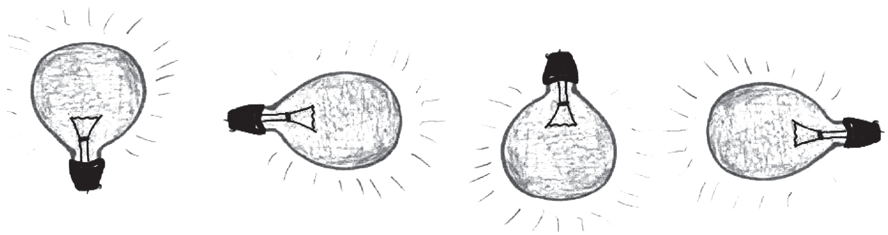
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଟ୍ରେସ୍‌ର ଗୁଣଧର୍ମ : ମନେକର A ଏବଂ B ଦୁଇଟି ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଅର୍ଡର n ଏବଂ λ ଏକ ସ୍କାଲାର ।

a. $tr(\lambda A) = \lambda\, tr\, A$

b. $tr(A + B) = tr\, A + tr\, B$

c. $tr(AB) = tr(BA)$

ଏକ ଲାଇଟରେ ବଲବ କୁ ଲଗେଇବା ପାଇଁ କେତୋଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଲାଗେ ?



ଯେପରିs $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ କିନ୍ତୁ ତୁମକୁ ଏହାକୁ ବାରମ୍ବାର ପ୍ରୟୋଗ କରିବାକୁ ପଡିବା

ଚିତ୍ର 3.1

3.1.2 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସରେ ପ୍ରକ୍ରିୟା

3.1.2.1 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଯୋଗ

ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର 'ଯୋଗ', କରାଯାଏ ଯେତେବେଳେ ସେମାନଙ୍କର ଅର୍ଡର ସମାନ ହୁଏ । ମନେକର A ଏବଂ B ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସମାନ ଅର୍ଡର ର, ତେବେ ଏହି ଦୁଇ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ଯୋଗ A ଏବଂ B ର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନଗୁଡିକୁ ଯୋଗ କରି ପ୍ରାପ୍ତ କରାଯାଇଥାଏ ।

ଏହାକୁ A + B ରୂପରେ ସୂଚିତ କରାଯାଏ

ଉଦାହରଣ: ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times3}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$, ତେବେ

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+2 & 1+1 \\ 1+1 & 2+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

ସାଧାରଣତଃ, ଯଦି $A = [a_{ij}]$ ଏବଂ $B = [b_{ij}]$, ତେବେ

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

3.1.2.2 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯୋଗର ଗୁଣଧର୍ମ

ସମାନ ଅର୍ଡର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଯୋଗ କିମ୍ବା ବିୟୋଗ କରରରାଯାଇ ପାରେ।

a. କ୍ରମବିନିମୟ ନିୟମ : ସମାନ ଅର୍ଡରର ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ କୌଣସି କ୍ରମରେ ଯୋଗ କରାଯାଇପାରେ ଅର୍ଥାତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯୋଗ, କ୍ରମବିନିମୟ ନିୟମ ପାଳନ କରେ । ଯଦି 'A' ଏବଂ 'B' ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ! ତାହା ହେଲେ A + B = B + A (ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ, ସମାନ ଅର୍ଡରର ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ନେଇ ଏହାକୁ ଯାଞ୍ଚ କରିପାରିବେ)

b. ସଂଯୋଗୀ ନିୟମ: ଯଦି ଆମ ପାଖରେ ସମାନ ଅର୍ଡର ତିନୋଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A', 'B' ଏବଂ 'C' ଅଛି ତେବେ, ସଂଯୋଗ ଗୁଣଯୋଗର ଅନ୍ତର୍ଗତ ହୋଇଥାଏ। ଅର୍ଥାତ୍

$A + (B + C) = (A + B) + C$ (ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ଏହାକୁ ଯାଞ୍ଚ କରିପାରିବେ)

3.1.2.3 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବିୟୋଗ

ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରେ ବିୟୋଗ 'ପ୍ରକ୍ରିୟା ଜ୍ଞାତ କରାଯାଏ ଯଦି ସେମାନେ ସମାନ ଅର୍ଡରର ହୋଇଥାନ୍ତି । ମନେକର 'A' ଏବଂ 'B' ସମାନ ଅର୍ଡରର ଦୁଉଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ! ତେବେ ପ୍ରଥମ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସଂପୃକ୍ତ ଉପାଦାନରୁ ଦ୍ୱତୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନକୁ ବିୟୋଗ କରି ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ପାର୍ଥକ୍ୟ ପ୍ରାପ୍ତ ହୁଏ|ଏହାକୁ A – B . ରୂପରେ ସୂଚିତ କରାଯାଏ

ଉଦାହରଣ: ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$, ତେବେ

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-1 \\ 1-2 & 2-2 \\ 2-3 & 3-1 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

ଏହା ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' ଏବଂ 'B' ର ଅନ୍ତର ହୋଇଥାଏ।

3.1.2.4 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସହ ସ୍କେଲାର ଗୁଣନ

ଯଦି ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁ ସ୍କେଲାର ରାଶି k ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରାଯାଏ , ତାହେଲେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ କୁ k ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରାଯାଏ।

ଉଦାହରଣ: ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$, ତେବେ

$$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

3.1.2.5 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଗୁଣନ

ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' ଏବଂ 'B' ଗୁଣଫଳ ପାଇଁ 'A' ରେ ସ୍ତମ୍ଭ ଗୁଡିକର ସଂଖ୍ୟା 'B' ର ଧାଡିର ସଂଖ୍ୟା ସହିତ ସମାନ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ମନେକର $A = [a_{ij}]_{p\times q}$ ଏବଂ $B = [b_{jk}]_{q\times r}$, ତେବେ ଗୁଣଫଳ 'A''B' କୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥାଏ। ।

$$C = [c_{ik}]_{p\times r}$$

ଯେଉଁରେ $c_{ik} = a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + \ldots\ldots + a_{in}\, b_{nk}$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$

ଏହାକୁ $C = AB$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ: ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, ତେବେ

$$AB = \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\overset{\begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

3.1.2.6 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୁଣନର ଗୁଣଧର୍ମ

a. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଗୁଣନ କ୍ରମବିନିମୟ ନହୋଇପାରେ । ଅର୍ଥାତ ଯଦି 'A' ଏବଂ 'B' ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ତେବେ $AB \neq BA$(ସମାନ ନହୋଇପାରେ)

b. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୁଣନରେ ସଂଯୋଗୀ ସତ୍ୟ ଅଟେ, ଅର୍ଥାତ୍ ତିନୋଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସ'A', 'B' ଏବଂ 'C', ପାଇଁ $A(BC) =(AB)C$

c. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସଗୁଣନ ଯୋଗ ବଣ୍ଟନ ହୋଇଥାଏ ଯଦି ତିନୋଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A, B ଏବଂ C, ତେବେ $A(B + C) =AB + AC$

d. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ'A' ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ'I' ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ ଫଳ 'A' ହୁଏ ଅର୍ଥାତ୍ $AI =IA = A$

e. ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Aର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ରହିବ ଯଦି $|A| \neq 0$ ଅର୍ଥାତ୍

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

ଉଦାହରଣ: ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

ତେବେ ଗୁଣଫଳ AB ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ବୁଝାଅକି BA କାହିଁକି ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିହେବ ନାହିଁ ?

ସମାଧାନ: ଯେହେତୁ A ର ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡିକର ସଂଖ୍ୟା = B ରେ ଧାଡିଗୁଡିକର ସଂଖ୍ୟା ସମାନ, ତେଣୁ ଗୁଣନ AB କୁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, BA ପାଇଁ, B ର ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡିକର ସଂଖ୍ୟା $\neq$ A ର ଧାଡିଗୁଡିକର ସଂଖ୍ୟା ଏଥି ପାଇଁ, ଗୁଣନ BA କୁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିହେବ ନାହିଁ A

ମନ୍ତବ୍ୟ: 1. ଯଦି A ଏବଂ B ଯଥାକ୍ରମେ $m \times n$ ଏବଂ $p \times q$ ଅର୍ଡରର ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ତେବେ ଗୁଣଫଳ AB ସମ୍ଭବ ହେବ ଯେତେବେଳେ $n = p$ ଏବଂ AB ର ଅର୍ଡର $m \times q$ ହେବ ।

2. ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' ଏବଂ 'B' ପାଇଁ ଯଦି ଗୁଣନ ABର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ରହେ, ତେବେ ଗୁଣନ BA ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ସମ୍ଭବ କିମ୍ବା ସମ୍ଭବ ନ ହୋଇପାରେ ।

ଚିତ୍ରଦ୍ୱାରା ଉପସ୍ଥାପନା

1.ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୁଣନର ପର୍ଯ୍ୟାୟ କ୍ରମେ ମାନସ ଦର୍ଶନ (ଭିସୁଲାରାଇଜେସନ୍): http://matrixmultiplication.xyz

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା- 3.1

1. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର

   a. $2A + 3A$ b.$3A - 4B$

2. ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଏବଂ B ଏହିପରି ଅଟନ୍ତି, ଯେପରି $3A - 2B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $-4A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ ତେବେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଏବଂ B ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର।

3. ଯଦି A = କର୍ଣ୍ଣ [2 9 4] ଏବଂ B = କର୍ଣ୍ଣ [–3 7 6] ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର

   a. $A + B$ b. $A - B$ c. $7A + 2B$ d. $9A - 11B$

4. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, ତେବେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Xର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ଯେପରି $2A + 3X = 5B$

5. ଦତ୍ତ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର

   a.AB b. BA

ଏହା ମଧ୍ୟ ଦର୍ଶାଅ ଯେ କି $AB \neq BA$ ଅଟେ।

ଉତ୍ତରମାଳା

1. a. $\begin{bmatrix} 3 & 10 & 3 \\ 8 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 13 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -5 & -4 & 9 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

3. a. *diag.* [–1 16 10] b. *diag.* [5 2 –2]

   c. *diag.* [8 77 40] d. *diag.* [51 4 –30]

4. $X = \begin{bmatrix} 12 & 4/3 \\ 4 & -14/3 \\ 25/3 & 28/3 \end{bmatrix}$

5. a. $\begin{bmatrix} 3 & 12 & 11 \\ 4 & 13 & 8 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 11 & 9 & 13 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

3.2 ଭେକ୍ଟର

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ସଂଖ୍ୟା, କ୍ରମିତ ସଂଖ୍ୟା ସମୂହକୁ ଆମେ $[a_1, a_2 ..., a_n]$ ରୂପେ $1 \times n$ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା ଓ ଏହା ଏକ n ମାତ୍ରିକ ଭେକ୍ଟର । ଏହି ଭେକ୍ଟର ଟି ଧାଡି ଭେକ୍ଟର ଓ ଏହାର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ ଏକ n ମାତ୍ରିକ ସ୍ତମ୍ଭ ଭେକ୍ଟର । n ମାତ୍ରିକ ଭେକ୍ଟର n ସଂଖ୍ୟକ ସଂଖ୍ୟାର n ଟପଲ ।

ଉଦାହରଣ: a. (1 2 5)ଏହା ଏକ ଧାଡି ଭେକ୍ଟର ଅଟେ।

b. $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ଏହା ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ ଭେକ୍ଟର ଅଟେ।

3.2.1 ଭେକ୍ଟର ପ୍ରକ୍ରିୟା

3.2.1.1 ଭେକ୍ଟରର ଯୋଗ

ମନେକର $X=(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ ଏବଂ $Y=(b_1, b_2, b_3, \ldots b_n)$ ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରର, ତେବେ ଏମାନଙ୍କର ଯୋଗ X + Y $= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$

ଉଦାହରଣ: X = (1, 2, 3) ଏବଂ Y = (1, 1, 1), ତେବେ X + Y = (2, 3, 4) ହେବ

3.2.1.2 ଭେକ୍ଟରର ବିୟୋଗ

ମନେକର $X=(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ ଏବଂ $Y=(b_1, b_2, b_3, \ldots b_n)$ ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରର, ତେବେ X ଏବଂ Y ର ବିୟୋଗ

$$X-Y=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3, \ldots a_n-b_n)$$

ଉଦାହରଣ: X = (2, 3, 5) ଏବଂ Y = (1, 2, 6), ତାହା ହେଲେ X – Y = (1, 1, –1)।

3.2.1.3 ଭେକ୍ଟରର ସ୍କେଲାର ଗୁଣନ

ମନେକର $X=(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ କୌଣସି n-ଟପଲ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ k କୌଣସି ସ୍କେଲାର ରାଶି ଅଟେ, ତାହେଲେ k ସହିତ ଭେକ୍ଟର X ର ସ୍କେଲାର ଗୁଣନକୁ ଏହି ପ୍ରକାରର ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

$$kX = k(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$= (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$$

ଉଦାହରଣ:X = (1, 2, 3), ତେବେ 6X = 6(1, 2, 3) = (6, 12, 18) ହେବ।

3.2.1.4 ଡଟ୍ ଗୁଣଫଳ

ମନେକର $X=(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ ଏବଂ $Y=(b_1, b_2, b_3, \ldots b_n)$ ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର ତେବେ X ଏବଂ Y ର ଡଟ୍ ଗୁଣଫଳ ର ସଂଜ୍ଞା ହେଲା

$$X.Y=(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n).(b_1, b_2, b_3, \ldots b_n)=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n)$$

ଉଦାହରଣ: ମନେକର X = (2, 5, 4) ଏବଂ Y = (1, 2, 5), ତେବେ X .Y = (2, 5, 4) . (1, 2, 5=(2) (1) + (5) (2) + (4) (5) = 2 + 10 + 20 = 32

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 3.1 ଦତ୍ତ X = (1, 2, 5, 4) ଓ Y = (0, 3, 9, 12), ତେବେ 2X – Y ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ:ଦତ୍ତ X = (1, 2, 5, 4) ଏବଂ Y = (0, 3, 9, 12), ତାହେଲେ

2X – Y = 2(1, 2, 5, 4) – (0, 3, 9, 12)

= (2, 4, 10, 8) – (0, 3, 9, 12)

= (2, 1, 1, –4) **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 3.2 ଦତ୍ତ X = (1, 5, 2) ଓ Y = (1, 10, 11), ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

a. X + Y b. 9X c. 2X – 5Y

ସମାଧାନ: ଆମ ପାଖରେ ଅଛି X =(1, 5, 2) ଏବଂ Y = (1, 10, 11), ତେବେ

a. $X + Y = (1, 5, 2) + (1, 10, 11) = (2, 15, 13)$

b. $9X = 9(1, 5, 2) = (9, 45, 18)$

c. $2X – 5Y = 2(1, 5, 2) – 5(1, 10, 11)$

$= (2, 10, 4) – (5, 50, 55) = (–3, –40, – 51).$

ଉଦାହରଣ 3.3 ଯଦି X = (9, 4, 5, 10) ଓ Y = (0, –3, 2, – 1), ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର

a. X . X b.Y . X

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ X =(9, 4, 5, 10) ଓ Y = (0, –3, 2, – 1)

a.X . X =(9, 4, 5, 10) . (9, 4, 5, 10)

=(9) (9) + (4) (4) + (5) (5) + (10) (10)

=81 + 16 + 25 + 100 = 222

b.Y . X =(0, –3, 2, –1) . (9, 4, 5, 10) = –12 (ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କର)

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 3.2

1. a ଓ b ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଠି

   i. (a, 3) = (2, a + b) ii.(4, b) = a(2, 3)

2. ଯଦି X = (2, 3, 0, 5), Y = (0, 6, –1, 9) ଏବଂ Z = (1, 1, 1, 0) ତେବେ ଏହାର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର

   i. X + Y ii.Y – 3Z

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭେକ୍ଟର ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସମାନ ସ୍ଥିର କରନ୍ତୁ?

   $X_1 = (1, 2, 3), X_2 = (1, 3, 2), X_3 = (2, 3, 1), X_4 = (2, 3, 1).$

4. ଯଦି $X = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $Z = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ତେବେ ଏହାର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

   i. 5X – 2Y ii.–2X + 4Y – 3Z.

5. ଯଦି $X = (–2, 5, \sqrt{10}, 3, 4)$ ଓ $Y = (1, –2, \sqrt{10}, –4, 3)$, ତେବେ ଏହାର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   i. X . X ii.Y . Y

6. ଯଦି ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର (a + b, a – b) = (5, 3) ଦିଆଯାଇଥାଏ, ତାହେଲେ a ଓ b ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ଉତ୍ତରମାଳା

1. i. $a = 2, b = 1$ ii. $a = 2, b = 6$ 2. i. $(2, 9, -1, 14)$ ii. $(-3, 3, -4, 9)$

3. $X_3 = X_4$ 4. i. $\begin{bmatrix} 27 \\ 5 \\ -24 \end{bmatrix}$ ii. $\begin{bmatrix} -23 \\ 17 \\ 22 \end{bmatrix}$

5. i. 64 ii. 40 6. $a = 4, b = 1$

3.3 ପ୍ରାଥମିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା (ରୂପାନ୍ତରଣ)

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ କୌଣସି ଏକ ପ୍ରକ୍ରିୟା କୁ ପ୍ରାଥମିକ ରୂପାନ୍ତରଣକିମ୍ବା E ରୂପାନ୍ତରଣ କୁହାଯାଏ ।

1. କୌଣସି ଦୁଇଟି ଧାଡି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ) ର ଅଦଳବଦଳ ଅର୍ଥାତ୍ i ଏବଂ j ଧାଡି ଅଦଳବଦଳ କୁ R_{ij} କିମ୍ବା $R_i \to R_j$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ

   ସେହିଭଳି, i ଏବଂ j ସ୍ତମ୍ଭର ନିଜଭିତରେ ଅଦଳବଦଳ କୁ Cij କିମ୍ବା $C_i \to C_j$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।
2. କୌଣସି ଧାଡି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ) ର ଉପାଦାନ ଗୁଡିକର ଅନଶୂନ୍ୟ ସ୍କେଲାର ରାଶି ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରାଯାଇପାରେ । ଯେମିତି i^{th} ଧାଡିକୁ k ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରିବା ପରେ kRi ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାୟାଏ । ସେହିଭଳି ଭାବେ i^{th} ସ୍ତମ୍ଭକୁ k ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରିବା ପରେ k cj ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ
3. କୌଣସି ଧାଡି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ) ର ଉପାଦାନ ଗୁଡିକର କ୍ରମାଗତ ଗୁଣନକୁ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ଧାଡି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ) ର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ଗୁଡିକରେ ଯୋଗ କରିବା ।

3.3.1 ପ୍ରାଥମିକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

ଯେକୌଣସି ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରେ ପ୍ରାଥମିକ ରୂପାନ୍ତରଣକୁ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଯେଉଁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ପ୍ରାପ୍ତ କରାଯାଏ ତାହାକୁ ପ୍ରାଥମିକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ।

ଉଦାହରଣ: ମନେକର $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 + 3R_3$ ପ୍ରୟୋଗ କରିବା ପରେ, ଆମେ ପାଇବା

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ଏକ ପ୍ରାଥମିକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ।

3.4 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଇକେଲନ୍ ରୂପ

3.4.1 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଧାଡି ଇକେଲନ୍ ରୂପ

ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଧାଡି ଏକଲେନ୍ ରୂପ କୁହାଯାଏ ଯଦି

a. ସମସ୍ତ ଶୂନ୍ୟ ଧାଡିଗୁଡିକ, ଯଦି ଅଛି, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ତଳ ଭାଗରେ ଅଛି ।

b. ପ୍ରତ୍ୟେକ ଧାଡିର ପ୍ରଥମ ଅଣ-ଶୂନ୍ୟ ଉପାଦାନ ପୂର୍ବ ଧାଡିରେ ପ୍ରଥମ ଅଣ-ଶୂନ୍ୟ ଉପାଦାନର ଡାହାଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅଛି।

ମନ୍ତବ୍ୟ: କୌଣସି ଧାଡିର ପ୍ରଥମ ଅଣ-ଶୂନ୍ୟ ଉପାଦାନକୁ ସେହି ଧାଡିର ମୁଖ୍ୟ ଉପାଦାନ କିମ୍ବା ପାଇଭୋଟାଲ ଉପାଦାନ କିମ୍ବା ପାଇଭଟ କୁହାଯାଏ।

3.4.2 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଧାଡି ହ୍ରାସକରଣ ଇକେଲନ୍ ରୂପ

ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଧାଡି ହ୍ରାସକରଣ ଇକେଲନ୍ ରୂପ କୁହାଯିବ ଯଦି

a. ଏହା ଧାଡି ଇକେଲନ୍ ରୂପରେ ରହେ ।

b. ପ୍ରତ୍ୟେକ ମୁଖ୍ୟ ଉପାଦାନ ଏକକ ଅଟେ ।

c. ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ତମ୍ଭରେ ମୁଖ୍ୟ ଉପାଦାନର ଉପରରେ ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ଶୂନ୍ୟ ହୁଏ

3.4.3 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସ୍ତମ୍ଭ ଇକେଲନ୍ ରୂପ

ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ସ୍ତମ୍ଭ ହ୍ରାସକରଣ ଇକେଲନ୍ ରୂପ କୁହାଯିବ ଯଦି,

a. ସମସ୍ତ ଶୂନ୍ୟ ସ୍ତମ୍ବ, ଯଦି କିଛି ଥାଏ ତାହାହେଲେ ତାହା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଡାହାଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିବ ।

b. ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ତମ୍ଭର ପ୍ରଥମ ଅଣ-ଶୂନ୍ୟ ଉପାଦାନ ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ସ୍ତମ୍ବରେ ପ୍ରଥମ ଅଣ-ଶୂନ୍ୟ ଉପାଦାନ ର ତଳେ ରହିବ।

ମନ୍ତବ୍ୟ: କୌଣସି ସ୍ତମ୍ବର ପ୍ରଥମ ଅଣ-ଶୂନ୍ୟ ଉପାଦାନକୁ ସେହି ସ୍ତମ୍ବର ମୁଖ୍ୟ ଉପାଦାନ କିମ୍ବା ପାଇଭୋଟାଲ ଉପାଦାନ କିମ୍ବା, ପାଇଭଟ କୁହାଯାଏ।

3.4.4 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ସ୍ତମ୍ଭ ହ୍ରାସକରଣ ଇକେଲନ୍ ରୂପ

ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ସ୍ତମ୍ଭ ହ୍ରାସକରଣ ଇଲେକନ୍ ରୂପ ଯଦି କୁହାଯିବ ଯଦି

a. ଏହା ସ୍ତମ୍ଭ ଇକେଲନ୍ ରୂପରେ ଅଛି ।

b. ପ୍ରତ୍ୟେକ ମୂଖ୍ୟ ଉପାଦାନ ଏକକ ଅଟେ ।

c. ପ୍ରତ୍ୟେକ ଧାଡିରେ ମୂଖ୍ୟ ଉପାଦାନ ଗୁଡିକର ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ଉପାଦାନଗୁଡିକ ସବୁଶୂନ୍ୟ ଅଟେ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ: ଯଦି A ଧାଡି ଇକେଲନ୍ ରୂପରେ ଅଛି, ତେବେ ଏହାର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ୍ A' ସ୍ତମ୍ଭ ଇକେଲନ୍ ରୂପରେ ରହିବ

3.5 ଡିଟରମିନାଣ୍ଟସ୍ :

ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ର ଧାରଣା ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନରୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିଲା | ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ର ମୂଲ୍ୟ ଏକ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ଏକ ବର୍ଗାକାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଉପାଦାନର ଏକ ଫଳନ । ଏକ ବର୍ଗାକାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟକୁ det A କିମ୍ବା det (A) କିମ୍ବା | A | ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ।

ଏକ1×1 (ୱାନବାଏ ୱାନ ରୂପରେ ପଢାଯାଏ) ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A = [a] ର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟକୁ |A | = α ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ର ଅର୍ଡର 1 କୁହାଯାଏ

ଏକ 2×2 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ କୁ $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ଅର୍ଡର 2 କୁହାଯାଏ।

ଏହିପରି] 3×3 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ ର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟକୁ $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ଅର୍ଡର 3 କୁହାଯାଏ |

3.5.1 ଅର୍ଡର 2 ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ସଂଜ୍ଞା

ନିମ୍ନଲିଖିତ ଦୁଇଟି ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ଯାହାର ଦୁଇଟି ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ଏବଂ y କୁ ବିଚାରକୁ ନିଆଯାଉ

$$a_1x + b_1y = 0 \quad ...(1)$$

$$a_2x + b_2y = 0 \quad ...(2)$$

ସମୀକରଣରୁ (1), ରୁ ଆମେ ପାଉ

$$\frac{x}{y} = -\frac{b_1}{a_1} \quad ...(3)$$

ସମୀକରଣ(2)ରୁ ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{x}{y} = -\frac{b_2}{a_2} \quad ...(4)$$

ସମୀକରଣ (3) ଏବଂ (4) ରୁ, ଆମେ x ଏବଂ y କୁ ଅପସାରଣ କଲେ,

$$-\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2}$$

$$\Rightarrow \qquad a_1b_2 - b_1a_2 = 0$$

ସଂଖ୍ୟା $a_1b_2 - a_2b_1$ କୁ ଅଧିକ ସୁବିଧା ଜନକ ଭାବରେ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ । ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡିକ a_1, a_2, b_1, b_2 କୁ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ର ଉପାଦାନ କୁହାଯାଏ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଅର୍ଡର 2 × 2 ଡିଟରମିନାଣ୍ଟକୁ ବିସ୍ତାର କରିବାକୁ ଆମେ ବକ୍ର ଗୁଣନ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରିବା $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ = $a_1b_2 - a_2b_1$. ର ମୂଲ୍ୟ ହେଉଛି।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 3.4. $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ ର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ:ମନେକର $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ ତେବେ $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 35 + 6 = 41$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ 3.5. ଯଦି $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 6 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ x ଏବଂ y ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 6 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$2x^2 - 18 = 18 - 18$$

$$2x^2 - 18 = 0$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$x = \pm 3$ (ଉତ୍ତର)

3.5.2 ତୃତୀୟ ଅର୍ଡର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ସମ୍ପ୍ରସାରଣ

ନିମ୍ନଲିଖିତ ତିନିଗୋଟି ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ଯାହାର ତିନିଗୋଟି ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x, y ଏବଂ z ବିଚାରକୁ ନିଆଯାଉ

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \quad ...(5)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \quad ...(6)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0 \quad ...(7)$$

ଉପୋରକ୍ତ ତିନୋଟି ସମୀକରଣର ସମୂହ ରୁ x, y, z କୁ ଅପସାରଣ କରିବା ପାଇଁ, ଆମେ ସମୀକରଣ (6) ଏବଂ (7) କୁ ସମାଧାନ କରିବା

$\dfrac{x}{b_2c_3 - c_2b_3} = \dfrac{y}{c_2a_3 - a_2c_3} = \dfrac{z}{a_2b_3 - b_2a_3} = k$ (କୁହାଯାଉ) ଏରେ ଆମେ ପାଇବା

$$x = k(b_2c_3 - c_2b_3)$$
$$y = k(c_2a_3 - a_2c_3)$$
$$z = k(a_2b_3 - b_2a_3)$$

ସମୀକରଣ (5) ରେ x, y, z ମୂଲ୍ୟ ଗୁଡିକୁ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ, ଆମକୁ ମିଳେ

$$a_1(b_2c_3 - c_2b_3)k + b_1(c_2a_3 - a_2c_3)k + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)k = 0$$
$$a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + b_1(c_2a_3 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) = 0 \quad \text{...(8)}$$

(ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ମାନେ ଚିନ୍ତା କରନ୍ତୁ କାହିଁକି k ଶୂନ୍ୟ ହୋଇନପାରେ)

ସମୀକରଣ (8) ର ବାମପାର୍ଶ୍ୱର ଏହି ପଦକୁ ତୃତୀୟ ଅର୍ଡର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ କୁହାଯାଏ

ସାଙ୍କେତିକ ଭାବରେ ଏହାକୁ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ଭାବରେ ଲେଖାଯାଏ

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + b_1(c_2a_3 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

କିମ୍ବା $\Rightarrow$
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

ମନ୍ତବ୍ୟ:

i.ଉପରୋକ୍ତ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ସଂପ୍ରସାରଣକୁ ପ୍ରଥମ ଧାଡି ଦ୍ୱାରା ସମ୍ପ୍ରସାରଣ କୁହାଯାଏ।

ଏହିପରି ଯେକୌଣସି ଧାଡି କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ ଦ୍ୱାରା ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ସଂପ୍ରସାରଣ କରାଯାଇପାରିବ ଏବଂ ଏହାର ମୂଲ୍ୟ ସମାନ ରହିଥାଏ।

ii.ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦ ପୂର୍ବରୁ ଚିହ୍ନ = $(-1)^{i+j}$, ଯେଉଁରେ 'i' ଏବଂ 'j' ଧାଡି ଏବଂ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ସୂଚିତ କରେ ଯେଉଁରେ ଉପାଦାନ ଉପସ୍ଥିତ ଥାଏ ।

ଏହା ଯେକୌଣସି ଅର୍ଡର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ପାଇଁ ବୈଧ ।

କେତେକ ସମାହିତ ହୋଇଥିବା ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 3.6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 31 & 11 & 38 \end{bmatrix}$ ର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ:ଦତ୍ତ $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 31 & 11 & 38 \end{bmatrix}$$

ତେବେ $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 31 & 11 & 38 \end{vmatrix}$$

ପ୍ରଥମେ ଧାଡି ସହିତ ସମ୍ପ୍ରସାରଣ କଲେ , ଆମେ ପାଉ,

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 11 & 38 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 31 & 38 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 31 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 1(228 - 110) - 3(76 - 310) + 5(22 - 186)$$

$$= 1(118) - 3(-234) + 5(-164) = 118 + 702 - 820$$

$= 0$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ 3.7 ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, ହୁଏ ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $|3A| = 27|A|$.

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

ତେବେ $3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

ତେବେ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ | 3A |

$$|3A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$$

ପ୍ରଥମେ ଧାଡି ସହିତ ସମ୍ପ୍ରସାରଣ କଲେ , ଆମେ ପାଇବା

$$|3A| = 3\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3(36 - 0) - (0 - 0) + 3(0 - 0)$$

$$= 108 - 0 + 0 = 108$$

ଏବଂ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

ପ୍ରଥମେ ଧାଡି ସହିତ ସମ୍ପ୍ରସାରଣ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1(4) - 0 + 1(0) = 4$$

ତେବେ $27|A| = 27 \times 4 = 108$

ତେଣୁ $|3A| = 27|A|$ (ପ୍ରମାଣିତ)

3.5.3 ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ଗୁଣ ଧର୍ମ

ଗୁଣ- (I) ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ମୂଲ୍ୟ ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହିଥାଏ, ଯଦି ଏହାର ସମସ୍ତ ଧାଡି ସ୍ତମ୍ଭରେ ରୂପାନ୍ତରିତ ହୁଏ ଏବଂ ସମସ୍ତ ସ୍ତମ୍ଭ ଧାଡିରେ ରୂପାନ୍ତରିତ ହୁଏ ।

ଉଦାହରଣ 3.8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ରମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

ଦ୍ୱିତୀୟ ଧାଡି ସହିତ ସମ୍ପ୍ରସାରଣ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$\Delta = 36$ (ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ପାରିବେ)

ସମସ୍ତ ଧାଡିକୁ ସ୍ତମ୍ଭ ସହିତ ପରିବର୍ତ୍ତନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ (ଧରାଯାଉ)

ପ୍ରଥମେ ଧାଡି ସହିତ ସମ୍ପ୍ରସାରଣ କଲେ , ଆମେ ପାଇବା

$\Delta_1 = 36$ (ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ଏହାକୁ ଯାଞ୍ଚ କରିପାରିବେ)

ତେଣୁ $\Delta = \Delta_1$

ଗୁଣ- (II) ଯଦି ଏକ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ର ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଧାଡି କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭକୁ ଅଦଳବଦଳ କରାଯାଏ, ତେବେ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ମୂଲ୍ୟର ସଂଙ୍କେତ ମଧ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୁଏ ,

ଉଦାହରଣ 3.9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

ପ୍ରଥମେ ଧାଡି ସହ ବିସ୍ତାର କଲେ, ଆମେ ପାଇବା:

$\Delta = 2$

ଗୁଣ2. ବ୍ୟବହାର କରି ଅର୍ଥାତ୍ ଦ୍ୱିତୀୟ ଏବଂ ତୃତୀୟ ଧାଡିକୁ ଅଦଳବଦଳ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା :

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

ତାପରେ ପ୍ରଥମେ ଧାଡି ସହ ବିସ୍ତାର କଲେ, ଆମେ ପାଇବା:

$\Delta_1 = -2$

ତେଣୁ ଆମେ ପାଇବା $\Delta = -\Delta_1$

ଗୁଣ(III) ଯଦି ଏକ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଧାଡି କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ର ମୂଲ୍ୟ ସର୍ବଦା ଶୂନ୍ୟ ହୁଏ।

ଉଦାହରଣ 3.10. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

ପ୍ରଥମେ ଧାଡି ସହିତ ବିସ୍ତାର କଲେ, ଆମେ ପାଇବା :

$\Delta = 0$ (ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କରିପାରିବେ)

ତେଣୁ $\Delta = 0$

ଗୁଣ (IV)ଯଦି ଏକ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ଯେକୌଣସି ଧାଡି କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣିତ ହୁଏ ତେବେ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ର ମୂଲ୍ୟ ମଧ ସେହି ଉତ୍ପାଦକ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣିତ ହେବ

ଉଦାହରଣ 3.11. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

ପ୍ରଥମେ ଧାଡି ସହ ବିସ୍ତାର କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$\Delta = -3$

ପ୍ରଥମ ଧାଡିକୁ 5 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ,ଆମେ ପାଇବା

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (ଧରାଯାଉ)

$= -15 = 5(\Delta)$

$\Rightarrow \quad \Delta_1 = 5\Delta$

ଗୁଣ(V) ଯଦି ଗୋଟିଏ ଧାଡି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ) ର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନଗୁଡିକ ଅନ୍ୟ ଧାଡି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ) ର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ଗୁଡିକର ଧ୍ରୁବକ ଗୁଣିତକ ସହିତ ଯୋଡିହୋଇଯାଏ, ତେବେ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ମୂଲ୍ୟ ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହିଥାଏ,

ଉଦାହରଣ 3.12. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

ପ୍ରଥମେ ଧାଡି ସହିତ ବିସ୍ତାର କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\Delta = -2$$

ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭକୁ 3 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରି, ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଯୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+6 & 2 & 4 \\ 3+3 & 1 & 5 \\ 0+12 & 4 & 6 \end{vmatrix} \text{ (ଧରାଯାଉ)}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 12 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

ପ୍ରଥମେ ଧାଡି ସହ ବିସ୍ତାର କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$\Delta_1 = -2$$

ତେଣୁ $\Rightarrow$ $\Delta = \Delta_1$

ଗୁଣ VI ଯଦି ଏକ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ଧାଡି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ) ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ଦୁଇ (କିମ୍ବା ଅଧିକ) ପଦର ଯୋଗଫଳ ରୂପରେ ବ୍ୟକ୍ତ କରାଯାଏ, ତେବେ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟକୁ (କିମ୍ବା ଅଧିକ) ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ଯୋଗଫଳ ରୂପରେପ ମଧ୍ୟ ବ୍ୟକ୍ତ କରାଯାଇପାରେ

ଉଦାହରଣ 3.13. $\Delta = \begin{vmatrix} 2+1 & 1 & 0 \\ 3+1 & 0 & 1 \\ 2+2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\Delta = \begin{vmatrix} 2+1 & 1 & 0 \\ 3+1 & 0 & 1 \\ 2+2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$\Delta = 1$ (ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ଗଣନା ଏବଂ ଯାଞ୍ଚ କରିପାରିବେ)

ମନ୍ତବ୍ୟ: ଯଦି ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଅର୍ଡର n ହୁଏ, ତେବେ $|kA| = k^n |A|$

ଉଦାହରଣ 3.14. ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ଗୁଣ ଗୁଡିକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

ସମାଧାନ: ମନେକର $\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$R_2 \to R_2 - R_1; R_3 \to R_3 - R_1$ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆମେ ପାଉ,]

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b-a & b^2-a^2 & ca-bc \\ c-a & c^2-a^2 & ab-bc \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b-a & (b-a)(b+a) & c(a-b) \\ c-a & (c-a)(c+a) & b(a-c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ 1 & a+b & -c \\ 1 & a+c & -b \end{vmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$ ସଂସ୍ଥାପନାରେ ଆମେ ପାଉ,]

$$\Delta = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ 1 & a+b & -c \\ 0 & c-b & c-b \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ 1 & a+b & -c \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ତୃତୀୟ ଧାଡିରେ ପ୍ରୟୋଗ କରେ, ଆମେ ପାଉ,

$$= [(b-a)(c-a)(c-b)](-1)\begin{vmatrix} a & bc-a^2 \\ 1 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= [(b-a)(c-a)(c-b)](-1)[-ac-a^2-ab-bc+a^2]$$

$$= [(b-a)(c-a)(c-b)](-1)[(-1)(ac+ab+bc)]$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ 3.15. ଦର୍ଶାଅ ଯେ

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = 0$$

ସମାଧାନ: ମନେକର $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

$$\Delta = abc \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$= 0$ [ଯେପରି ପ୍ରଥମ ଏବଂ ତୃତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭ ସମାନ](ଗୁଣ III)

ଉଦାହରଣ 3.16. ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ଗୁଣକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2$$

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ ପ୍ରୟୋଗ କରି,ଆମେ ପାଉ]

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ x+2 & x & 1 \\ x+2 & 1 & x \end{vmatrix}$$

C_1 ରୁ (x + 2) ବାହାରକୁ ନେଇ ଆମେ ପାଉ

$$= (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1; R_3 \to R_3 - R_1$ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆମେ ପାଉ,

$$\Delta = (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (x-1) & 0 \\ 0 & 0 & (x-1) \end{vmatrix}$$

ଯଥାକ୍ରମେ R_2 ଏବଂ R_3 ରୁ (x – 1) ବାହାରକୁ ନେଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$\Delta = (x+2)(x-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

R_2 ସହିତ ବିସ୍ତାର କଲେ,ଆମେ ପାଉ

$$\Delta = (x+2)(x-1)^2 . (1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x-1)^2 . (1)$$

$$= (x+2)(x-1)^2 \quad \text{(ପ୍ରମାଣିତ)}$$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 3.3

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର:

a. $\begin{vmatrix} x^2-x+1 & x-1 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{5} \\ 20 & \sqrt{24} \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 210 & 117 & 345 \\ 19 & 9 & 34 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

2. ଦତ୍ତ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

a. ଦ୍ୱିତୀୟ ଧାଡିର ସାହାଯ୍ୟରେ

b. ତୃତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭର ସାହାଯ୍ୟରେ

3. ଦତ୍ତ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \sec\theta \\ \tan\theta & -\sec\theta & \tan\theta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ଗୁଣ ଗୁଡିକୁ ବ୍ୟବହାର କରିବ, ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରମାଣ କର:

a. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$

b. $\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$

c. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$

d. $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

e. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 2(a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)$

5. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $x = 2$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଗୁଡିକ $\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$ ର ଏକ ମୂଳ ଏବଂ ଏହାକୁ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ସମାଧାନ କର

6. ଯଦି a, b ଏବଂ c ବାସ୍ତବ ଏବଂ $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0$, ତେଣୁ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $a+b+c=0$ କିମ୍ବା $a = b = c$.

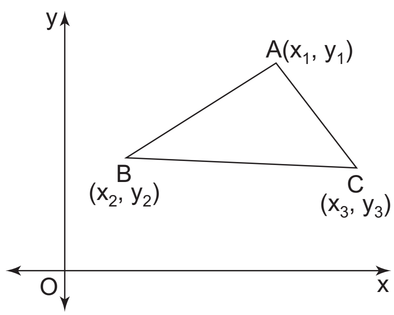
ଉତ୍ତରମାଳା

1. a. $x^3 - x^2 + 2$ b. 2 c. 2691 d. 40
2. a. 23 b. 23 3. $\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta)$

3.5.4 ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ପ୍ରୟୋଗ

3.5.4.1 ଡିଟରମିନାଣ୍ଟକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ନିର୍ଣ୍ଣୟ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ଯାହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ମାନେ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ଏବଂ (x_3, y_3)



ଚିତ୍ର 3-2

କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$

କିମ୍ବା $= \frac{1}{2}[x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3]$

ଏହି ଅଭିବ୍ୟକ୍ତି ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ରୂପରେ ଏପରି ଲେଖାଯାଇପାରିବ

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ କିମ୍ବା } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

ଟିପ୍ପଣୀ: 1. ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ଋଣାତ୍ମକ ହୋଇ ପାରେ କିନ୍ତୁ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସର୍ବଦା ଧନାତ୍ମକ ଅଟେ ଅର୍ଥାତ ≥ 0

2. ଯଦି ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ର ଦିଆଯାଏ, ତେବେ ଗଣନା ପାଇଁ ଧନାତ୍ମକ ଏବଂ ଋଣାତ୍ମକ ମୂଲ୍ୟଗୁଡିକ ବ୍ୟବହାର କର।

3. ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳ ରେଖାଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଥିବା ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଶୁନ୍ୟ ହୁଏ ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 3.17 ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଗୁଡିକ ହେଲେ (2, 7), (1, 1), (10, 8) ।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

ତ୍ରିଭୁଜର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଗୁଡିକ ହେଲେ $(\underset{x_1}{2}, \underset{y_1}{7}), (\underset{x_2}{1}, \underset{y_2}{1}), (\underset{x_3}{10}, \underset{y_3}{8})$

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \\ 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

R_1 ସହିତ ବିସ୍ତାର କଲେ, $\Delta = \frac{1}{2}[1(8-10)-1(16-70)+1(2-7)]$

$$= \frac{1}{2}[1(-2)-1(-54)+1(-5)]$$

$$= \frac{1}{2}[-2+54-5] = \frac{47}{2}$$

ତେଣୁ, ତ୍ରିଭୁଜର ଆବଶ୍ୟକ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ହେଉଛି $\frac{47}{2}$ ବର୍ଗ ୟୁନିଟ୍

ଉଦାହରଣ 3.18 ତ୍ରିଭୂଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଲେ (–2, –3), (3, 2), (–1, –8)

ସମାଧାନ:ତ୍ରିଭୁଜର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଗୁଡିକ ହେଲା $(\underset{x_1}{-2}, \underset{y_1}{-3}), (\underset{x_2}{3}, \underset{y_2}{2}), (\underset{x_3}{-1}, \underset{y_3}{-8})$

ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[1(-24+2)-1(16-3)+1(-4+9)]$$

$$= \frac{1}{2}[-22-13+5] = -\frac{30}{2} = -15$$

ଯେହେତୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସର୍ବଦା ଧନାତ୍ମକ, ତେଣୁ ଆବଶ୍ୟକ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 15 ବର୍ଗ ୟୁନିଟ୍ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ 3.19 k ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ଯଦି ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 4 ବର୍ଗ ୟୁନିଟ୍ ଅଟେ ଏବଂ ସ୍ଥାନାଙ୍କ (-2, 0), (0, 4), (0, K)।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

ଏଠାରେ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 4 ବର୍ଗୟୁନିଟ୍

$$\Delta = \pm 4$$

[କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଧନାତ୍ମକ ଅଟେ ଏବଂ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ଧନାତ୍ମକ ଏବଂ ଋଣାତ୍ମକ ହୋଇ ପାରେ]

$x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 0, y_1 = 0, y_2 = 4, y_3 = k$ ରଖିବାରେ

$$\pm 4 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & k \end{vmatrix}$$

$$\pm 4 = \frac{1}{2}[-(-2)(k-4)]$$ [R_2 ସହିତ ବିସ୍ତାର କରି]

$$\pm 8 = 2(k-4)$$

$$\pm 4 = k-4$$

ତେଣୁ	ଏବଂ
$4 = k-4$	$-4 = k-4$
$4+4 = k$	$-4+4 = k$
$8 = k$	$0 = k$
$\therefore \quad k = 8$	$\therefore \quad k = 0$

k ର ଆବଶ୍ୟକ ମୂଲ୍ୟ 8 ଓ 0

ଉଦାହରଣ 3.20 ଦର୍ଶାଅ ଯେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଗୁଡିକ (–2, –1), (7, 8), (–3, –2) ଏକ ସରଳ ରେକା ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ସମାଧାନ: ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ତିତ ରହିବେ ଯଦି ସେମାନେ ସମାନ ରେଖାରେ ଅଛନ୍ତି

$\therefore$ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 0

ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଗୁଡିକ (-2,-1),(7,8),(-3,-9)ମୂଲ୍ୟ ଗୁଡିକୁ (1)ରେ ରଖିଲେ , ଆମେ ପାଉ ।

$(x_1, y_1) = (-2, -1), (x_2, y_2) = (7, 8), (x_3, y_3) = (-3, -2)$

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 7 & -3 \\ -1 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\left[1(-14+24)-1(4-3)+1(-16+7)\right] \qquad [R_1 \text{ ସହିତ ବିସ୍ତାର କଲେ}]$$

$$= \frac{1}{2}\left[10-1-9\right]=0$$

$$\Delta = 0$$

ତେଣୁ, ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡିକ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ତିତ।

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 3.4

1. ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି
   a. (1, 0), (6, 0), (4, 3) b. (3, 8), (–4, 2), (5, 1)
2. ନିମ୍ନଲିଖିତରେ k ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟକର ଯଦି
   i. ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 4 ବର୍ଗୟୁନିଟ୍ ଏବଂ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଗୁଡିକ (k, 0), (4, 0), (0, 2)A
   ii. ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 35 ବର୍ଗ ୟୁନିଟ୍ ଅଟେ ଏବଂ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଗୁଡିକ (2, –6), (5, 4), (k, 4)A
3. ଦର୍ଶାଅ ଯେ A(a, b + c), B(b, c + a), C(a, a + b) ବିନ୍ଦୁ ଗୁଟିକ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ତିତ A

ଉତ୍ତରମାଳା

1. a. $\frac{15}{2}$ b. $\frac{61}{2}$ 2. i. 0, 8 ii. 12, –2

3.5.5 ମାଇନର ଏବଂ କୋ-ଫାକ୍ଟର

3.5.5.1 ମାଇନର:

ମନେକର $A = [a_{ij}]$ ଅର୍ଡର n ର ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯେପରି $|A| = |a_{ij}|$

ତେବେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଏକ ଉପାଦାନର ମାଇନର, ଧାଡି ଏବଂ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ବିଲୋପ କରି ପ୍ରାପ୍ତ ହୋଉଥିବା ଡିଟମିନାଣ୍ଟ ଭାବରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥାଏ।।

ମନେକର ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$

ତେଣୁ, a_1, b_1ଏବଂc_1 ର ମାଇନର ଯଥାକ୍ରମେ $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

ସେହିପରି, a2, b2ଏବଂc2 ର ମାଇନର ଯଥାକ୍ରମେ $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ ହୁଏ !

ସେହିପରି, a3, b3ଏବଂc3 ର ମାଇନର ଯଥାକ୍ରମେ $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

3.5.5.2 କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର

i ତମ ଧାଡି jତମ ସ୍ତମ୍ଭର ଯେକୌଣସି ଉପାଦାନର କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର ନିମ୍ନ ଭାବେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଏ।

କୋ-ଫାକ୍ଟର $=(-1)^{i+j}$ ମାଇନର ଉଭୟ ଡ଼ିଟରମିନାଣ୍ଟ ଓ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ପ୍ରିଲୋମ ଗଣନା କରିବା ପାଇଁ କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର ଉପଯୋଗୀ ହୋଇଥାଏ।

∴ ଉପଯୁକ୍ତ ଚିହ୍ନ ଯୁକ୍ତ ମାଇନର = କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହଣ 3.21 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ର ସମସ୍ତ ମାଇନର ଏବଂ କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

ଏଠାରେ
$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{13} = 3$$
$$a_{21} = 4, \quad a_{22} = 3, \quad a_{23} = 2$$
$$a_{31} = 7, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = -1$$

$M_{11} = a_{11}$ ର ମାଇନର $= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$M_{12} = a_{12}$ ର ମାଇନର $= \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 14 = -18$

$M_{13} = a_{13}$ ର ମାଇନର $= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 21 = -21$

$M_{21} = a_{21}$ ର ମାଇନର $= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2$

$M_{22} = a_{22}$ ର ମାଇନର $= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 21 = -22$

$M_{23} = a_{23}$ ର ମାଇନର $= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 14 = -14$

$M_{31} = a_{31}$ ର ମାଇନର $= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5$

$M_{32} = a_{32}$ ର ମାଇନର $= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$

$M_{33} = a_{33}$ ର ମାଇନର $= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$

ତେଣୁ $A_{11} = a_{11}$ ର କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର $= (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (-3) = -3$

$A_{12} = a_{12}$ ର କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର $= (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 (-18) = 18$

$A_{13} = a_{13}$ ର କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର $= (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 (-21) = -21$

$A_{21} = a_{21}$ ର କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର$= (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 (-2) = 2$

$A_{22} = a_{22}$ ର କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର $= (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 (-22) = -22$

$A_{23} = a_{23}$ ର କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର $= (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 (-14) = 14$

$A_{31} = a_{31}$ ର କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର $= (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 (-5) = -5$

$A_{32} = a_{32}$ ର କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର $= (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 (-10) = 10$

$A_{33} = a_{33}$ ର କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର $= (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 (-5) = -5$

3.5.6 ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଡ଼ଜଏଣ୍ଟ

ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Aର a_{ij} ଉପାଦାନର ସଂପୃକ୍ତ କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର ଦ୍ୱାରା ପରିବର୍ତ୍ତି କରି ତାହାର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ ନେଲେ ଆଡଜଏଣ୍ଟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ମିଳେ ।

ଯଦି $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, ତେବେ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$|A|$ ରେ ଥିବା ଉପାଦାନର କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

ଯେଉଁଠାରେ

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2c_3 - c_2b_3)$$

$$A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = -(b_1c_3 - c_1b_3)$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -(a_2c_3 - c_2a_3)$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1c_3 - c_1a_3)$$

$$B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = -(a_1c_2 - c_1a_2)$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - b_2a_3$$

$$C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_3 - b_1a_3)$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2 - b_1a_2)$$

ତେବେ, ସହଉତ୍ପାଦକ ଗୁଡ଼ିକର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ ହେଉଛି $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$ ଏହାକୁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଆଡ଼ଜଏଣ୍ଟ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ *adj* A.ରୁପରେ ସୂଚାଇ ଦିଆଯାଏ।

3.5.6.1 ଆଡଜଏଣ୍ଟର ଗୁଣଧର୍ମ

ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' ଏବଂ ଏହାର ଆଡ଼ଜଏଣ୍ଟ ଗୁଣଫଳ | A | ଓ I ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଗୁଣଫଳ ସହ ସମାନ।

$$adj.\,(A)\,.\,A = A\,(adj.\,A) = |A|\,.\,I$$

ଯେଉଁଠାରେ *I*, ଏକ ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 3.22.ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ର ଆଡ଼ଜଏଣ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

ଏଠାରେ $a_{11} = 2, a_{12} = 3, a_{21} = 3, a_{22} = 5$

a_{11}, a_{12}, a_{21} ଏବଂ a_{22} କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର ଗୁଡ଼ିକ ଦିଆଯାଇଛି।

$A_{11} = a_{11}$ କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର $= (-1)^{1+1}(5) = 5$

$A_{12} = a_{12}$ କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର$= (-1)^{1+2}(3) = -3$

$A_{21} = a_{21}$ କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର $= (-1)^{2+1}(3) = -3$

$A_{22} = a_{22}$ କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର $= (-1)^{2+2}(2) = 2$

ତେବେ$adj.\,(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ 3.23. ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ର ଆଡ଼ଜୟଣ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

ଏଠାରେ $a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = 4$

$a_{21} = 2, a_{22} = 3, a_{23} = 2$

$a_{31} = 3, a_{32} = 3, a_{33} = 4$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ ର ସହ ଉତ୍ପାଦକ ଗଣନା କରାଯାଉ, ଯେପରି ପୂର୍ବରୁ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି। ତେବେ ଆମେ ପାଉ,

$$A_{11} = 6, \quad A_{12} = -2, \quad A_{13} = -3$$

$A_{21} = 4, \quad A_{22} = -8, \quad A_{23} = 3$

$A_{31} = -8, \quad A_{32} = 6, \quad A_{33} = -1$

ତେଣୁ $$adj.(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$\Rightarrow \quad adj.(A) = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -8 \\ -2 & -8 & 6 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$ (ଉତ୍ତର)

3.5.6.2 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ

ଯଦି A ଏବଂ B ଦୁଇଟ ସମାନ ଅର୍ଡ଼ରର ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ଯେପରି AB = BA = I] ତେବେ B କୁ A ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ କୁହାଯାଏ, ଅର୍ଥାତ $B = A^{-1}$ ଏବଂ A ହେଉଛି B ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ

ମନ୍ତବ୍ୟ: 1- ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ଧାରଣ କରିବା ପାଇଁ ସର୍ତ୍ତ ହେଉଛି ଯେ, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' ଅଣ-ସିଙ୍ଗୁଲାର ହେବା ଉଚିତ, ଆର୍ଥାଥ $|A| \neq 0$

2- ଯେକୌଣସି ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ଧାରଣ କରେ ତାହାକୁ ଇନଭର୍ଟିବଲ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ।

3- ଯଦି ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ଧାରଣ କରେ ତେବେ ଏହା ସର୍ବଦା ଅନନ୍ୟ ଅଟେ।

ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ଅର୍ଥାତ,

$$A^{-1} = \frac{adj.(A)}{|A|} = \frac{1}{|A|}(Adj.A)$$

(ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ପୂର୍ବରୁ ଆଲୋଚନା ହୋଇଥିବା ଆଡ଼ଜଏଣ୍ଟର ଗୁଣଧର୍ମ ସାହାଯ୍ୟରେ ଫଳାଫଳ ପାଇ ପାରିବେ)

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 3.24. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ $$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |A| = 10 - 9 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ ଯେହେତୁ $|A| \neq 0$, ତେଣୁ A ଏକ ଅଣ ସିଙ୍ଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ତେଣୁ A^{-1} ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି ।

ତେଣୁ ଆମକୁ କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ତେଣୁ $A_{11} = a_{11}$ ର ସହ ଉତ୍ପାଦକ $= 5$

$A_{12} = a_{12}$ ର ସହ ଉତ୍ପାଦକ $= -3$

$A_{21} = a_{21}$ ର ସହ ଉତ୍ପାଦକ $= -3$

$A_{22} = a_{22}$ ର ସହ ଉତ୍ପାଦକ $= 2$

$$\Rightarrow \quad Adj.(A) = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $A^{-1} = \dfrac{Adj.(A)}{|A|} = \dfrac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(ଉତ୍ତର)}$$

ଉଦାହରଣ 3.25. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ଯାଞ୍ଚ ମଧ କର $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ତେଣୁ ଆମେ ପାଇବା $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

ତେଣୁ $|A| \neq 0$ ଅର୍ଥ 'A' ଅଣ-ସିଗୁଂଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ,ତେଣୁ ସିଙ୍ଗୁଲାର A^{-1} ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି ।

A^{-1} ପାଇବା ପାଇଁ ଆମକୁ A ର ଆଡ଼ଜଏଣ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ, ଏଥିପାଇଁ ଆମେ A ର ସହ ଉତ୍ପାଦକ ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା

ଆମେ ପାଉ $A_{11} = -9, \quad A_{12} = -8, \quad A_{13} = -2$

$A_{21} = 8, \quad A_{22} = 7, \quad A_{23} = 2$

$A_{31} = -5, \quad A_{32} = -4, \quad A_{33} = -1$

$$\therefore \quad adj.(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 8 & -5 \\ -8 & 7 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ତେଣୁ $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj.(A)$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 8 & -5 \\ -8 & 7 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ଯାଞ୍ଚ ପାଇଁ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କରି ପାରିବେA)

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 3.5

ମାଇନର,କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର, ଆଡ଼ଜଏଣ୍ଟ ଏବଂ ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ଉପରେ ଆଧାରିତ ପ୍ରଶ୍ନ ଏବଂ ଦିଆଯାଇଥିବା ମାଟ୍ରିକ୍ସ ପାଇଁ ଆଡ଼ଜଏଣ୍ଟ ବ୍ୟବହାର କରି ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

1. ଦତ୍ତ ଡ଼ିଟରମିନାଣ୍ଟ ପାଇଁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନର ସମସ୍ତ ମାଇନରସ ଏବଂ କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

2. ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଡ଼ଜଏଣ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

3. ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଡ଼ଜଏଣ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

4. ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଡ଼ଜୟଣ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

5. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. ଦତ୍ତ $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$ ଯେଉଁଠାରେ d_1, d_2, d_3 ଏବଂ d_4 ଶୂନ୍ୟ ନୁହେଁ D^{-1} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ଉତ୍ତର ମାଳା

1. $M_{11} = (ab^2 - ac^2)$, $M_{12} = (ab - ac)$, $M_{13} = (c - b)$
$M_{21} = a^2b - bc^2$, $M_{22} = (ab - bc)$, $M_{23} = (c - a)$
$M_{31} = (ca^2 - cb^2$, $M_{32} = (ca - bc)$, $M_{33} = (b - a)$
$A_{11} = (ab^2 - ac^2)$, $A_{12} = (ac - ab)$, $A_{13} = (c - b)$
$A_{21} = (bc^2 - a^2b)$, $A_{22} = (ab - bc)$, $A_{23} = (a - c)$
$A_{31} = (ca^2 - cb^2)$, $A_{32} = (bc - ca)$, $A_{33} = (b - a)$, $|A| = (a - b)(b - c)(c - a)$

2. a. $\begin{bmatrix} 15 & 6 & -15 \\ 0 & -3 & 0 \\ -10 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -7 & -3 & 26 \\ -3 & -1 & 11 \\ 5 & 2 & -19 \end{bmatrix}$

4. a. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -15 \\ 3 & 1 & -9 \\ -3 & -1 & 11 \end{bmatrix}$ b. $\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

5. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -20 \\ 2 & 3 & -15 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d_4 \end{bmatrix}$

ଆକର୍ଷଣୀୟ ତଥ୍ୟ

ବିଭିନ୍ନ ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଗଠନକୁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସାହାଯ୍ୟରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କିମ୍ବା ଡ଼ିଜାଇନ କରାଯାଇ ପାରିବ। ଆମେ ବୁର୍ଜ ଖଲିଫା'ଙ୍କର ଉଦାହରଣ ନେଇପାରିବା; ଡ଼ିଜାଇନ୍ ଯାହା ଏତେ ସାଧାରଣ ନୁହେଁ, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ବ୍ୟବହାର କରି ତିଆରି କରାଯାଇଥିଲା।

- କେତକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ରଭାବରେ ପରିକଳ୍ପିତ କାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ଯେପରିକି ପୁନରାବୃତ୍ତି ଫଳନ ପଦ୍ଧତି (Iterated Function system) ଚିତ୍ର ଆଙ୍କିବା ପାଇଁ ପ୍ରକୃତରେ ମଜାଳିଆ ଏବଂ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ବ୍ୟବହାର ସହିତ ଗଣନା କରାଯାଏ
- ଆଇଟି ଏବଂ ସୂଚନା ସୁରକ୍ଷା (ବିଶେଷ କରି ଏନକ୍ରିପସନ)ର ପରିସ, ଅନେକ ଆଇଟି କମ୍ପାନି ଗୁଡ଼ିକ ଏହି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୁଡ଼ିକୁ ତଥ୍ୟ ଗଠନ (Data structure) ଭାବରେ ସନ୍ଧାନ ଜିଜ୍ଞାସା (Search queria) କୁ କାର୍ଯ୍ୟକାରି କରିବା, ଉପଭୋକ୍ତାର ସୂଚନା ଟ୍ରାକ କରିବା ଏବଂ ଡ଼ାଟାବେସ ପରିଚାଳନା କରିବା ପାଇଁ ବ୍ୟବହାର କରନ୍ତି।
- ଏହା ଅନେକ ସ୍ଥାନରେ ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇ ପାରେ, ଯେପରିକି କାର ରେସିଂ ଗେମ ଖେଳିବାବେଳେ ମ୍ରାଟ୍ରିକ୍ସ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରେ। ନେଟୱାର୍କର ଏକ କ୍ଲଷ୍ଟର ନିର୍ମାଣ, ଫେସବୁକ, ଟ୍ୱିଟର, ଇନଷ୍ଟାଗ୍ରାମ ଉପରେ କରାଯାଇଥାଏ, କିମ୍ବା ୱାଲସ୍ଟ୍ରିଟ୍‌ରେ ବାଣିଜ୍ୟ କରିବା ସମୟରେ ମଧ୍ୟ।

ଭିଡିଏ ସଂଯୋଗ

Basic Matrix Concepts

Introduction to Matrix Algebra - I

Matrix Analysis with Applications

Elementary Row Operations

Determinant of a Matrix

ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ:

- ଭିଭିନ୍ନ ଗ୍ରାଫିକ୍ସ ସଫ୍ଟୱେର ଯେପରିକି ଆପଣଙ୍କର ବ୍ୟକ୍ତିଗତ କମ୍ପ୍ୟୁଟରେ ଆଡ଼ୋବ ସଫ୍ଟୱେର, ଚିତ୍ର ପ୍ରଦାନ କରିବା ପାଇଁ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରି କରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପାଇଁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ବ୍ୟବହାର କରେ।
- ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏକ ଜ୍ୟାମିତିକ ବସ୍ତୁର ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରୀକରଣକୁ ପ୍ରତିପାଦିତ କରିପାରିବ, ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କାର୍ଟେସିଆନ x-y ସମତଳରେ x କିମ୍ବା y-ଅକ୍ଷରେ ଏକ ବସ୍ତୁକୁ ପ୍ରତିଫଳିତ କରିଥାଏ।
- ଗେମିଙ୍ଗ ଇଣ୍ଡଷ୍ଟ୍ରି ପରିସର ଏବଂ ଇମେଜ ପ୍ରୋସେସିଂ ପରିସରରେ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ ଅଛି ଯେଉଁଠାରେ ପୋଖରି ନଦୀ ଏବଂ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ଓଲଟା ଚିତ୍ର ଗୁଡିକରେ ପ୍ରତିଫଳନ ଦେଖାଯାଏ।
- କମ୍ପ୍ୟୁଟର ଗ୍ରାଫିକ୍ସରେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ମଧ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଥାଏ। ଯେତେବେଳେ ଲୋକମାନେ ଯେକୌଣସି ବସ୍ତୁ ଉପରେ ଯେକୌଣସି ଆବଶ୍ୟକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ପରିବର୍ତ୍ତନକୁ ପ୍ରୟୋଗ କରିବାକୁ ଚାହାନ୍ତି, ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ କାର୍ଟୁନ ଚରିତ୍ର ଗୁଡ଼ିକ।
- ପ୍ଲଟିଂ ସର୍ଭେରେ ସେମାନେ ଗୁରୁତ୍ୱ ପୂର୍ଣ୍ଣ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରନ୍ତି। ପ୍ରକୃତ ତଥ୍ୟର ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ ଯେପରିକି ଲୋକ ସଂଖ୍ୟା, ଶିଶୁ ମୃତ୍ୟୁହାର ସେମାନଙ୍କ ମାଧମରେ କରାଯାଇପାରିବ।
- ଅର୍ଥନୀତିରେ ମଧ ନିର୍ଭରଶୀଳ ଚଳର ପୂର୍ବାନୁମାନିକ ମଡ଼େଲ ନିର୍ମାଣ, ସେୟାର ବିଶ୍ଳେଷଣ କରିବା, ବ୍ୟବସାୟର ବାଣିଜ୍ୟ ଅଧୟନ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ମାଧମରେ କରାଯାଇ ପାରିବ
- ପଦାର୍ଥ ବିଜ୍ଞାନରେ, ବ୍ୟାଟେରୀ ପାୱାର ଆଉଟ୍‌ପୁଟ ଗଣନା କରିବା ବେଳ, କିର୍ଚ୍ଛପଙ୍କର ନିୟମ ସମାଧାନ କରିବା ଏବଂ କ୍ୱାଣ୍ଟମଫିଜିକ୍ସ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱ ପୂର୍ଣ୍ଣ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଥାଏ।
- ଭୂ ବିଜ୍ଞାନରେ ମଧ ଭୂକମ୍ପ ସର୍ବେକ୍ଷଣ କରିବା ବେଳେସେମାନେ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରନ୍ତି।
- ରୋବୋଟିକ୍ସରେ, ରୋବଟିକ୍ ଗତି ଗୁଡ଼ିକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଆଧାରରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥାଏ।

3.6 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କ

ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସରେ ଥିବା ସର୍ବୋଚ୍ଚ ସଂଖ୍ୟକ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଧାଡି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ) ଅଟେ । ଏହାକୁ $\rho(A)$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍

1- .ଅର୍ଡ଼ର 'r' ର ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ ମାଇନର (ବର୍ଗ ଉପମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ) ଅଛି, ଯାହା ମୂଲ୍ୟ ଶୂନ୍ୟ ନୁହେଁ।

2- ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ମାଇନର, ଯାହାର ଅର୍ଡ଼ର 'r' ଠାରୁ ଅଧିକ ହୁଏ, ତାହା ଶୂନ୍ୟ ହେବ' A ର ରାଙ୍କ $\rho(A)$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ।

ମନ୍ତବ୍ୟ:

1. $\rho(A) = 0$, ଯେତେବେଳେ A ଏକ ଶୂନ୍ୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।A
2. $\rho(A) \geq 0$, ଯେତେବେଳେ $A \neq 0$.
3. ଯଦି A .ଅର୍ଡ଼ର n ର ଅଣ ସିଙ୍ଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହୁଏ, ତେବେ $\rho(A) = n$
4. ଯଦି A.ଅର୍ଡ଼ର n ର ସିଙ୍ଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହୁଏ, ତେବେ $\rho(A) < n$
5. ଯଦି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଅର୍ଡର $m \times n$ ହୁଏ, ତେବେ $\rho(A) \leq min(m, n)$
6. ରାଙ୍କ r ର ପ୍ରତ୍ୟକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ସହିତ ଅନୁରୂପ ସେଠାରେ ଅଣ ସିଙ୍ଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସ୍ P ଏବଂ Q ଅଛି ଯେପରିକି

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୁପ: ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ତେବେ $$|A| = 2(1) = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଏକ ଅଣ ସିଙ୍ଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ ଯାହାର ଅର୍ଡ଼ର 3 ଅଟେ।

$\Rightarrow$ $$\rho(A) = 3.$$

3.6.1 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ବିକଳ୍ପ ଉପାୟ

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କ ସେହି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଇକେଲନ୍ ରୂପରେ ଅଣଶୁନ୍ୟ ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା ସହିତ ସମାନ।

ମନ୍ତବ୍ୟ: ଅଣଶୂନ୍ୟ ଧାଡ଼ି ହେଉଛି ସେହି ଧାଡ଼ି ଯେଉଁଥିରେ ଅତିକମରେ ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନ ଶୂନ୍ୟ ନୁହେଁ

ଉଦାହରଣ: ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ର ରାଙ୍କ ନିରୂପଣ କର।

ସମାଧାନ: ସ୍ପଷ୍ଟରୂପେ ଦିଆଯାଇଛି ଯେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଇକେଲନ୍ ରୂପରେ ଅଛି। ଏହାର 2ଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ଧାଡି ଅଛି। ତେଣୁ A ର ରାଙ୍କ = 2 ଅର୍ଥାତ୍ $\rho(A) = 2$.

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 3.26. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 + R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to 4R_3 - R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ ଏଠାରେ,ଅଣଶୂନ୍ୟ ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା 3 ଅଟେ ତେଣୁ ରାଙ୍କ $\rho(A) = 3$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ: 3.27. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 9 & 16 & -13 \end{bmatrix}$ ର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 9 & 16 & -13 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 + 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 13 & -9 \\ 0 & 7 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$
$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 13 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ ଏଠାରେ, ଅଣଶୂନ୍ୟ ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇ ଅଟେ ତେଣୁ ରାଙ୍କ $\rho(A) = 2$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 3.28. b ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ b & 13 & 10 \end{bmatrix}$ ର ରାଙ୍କ 2 ଅଟେ।

ସମାଧାନ ଏଠାରେ ଆମର ଅଛି $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ b & 13 & 10 \end{bmatrix}$

$R_1 \to 2R_1$
$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ b & 13 & 10 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_1$
$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ b-2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$
$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ b-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ଯଦି A ର ରାଙ୍କ ଦୁଇ ଅଟେ ତେବେ $b - 2$ ନିଶ୍ଚିନ୍ତ ଶୂନ୍ୟ ହେବ।

ଅର୍ଥାତ $b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 3.29. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ ର ରାଙ୍କ ନିରୂପଣ କର।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ ଆମର ଅଛିA = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 - \frac{3}{2}R_1, R_3 \to R_3 - 2R_1, R_4 \to R_4 - \frac{9}{2}R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & \frac{-7}{2} & -7 & \frac{-21}{2} \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 2R_2, R_4 \to R_4 - 7$

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ଏଠାରେ ଅଣଶୂନ୍ୟ ଧାଡି ସଂଖ୍ୟା= 2 ତେଣୁ ରାଙ୍କ(A) = 2

ଉଦାହରଣ 3.30. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ ର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟକର।

ସମାଧାନ: ଆମର ଅଛି $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1, R_4 \to R_4 - 6R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & -14 & -10 & -4 \\ 0 & -21 & -16 & -6 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 2R_2, R_4 \to R_4 - 3$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftrightarrow R_4$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ଏଠାରେ ଅଣଶୂନ୍ୟ ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା 3 ଅଟେ। ତେଣୁ ରାଙ୍କ (A) = 3

ଉଦାହରଣ 3.31. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ ର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ, ଆମର ଅଛି $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix} R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1, R_4 \to R_4 - 6R_1$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 9 & 10 \\ 0 & 9 & 12 & 17 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_3 - \frac{4}{5}R_2, R_4 \to R_4 - \frac{9}{5}R_2$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 33/5 & 14/5 \\ 0 & 0 & 33/5 & 4/5 \end{bmatrix} \quad R_4 \to R_4 - R_3$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 33/5 & 14/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ରାଙ୍କ =ଅଣଶୂନ୍ୟ ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା 4 ର୍ୟାଙ୍କ (A) = 4

ଉଦାହରଣ 3.32. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ ର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ, ଆମର ଅଛି $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1, R_4 \to R_4 - 6R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix} R_4 \to R_4 - R_3$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad R_4 \to R_4 - R_2$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \quad R_2 \leftrightarrow R_3, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ରାଙ୍କ = ଅଣଶୂନ୍ୟ ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା 3 ରାଙ୍କ $(A) = 3$

3.7 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ନର୍ମାଲ ରୂପ (କାନନିକାଲ ରୂପ)

ପ୍ରତ୍ୟେକ $m \times n$ ଅର୍ଡର ଅଣଶୂନ୍ୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ପ୍ରାଥମିକ ଧାଡ଼ି ଏବଂ ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରୟୋଗ ଦ୍ୱାରା ନିମ୍ନଲିଖିତ ଯେକୌଣସି ରୂପର ସମାନ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସରେ ହ୍ରାସ କରାଯାଇ ପାରେ।

i. $\begin{bmatrix} I_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$ ii. $\begin{bmatrix} I_r \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$

iii. $[I_r \ : \ 0]$ iv. $[I_r]$

ଯେଉଁଠାରେ I_r ଅର୍ଡ଼ର r ର ଏକକ ମ୍ୟଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ଏବଂ 0 କୌଣସି ଅର୍ଡ଼ରର ଶୂନ୍ୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ସୂଚାଏ। ଯାହାକୁ ଏହାର ନର୍ମାଲ ରୂପ କିମ୍ବା କାନନିକାଲ ରୂପ କୁହାଯାଏ। ଏହି ପ୍ରକାରେ ଲବ୍ଧ ସଂଖ୍ୟା r କୁ A ର ରାଙ୍କ କୁହାଯାଏ।

ଏବଂ $\rho(A) = r$

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ କୁ A ର କାନନିକାଲ ରୂପ କୁହାଯାଏ। ଯେହେତୁ ଏଠାରେ ଧାଡି ଏବଂ ସ୍ତମ୍ଭ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଉଭୟର ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇ ପାରେ, ପ୍ରାପ୍ତହୋଇଥିବା ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ିର ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନକୁ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭରେ ପରିବର୍ତ୍ତିତ କରାଯାଇ ପାରିବ। ପୁଣି ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ଏବଂ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭ ଦୁଇଟିକୁ ଅନ୍ୟ ଅଣ-ଶୂନ୍ୟ ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ବିଲୋପିତ କରାଯାଇ ପାରେ। ଏହି ପ୍ରକାରରେ, ଦ୍ୱିତୀୟ ଧାଡ଼ିର ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନକୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭରେ ବଦଳାଇ ଦିଆଯାଇ ପାରେ ଏବଂ ଏହି ପ୍ରକାରରେ ନର୍ମାଲ ରୂପ ଲବ୍ଧ ହୁଏ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 3.33. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ସମାଧାନ: ମନକେର $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} C_2 \to C_2 - 2C_1, C_3 \to C_3 + C_1, C_4 \to C_4 - 3C_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} C_3 \to C_3 + 2C_4, C_4 \to (-1)C_4$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_2 \to R_2 + 2R_1, R_3 \to R_3 - R_1$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 - R_2$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 \leftrightarrow C_4 A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I_2 & : & 0 \\ 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

ଯାହା ଏକ ଆବଶ୍ୟକ ନର୍ମାଲ ରୂପ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ରାଙ୍କ= 2

ଉଦାହରଣ 3.34. ନର୍ମାଲ ରୂପକୁ ହ୍ରାସ କରି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ସମାଧାନ: ଆମର ଅଛି $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$R_1 \to \left(\frac{1}{9}\right) R_1 \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/9 & 3/9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_1(-4) \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/9 & 3/9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 19/9 & -12/9 \end{bmatrix}$

$C_3 \to C_3 + C_1\left(\frac{-2}{9}\right) \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 19/9 & -12/9 \end{bmatrix}$

$C_4 \to C_4 + \left(\frac{-3}{9}\right)C_1 \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 19/9 & -12/9 \end{bmatrix}$

$R_3 \to R_3 - 5R_2 \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{-206}{9} & \frac{-282}{9} \end{bmatrix}$

$C_3 \to C_3 + C_2(-5)$
$C_4 \to C_4 + C_2(-6) \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-206}{9} & \frac{-282}{9} \end{bmatrix}$

$R_3 \to R_3\left(\frac{-9}{206}\right) \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{141}{103} \end{bmatrix}$

$C_4 \to C_4 + C_3\left(\frac{-141}{103}\right) \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [I_3 : 0]$

ଯାହା ଏକ ଆବଶ୍ୟକ ନର୍ମାଲ ରୂପ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ରାଙ୍କ = 3.

ଉଦାହରଣ 3.35. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ କୁ ନର୍ମାଲ ରୂପ B= $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ କୁ ହ୍ରାସ କର।

ସମାଧାନ:ଆମର ଅଛି $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$C_2 \to C_2 + C_1, C_3 \to C_3 - 2C_1, C_4 \to C_4 + 3C_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -8 & 14 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 4R_1$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 14 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_4 \leftrightarrow R_2$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -8 & 14 \end{bmatrix}$$

$C_4 \to C_4 - 2C_2$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 3R_2$
$R_4 \to R_4 - 5R_2$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$C_3 \leftrightarrow C_4$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$C_3 \to \frac{-1}{2} C_3$
$C_4 \to \frac{-1}{8} C_4$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_4 \to R_4 + 2R_3$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

$\therefore$ ତେଣୁ $\rho(A) = 4.$

ଉଦାହରଣ 3.36. ନର୍ମାଲ ରୂପକୁ ହ୍ରାସ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ସମାଧାନ: ଆମର ଅଛି $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 - 4R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1, R_4 \to R_4 - R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$C_2 \quad C_2 - 2C_1, C_3 \quad C_3 + C_1, C_4 \quad C_4 - 3C_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$ $\quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$C_3 \quad C_3 + \frac{6}{7}C_2, C_4 \quad C_4 - \frac{11}{7}C_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$R_4 \to R_4 + \frac{1}{2}R_3$ $\quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

$C_4 \to C_4 + 2C_3$ $\quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$R_2 \to \frac{-1}{7}R_2, R_3 \to \frac{-1}{2}R_3$ A ~ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ (A) ର ରାଙ୍କ = 3.

ଉଦାହରଣ 3.37.**ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ନର୍ମାଲ ରୂପରେ ହ୍ରାସ କର ଏବଂ ଏହାର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି**

A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

ସମାଧାନ: ଆମର ଅଛି: A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 - \frac{3}{2}R_1$
$R_3 \to R_3 - 2R_1$
$R_4 \to R_4 - \frac{9}{2}R_1$ A ~ $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1/2 & -1 & -3/2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -7/2 & -7 & -21/2 \end{bmatrix}$

$C_2 \to C_2 - \frac{3}{2}C_1$
$C_3 \to C_3 - 2C_1$
$C_4 \to C_4 - \frac{5}{2}C_1$ A ~ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & -3/2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -7/2 & -7 & -21/2 \end{bmatrix}$

$R_1 \to \frac{1}{2}R_1$
$R_2 \to -2R_2$
$R_3 \to -R_3$
$R_4 \to \frac{-2}{7}R_4$ A ~ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$R_3 \to R_3 - R_2$
$R_4 \to R_4 - R_2$ A ~ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$C_3 \to C_3 - 2C_2$
$C_4 \to C_4 - 3C_2$ A ~ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ତେଣୁ ଏହାର ରାଙ୍କ = 2.

ଉଦାହରଣ 3.38. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ ଏହାର ନର୍ମାଲ ରୂପରେ ହ୍ରାସ କର ଯେତେବେଳେ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$ ତେଣୁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Aର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟକର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହେଉଛି $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1 \end{array} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} C_2 \to C_2 - 2C_1 \\ C_3 \to C_3 + C_1 \\ C_4 \to C_4 - 4C_1 \end{array} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \leftrightarrow C_2 \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - \frac{4}{5}R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{array} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 16/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_2 \to 1/5 R_2 \\ R_3 \to 5/16 R_3 \end{array} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 \\ 0 & 0 & -0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} R_2 \to R_2 + \frac{5}{4}R_3 \\ R_4 \to R_4 - R_3 \end{array} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \leftrightarrow C_4 \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ଯାହାକି ଆବଶ୍ୟକ ନର୍ମାଲ ରୂପ, ତେଣୁ ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କ = 3

3.7.1 *P* ଏବଂ *Q* ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଯେଉଁଠାରେ $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ଯଦି A, $m \times n$ ଅର୍ଡ଼ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହୁଏ ତେବେ $A = I_m A I_n$ ଲେଖ ଯେଉଁଠାରେ I_m ଏବଂ I_n ଯଥାକ୍ରମେ m ଏବଂ n ଅର୍ଡର ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସ ଅଟେ। ଅନୁରୂପ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସହିତ ପ୍ରାଥମିକ ଗୁଣନ ଦ୍ୱାରା A ଉପରେ ପ୍ରାଥମିକ ଧାଡି ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପ୍ରଭାବ ପଡ଼ିପାରେ। ଅର୍ଥାତ ପରବର୍ତ୍ତୀ ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ I_m ଅଥବା I_m ରୁ ମିଳିଥିବା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଉପରେ ସମାନ ପ୍ରୟୋଗ। ସମାନ ଭାବରେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ I_n ରୁ ଅଥବା I_n ରୁ ମିଳିଥିବା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସି ଉପରେ ସମାନ ପ୍ରୟୋଗ ସହିତ A ଉପରେ ପ୍ରାଥମିକ ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପ୍ରୟୋଗ ସମାନ ଅଟେ। ସର୍ବଶେଷରେ ଆମେ ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱରେ A ସ୍ଥାନରେ $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ପାଇଥାଉ। ଆମେ I_m ସ୍ଥାନରେ P ଏବଂ ଡ଼ାହାଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ I_n ସ୍ଥାନରେ Q ପାଇବା।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 3.39. ଅଣ ସିଙ୍ଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ P ଏବଂ Q ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି PAQ ନର୍ମାଲ ରୂପରେ ରହିବ: ଯେଉଁଠି $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

ସମାଧାନ: ଆମର ଅଛି: $[A]_{2\times 3} = I_2 . A . I_3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to \frac{1}{2} R_1$ $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + R_1$ $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 + 3C_1$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to \frac{1}{3} C_2$ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_3 \to C_3 + C_2$ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I_2 : 0] = PAQ$$

ତେଣୁ $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ଉଦାହରଣ 3.40. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ହୁଏ P ଏବଂ Q ଦୁଇଟି ଅଣ ସିଙ୍ଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି PAQ = I.

ସମାଧାନ: $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$[A]_{3\times 3} = I_3 \, A \, I_3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - R_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ +0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to -C_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 3R_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_3 \to C_3 - C_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = PAQ$$

ତେଣୁ $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ଉଦାହରଣ 3.41.ଅଣ ସିଙ୍ଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସ P ଏବଂ Q ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି PAQ ନର୍ମାଲ ରୂପରେ ରହିବ ଯେତେବେଳେ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

ସମାଧାନ:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[A]_{3\times 4} = I_3 \,.\, A \,.\, I_4$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 3R_1$
$R_3 \to R_3 - 2R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & -16 & -2 \\ 0 & -11 & -11 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - 4C_1$
$C_3 \to C_3 - 6C_1$
$C_4 \to C_4 - C_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -16 & -2 \\ 0 & -11 & -11 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -11 & -4 \\ 0 & -11 & -16 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2(-1/11)$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 4/11\\0 & -11 & -16 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 2/11 & -1/11\\1 & -3 & 0\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}1 & -4 & -6 & -1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$R_3 \to R_3 + 11R_2$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 4/11\\0 & 0 & -5 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 2/11 & -1/11\\1 & -1 & -1\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}1 & -4 & -6 & -1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$C_3 \to C_3 - C_2, C_4 \to C_4 - \frac{4}{11}C_2$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & -5 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 2/11 & -1/11\\1 & -1 & -1\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}1 & -4 & -2 & 5/11\\0 & 1 & -1 & -4/11\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$R_3 \to \frac{-1}{5}R_3$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -2/5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 2/11 & -1/11\\-1/5 & 1/5 & 1/5\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}1 & -4 & -2 & 5/11\\0 & 1 & -1 & -4/11\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$C_4 \to C_4 + C_3\left(\frac{2}{5}\right)$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 2/11 & -1/11\\-1/5 & 1/5 & 1/5\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}1 & -4 & -2 & -19/55\\0 & +1 & -1 & -42/55\\0 & 0 & 1 & 2/5\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$[I_3 : 0] = PAQ$

ତେଣୁ $P = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 2/11 & -1/11\\-1/5 & 1/5 & 1/5\end{bmatrix}$ ଏବଂ $Q = \begin{bmatrix}1 & -4 & -2 & -19/55\\0 & 1 & -1 & -42/55\\0 & 0 & 1 & 2/5\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

ଯାଞ୍ଚ କରିବା:

$$PAQ = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 2/11 & -1/11\\-1/5 & 1/5 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 1\\1 & 4 & 6 & 1\\2 & -3 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -4 & -2 & -19/55\\0 & 1 & -1 & -42/55\\0 & 0 & 1 & 2/5\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$PAQ = \begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 1\\0 & 1 & 1 & 4/11\\0 & 0 & 1 & -2/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -4 & -2 & -19/55\\0 & 1 & -1 & -42/11\\0 & 0 & 1 & 2/5\\0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 3.6

ନିମ୍ନଲିଖିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 12 & -1 \end{bmatrix}$

ନର୍ମାଲ ରୁପରେ ହ୍ରାସ କରିବା ପରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

8. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ -8 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

ଦୁଇଟି ଅଣସିଙ୍ଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସ P ଏବଂ Q ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରି PAQ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ A ପାଇଁ ନର୍ମାଲ ରୁପରେ ରହିବ। ଯେଉଠାରେ A

12. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 11 & -19 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

ଉତ୍ତର

1. 2
2. 2
3. 2
4. 2
5. 2
6. 2
7. 2
8. 2
9. 3
10. 3
11. 3

12. $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 4/7 & 9/119 & 9/217 \\ 0 & 1/7 & -1/7 & -1/7 \\ 0 & 0 & -1/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/31 \end{bmatrix}$

14. $PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ଯେଉଁଠି $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ଆକର୍ଷଣୀୟ ତଥ୍ୟ

- ଡ଼ାଟାମାଇନିଙ୍ଗ ଏବଂ ବାୟୋଇନଫରମେଟିକ୍ସ ପରିସରରେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କର ପ୍ରୟୋଗ ଅଛି।
- ସାମାଜିକ ବିଜ୍ଞାନରେ ଦେଶଗୁଡିକ ପାଇଁ ଉପଭୋକ୍ତା ପସନ୍ଦ, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଉପସ୍ଥାପିତ ହୁଏ ।
- ଜୀବ ବିଜ୍ଞାନରେ ଜିନ୍ ଅଭିବ୍ୟକ୍ତିର ସ୍ତର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ବ୍ୟବହାର କରି ଉପସ୍ଥାପିତ ହୁଏ।
- ମେଡ଼ିକାଲ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସ ବ୍ୟବହାରକରି ସେମାନଙ୍କ ମଲେକୁଲାର ତଥ୍ୟରୁ କର୍କଟ ଏବଂ ଏହାର ଉପପ୍ରକାର ଗୁଡ଼ିକ ଆବିଷ୍କୃତ ହୁଏ।

ଭିଡ଼ିଓ ସଂଯୋଗ

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କ

ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ-II

ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ

ଆଇସିଟିର ବ୍ୟବହାର

- https://youtu.be/puq3qyEWMWs

ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ

- ଗଣିତ ଏବଂ କମ୍ପ୍ୟୁଟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ମଡ଼େଲିଂ ନିର୍ମାଣ ପାଇଁ ଏଗୁଡ଼ିକ ଅତ୍ୟନ୍ତ ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇଥାଏ। ସାଇବର ସୁରକ୍ଷା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯେଉଁଠାରେ ନିମ୍ନ ରାଙ୍କ ଅଛି, ଯଦି କିଛି ଅଜ୍ଞାତ ତଥ୍ୟକୁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ପୁନରୁଦ୍ଧାର କରିବାକୁ ପଡେ, ତେବେ ଏହା ଅତି ଦକ୍ଷତାର ସହିତ ସହଜରେ ପୁନରୁଦ୍ଧାର ହୋଇପାରିବ
- ରାଙ୍କ ମାତ୍ରାର ପ୍ରତିବିମ୍ବ ବିଷୟରେ ଏକ ଧାରଣ ମଧ ଦିଏ। ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, 3D ସ୍ପେଶରୁ ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ 2D ସମତଳ ମ୍ୟାପିଙ୍ଗରେ ପୂର୍ଣ୍ଣ ରାଙ୍କ ନଥାଏ।

3.8 ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ

ମନେକର ମୋ ପଡ଼ୋଶୀରେ ଏକ ବିଚିତ୍ର ଦୋକାନୀ ଅଛନ୍ତି। ସେ ନିଶ୍ଚିତ ଯେ କିଛି ଭାରତୀୟ ଚାଉଳ ଅପେକ୍ଷା ଅଧିକ ଗହମ ଖାଆନ୍ତି ଏବଂ କିଛି ଭାରତୀୟ ଗହମ ଅପେକ୍ଷା ଅଧିକ ଚାଉଳ ଖାଆନ୍ତି। ତେଣୁ ସେ କେବଳ ଦୁଇଟି ମାନର ପ୍ୟାକେଟ ପ୍ରଦାନ କରନ୍ତି। ପ୍ରଥମ ପ୍ୟାକେଟ, ଏହାକୁ N ବୋଲି କୁହାଯାଏ, ଏଥିରେ 5 କିଲୋଗ୍ରାମ ଗହମ ଓ 2 କିଲୋଗ୍ରାମ ଚାଉଳ ଥିବା ବେଳେ ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ୟାକେଟରେ ଏହାକୁ S ବୋଲି କୁହାଯାଏ, ଏଥିରେ 2 କିଲୋଗ୍ରାମ ଗହମ ଓ 5 କିଲୋଗ୍ରାମ ଚାଉଳ ଅଛି। ଚାଲ ଏକ କ୍ଷିପ୍ର ଲେଖା ପଦ୍ଧତି ଉଦ୍ଭାବନ କରିବା। ଯେତେବେଳେ ଆମେ (m, n) ଲେଖିବା, ଆମେ ବୁଝିବା m କିଲୋଗ୍ରାମର ଗହମ ଏବଂ n କିଲୋଗ୍ରାମର ଚାଉଳ। ବର୍ତ୍ତମାନ ଯଦି ମୁଁ N ର 3 ପ୍ୟାକେଟ କିଣେ, ଏହାର ଅର୍ଥ ଯେ ମୁଁ 15 କିଲୋଗ୍ରାମର ଗହମ ଏବଂ 6 କିଲୋଗ୍ରାମର ଚାଉଳ କିଣୁଛି। ଅର୍ଥାତ $3N = 5(5, 2) = (15, 6)$

ସେହିପରି S ର 2 ପ୍ୟାକେଟ ଅର୍ଥ 4 କିଲୋଗ୍ରାମର ଗହମ ଏବଂ 10 କିଲୋଗ୍ରାମର ଚାଉଳ, ଅର୍ଥାତ $2S = 2(2, 5) = (4, 10)$

ଯଦି ମୁଁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ୟାକେଟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ କିଣିବି, ତେବେ ମୁଁ 7 କିଲୋଗ୍ରାମ ଗହମ ଏବଂ 3 କିଲୋଗ୍ରାମ ଚାଉଳ କିଣିଥାନ୍ତି, ତାହା

$N + S = (5, 2) + (2, 5) = (5 + 2, 2 + 5) = (7, 7)$

ତେଣୁ ମୁଁ N ର m ପ୍ୟାକେଟ ଓ S ର n ପ୍ୟାକେଟ କିମ୍ବା ଉଭୟେ ଆବଶ୍ୟକ କରେ। କୌଣସି ଅସୁବିଧା ନାହିଁ। ମନେକର ମୋତେ 19 କିଲୋଗ୍ରାମର ଗହମ ଏବଂ 16 କିଲୋଗ୍ରାମର ଚାଉଳ ଦରକାର। ମୁଁ କଣ କରିବି ? ମୋତେ N ର x ପ୍ୟାକେଟ ଏବଂ S ର y ପ୍ୟାକେଟ୍ କିଣିବା ଆବଶ୍ୟକ,

ଯେପରିକି

$x(5, 2) + y(2, 5) = (19, 16)$

ଅର୍ଥାତ୍ $(5x, 2x) + (2y, 5y) = (19, 16)$ କିମ୍ବା $(5x + 2y, 2x + 5y) = (19, 16)$ ତେଣୁ ମୁଁ ରୈଖିକ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କରିବି

$$5x + 2y = 19$$
$$2x + 5y = 16.$$

n ଅଜ୍ଞାତ ଥିବା n ସମୀକରଣର ବାଖ୍ୟା:

$x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ ଅଜ୍ଞାତଥିବା n ସମୀକରଣ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ମାନଙ୍କର ଏକ ସେଟ୍ ଅଟେ । ଯାହାର ରୂପ

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad \ldots(1)$$

ଯେଉଁଠାରେ a_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ ହେଉଛି ଜଣାସୁଣା ସହଗ b_i $(1 \le i \le n)$ ହେଉଛି ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ମାନେA

ଟିପଣୀ: ଏହି ସମୂହକୁ ସମଘାତୀ କୁହାଯିବ ଯଦି ସମସ୍ତ bi ଶୂନ୍ୟ ହୁଏ।

ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଏହା ଅସମାଙ୍ଗୀ ଅଟେ। ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଚିହ୍ନରେ, ସମୂହ (1)କୁ ଏହି ଭାବରେ ଲେଖାଯାଇ ପାରିବ।

$$AX = B$$

ଯେଉଁଠି
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ସମୂହ (1)ର ଅଗମେଣ୍ଟେଡ୍ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଏହି ଭାବରେ ଲେଖାଯାଇ ପାରିବ।

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix}$$

(1)ର ସମାଧାନ ହେଉଛି $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକର ସେଟ ଯାହା ସମସ୍ତ n ସମୀକରଣକୁ ସନ୍ତୁଷ୍ଟ କରେ।

ମନ୍ତବ୍ୟ: ଅଗମେଣ୍ଟେଡ୍ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ: ସମୀକରଣ ଏକ ସମୂହରୁ ଏକ ଅଗମେଣ୍ଟେଡ୍ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହେଉଛି ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକର ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯେଉଁଥିରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଧାଡ଼ି ଗୋଟିଏ ସମୀକରଣରୁ ଧ୍ରୁବକକୁ ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କରେ। (ଉଭୟ ସହଗ ଓ ଧ୍ରୁବକ ସମାନ ଚିହ୍ନର ଅପର ପାଶ୍ୱରେ ରହିଥାଏ)ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ତମ୍ଭ ଗୋଟିଏ ଚଳ ପାଇଁ ସମସ୍ତ ସହଗକୁ ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କରେ ।

3.8.1 ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ର ପ୍ରକାର

A. ଅସମାଙ୍ଗୀ ସମୀକରଣ

B. ସମଘାତୀ ସମୀକରଣ

3.8.1.1 ଅସମାଙ୍ଗୀ ସମୀକରଣ ସମୂହ

i. **ସଂଗତ:** ଏକ ସମୀକରଣ ସମୂହ କୁ ସଂଗତ କୁହାଯିବ, ଯଦି ସେମାନଙ୍କର ଗୋଟିଏ କିମ୍ବା ଅଧିକ ସମାଧାନ ଥାଏ। ଅର୍ଥାତ୍

$x + 2y = 4$	$x + 2y = 4$
$3x + 2y = 2$	$3x + 6y = 12$
ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ	ଅସୀମ ସମାଧାନ

ii. **ଅସଙ୍ଗତ**: ଯଦି ଏକ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ ନାହିଁ, ଏହାକୁ ଅସଂଗତ କୁହାଯିବ।

$$x + 2y = 4$$
$$3x + 6y = 5$$

ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସଂଗତି:

ଚାଲନ୍ତୁ କହିବା n ସମୀକରଣଗୁଡିକ ଏହିପରି ଅଟେ।

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସଙ୍କେତ ପଦ୍ଧତିରେ ଏହିସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକ ଏପରି ଭାବରେ ଲୋଖାଯାଇ ପାରିବ:

$$AX = B$$

ଯେଉଁଠି

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ଅଗ୍‌ମେଣ୍ଟେଡ୍ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହେଉଛି

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & : & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & : & b_m \end{bmatrix}$$

a. **ସଂଗତ ସମୀକରଣ:**

ଯଦି A ର ରାଙ୍କ =[A : B] ର ରାଙ୍କ ହୁଏ

i.ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ :A ର ରାଙ୍କ =[A : B] ର ରାଙ୍କ = n (ଅଜ୍ଞାତ ସଂଖ୍ୟା)

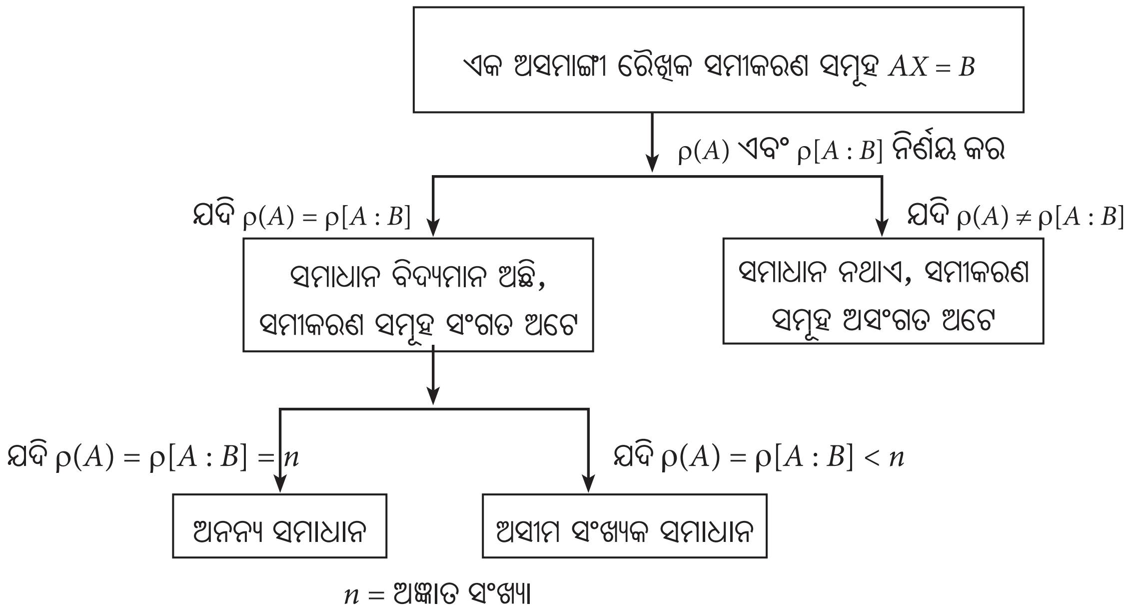
ii.ଅସୀମ ସମାଧାନ: A ର ରାଙ୍କ =[A : B] ର ରାଙ୍କ $<$ n (ଅଜ୍ଞାତ ସଂଖ୍ୟା)

b. **ଅସଙ୍ଗତ ସମୀକରଣ:**

ଯଦି A ର ରାଙ୍କ ≠[A : B] ର ରାଙ୍କ ହୁଏ,ତେବେ, ଆମେ କହିପାରିବା ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ ଗୁଡିକ ଅସମାଙ୍ଗୀ ସମୀକରଣ ଅଥବା ସମଘାତୀ ସମୀକରଣ।

ଏହା bi ଉପରେ ନିର୍ଭର ଶୀଳ,ଅସମାଙ୍ଗୀ ସମୀକରଣ ସମୂହ ଗୁଡ଼ିକ ସଂଗତ ଅଥବା ଅସଂଗତ ହୋଇଥାଏ ଯାହା ଅନୁଯାଇ ସମୀକରଣ ସମୂହର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ କିମ୍ବା ଅସୀମ ଅନେକ ସମାଧାନ ଥାଏ।

ସଂକ୍ଷେପରେ:



କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 3.42. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକ

$$2x + 6y = -11$$

$$6x + 20y - 6z = -3$$

$$6y - 18z = -1$$

ସଂଗତ ନୁହେଁ।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହ ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପ ହେଉଛି

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & -6 \\ 0 & 6 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ଯେଉଁଠାରେ $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & -6 \\ 0 & 6 & -18 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -11 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

ଅଗମେଣ୍ଟେଡ୍ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

$$C = [A:B] = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & : & -11 \\ 6 & 20 & -6 & : & -3 \\ 0 & 6 & -18 & : & -1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 3R_1,\qquad C \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & : & -11 \\ 0 & 2 & -6 & : & 30 \\ 0 & 6 & -18 & : & -1 \end{bmatrix}$

$R_3 \to R_3 - 3R_2\qquad C \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & : & -11 \\ 0 & 2 & -6 & : & 30 \\ 0 & 0 & 0 & : & -91 \end{bmatrix}$

$\therefore\qquad \rho(A) = 2$ ଏବଂ $\rho(A:B) = 3$

$\Rightarrow\qquad \rho(A) \neq \rho(A:B)$

ତେଣୁ, ସମୀକରଣ ଗୁଡିକ ସଙ୍ଗତ ନୁହେଁ।

ଉଦାହରଣ 3.43. ସଂଗତ ପାଇଁ ପରୀକ୍ଷା କର ଏବଂ ସମାଧାନ କର।

$$5x + 3y + 7z = 4$$
$$3x + 26y + 2z = 9$$
$$7x + 2y + 10z = 5$$

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପ ହେଉଛି

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 26 & 2 \\ 7 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ଯେଉଁଠାରେ $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 26 & 2 \\ 7 & 2 & 10 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$

ଅଗମେଣ୍ଟେଡେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

$$C = [A:B] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 & : & 4 \\ 3 & 26 & 2 & : & 9 \\ 7 & 2 & 10 & : & 5 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to R_1\left(\frac{1}{5}\right)\qquad C \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 7/5 & : & 4/5 \\ 3 & 26 & 2 & : & 9 \\ 7 & 2 & 10 & : & 5 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 - 3R_1,\ R_3 \to R_3 -$

$C \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} & : & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{121}{5} & \frac{-11}{5} & : & \frac{33}{5} \\ 0 & \frac{-11}{5} & \frac{1}{5} & : & \frac{-3}{5} \end{bmatrix}$

$$R_3 \to R_3 + \frac{1}{11}R_2 \qquad C \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} & : & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{121}{5} & \frac{-11}{5} & : & \frac{33}{5} \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\rho(A) = 2$ ଏବଂ $\rho[A : B] = 2$

ତେଣୁ, ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହ ସଙ୍ଗତ ଅଟେ। କିନ୍ତୁ $\rho(A) = \rho[A : B] < n$ (ଅଜ୍ଞାତ ସଂଖ୍ୟା)

ତେଣୁ, ଏହାର ସମାଧାନ ଗୁଡିକ ଅସୀମ ଅଟେ।

$$\therefore \quad x + \frac{3}{5}y + \frac{7}{5}z = \frac{4}{5} \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{121}{5}y - \frac{11}{5}z = \frac{33}{5} \quad \Rightarrow \quad 11y - z = 3$$

ମନେକର $z = k$ ତେବେ $11y = 3 + k$

$$y = \frac{3}{11} + \frac{k}{11}$$

y ଏବଂ z ର ମୂଲ୍ୟକୁ (1) ରେ ରଖିଲେ

$$x + \frac{3}{5}\left(\frac{3}{11} + \frac{k}{11}\right) + \frac{7}{5}k = \frac{4}{5}$$

$$x + \frac{9}{55} + \frac{3k}{55} + \frac{7k}{5} = \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{4}{5} - \frac{9}{55} - \left(\frac{3k}{55} + \frac{7k}{5}\right)$$

$$x = \frac{7}{11} - \frac{16}{11}k$$

ଉଦାହରଣ 3.44. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସଂଗତ ହେବାପାଇଁ ପରୀକ୍ଷା କର।

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$$
$$6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 10$$
$$11x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 14x_4 = 15$$
$$16x_1 + 17x_2 + 18x_3 + 19x_4 = 20$$
$$21x_1 + 22x_2 + 23x_3 + 24x_4 = 25$$

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପ ହେଉଛି,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 16 & 17 & 18 & 19 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ଅଗମେଣ୍ଟେଡ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ [A : B] ହେବ

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & : & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & : & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & : & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & : & 25 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 6R_1, R_3 \to R_3 - 11R_1, R_4 \to R_4 - 16R_1, R_5 \to R_5 - 21R_1$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & : & -20 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & : & -40 \\ 0 & -15 & -30 & -45 & : & -60 \\ 0 & -20 & -40 & -60 & : & -80 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad C \sim (-1)^{\pm} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 5 \\ 0 & 5 & 10 & 15 & : & 20 \\ 0 & 10 & 20 & 30 & : & 40 \\ 0 & 15 & 30 & 45 & : & 60 \\ 0 & 20 & 40 & 60 & : & 80 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 2R_2, R_4 \to R_4 - 3R_2, R_5 \to R_5 - 4R_2$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 5 \\ 0 & 5 & 10 & 15 & : & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \qquad \rho(A) = 2$ ଏବଂ $\rho[A : B] = 2$

ତେଣୁ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହ ସଂଗତ ଅଟେ । କିନ୍ତୁ $\rho(A) = \rho[A : B] < n$

ତେଣୁ ଏହାର ସମାଧାନ ଗୁଡ଼ିକ ଅସୀମ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 3.45. k ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟପାଇଁ ଏହି ସମୀକରଣ ସମୂହ

$$x + y + z = 1$$

$$2x + y + 4z = k$$

$4x + y + 10z = k^2$ ର ଗୋଟିକ ସମାଧାନ ଅଛି।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପ ହେଉଛି

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ଅଗମେଣ୍ଟେଡେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 2 & 1 & 4 & : & k \\ 4 & 1 & 10 & : & k^2 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 4R_1$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & -1 & 2 & : & k-2 \\ 0 & -3 & 6 & : & k^2-4 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 3R_2$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & -1 & 2 & : & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & : & k^2-3k+2 \end{bmatrix}$$

ଯଦି ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ ଅଛି, ତେବେ

$$\rho(A) = \rho(A : B)$$

ଏବଂ $\rho[A : B] = 2$ ଯଦି $k^2 - 3k + 2 = 0$

$$k^2 - 2k - k + 2 = 0$$

$$(k - 2)(k - 1) = 0$$

$$k = 2, k = 1.$$

ପରିସ୍ଥିତି I: ଯେତେବେଳେ $k = 1$, ଆମର ଅଛି

$$x + y + z = 1 \quad ...(1)$$

$$-y + 2z = 1 - 2 = -1 \quad ...(2)$$

ମନେକର $z = \lambda$

$z = \lambda$ ର ମୂଲ୍ୟ ସମୀକରଣ (2) ରେ ରଖିଲେ,

$$y = 2\lambda + 1$$

(1) ରେ y ଏବଂ z ର ମୂଲ୍ୟ ରଖିଲେ,

$$x + (2\lambda + 1) + \lambda = 1$$

$$x + 3\lambda + 1 = 1$$
$$x = -3\lambda$$

ପରିସ୍ଥିତି -2: ଯେତେବେଳେ $k = 2$

$$x + y + z = 1 \qquad ...(3)$$
$$-y + 2z = 2 - 2 = 0 \qquad ...(4)$$

ମନେକର $z = c$

(4) ରେ z ର ମୂଲ୍ୟ ରଖିଲେ $-y + 2c = 0$

$$y = 2c$$

(3) ରେ y ଏବଂ z ର ମୂଲ୍ୟ ରଖିଲେ

$$x + 2c + c = 1$$
$$x = 1 - 3c$$

ଉଦାହରଣ 3.46. λ ଏବଂ μ ର ମୂଲ୍ୟ ଅନୁସନ୍ଧାନ କର ଯେପରିକି ସମୀକରଣ ର

$$2x + 3y + 5z = 9$$
$$7x + 3y - 2z = 8$$
$$2x + 3y + \lambda z = \mu$$

i. ସମାଧାନ ନାହିଁ

ii. ଗୋଟିଏ ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି

iii.ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ସମାଧାନ ଅଛି |

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପ ହେଉଛି

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ଅଗମେଣ୍ଟେଡ୍ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & : & 9 \\ 7 & 3 & -2 & : & 8 \\ 2 & 3 & \lambda & : & \mu \end{bmatrix}$$ ଅଟେ ।

$R_2 \to R_2 - \frac{7}{2}R_1$

$R_3 \to R_3 - R_1$

$$C \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & : & 9 \\ 0 & \frac{-15}{2} & \frac{-39}{2} & : & \frac{-47}{2} \\ 0 & 0 & \lambda - 5 & : & \mu - 9 \end{bmatrix}$$

i. **ସମାଧାନ ନାହିଁ:** $\rho(A) \neq \rho(A : B)$

$\lambda - 5 = 0$ ଏବଂ $\mu - 9 \neq 0$

$\lambda = 5$ ଏବଂ $\mu \neq 9$

ii. **ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ:** $\rho(A) = \rho(A : B) = n$

$\lambda - 5 \neq 0$

$\lambda = 5$ ଏବଂ μ ହେଉଛି ସ୍ୱେଚ୍ଛ

iii. **ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ:** $\rho(A) = \rho(A : B) < n$

$\lambda - 5 = 0$, $\mu - 9 = 0$

$\lambda = 5$, $\mu = 9$

ଉଦାହରଣ 3.47. λ ଏବଂ μ ର ସେହି ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯାହାପାଇଁ ନିମ୍ନୋକ୍ତ ସମୀକରଣ

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + \lambda z = \mu$$

i. ସମାଧାନ ନାହିଁ

ii. ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ

iii. ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟାକ ସମାଧାନ

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପ ହେଉଛି

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ଅଗମେଣ୍ଟେଡ୍ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 1 & 2 & 3 & : & 10 \\ 1 & 2 & \lambda & : & \mu \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & 2 & : & 4 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 & : & \mu - 6 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & 2 & : & 4 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 & : & \mu - 10 \end{bmatrix}$$

i. ସମାଧାନ ନାହିଁ: $\rho(A) \neq \rho(A : B)$

$$\lambda - 3 = 0 \text{ ଏବଂ } \mu - 10 \neq 0$$

$$\lambda = 3 \text{ ଏବଂ } \mu \neq 10$$

ii. ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ: r(A) = r(A : B) = n

$$\lambda - 3 \neq 0 \text{ ଏବଂ } \mu$$

$$\lambda \neq 3 \text{ ଏବଂ } \mu \text{ ସ୍ୱେଚ୍ଛ ଅଟେ।}$$

iii. ଅସୀମ ସମାଧାନ: r(A) = r(A : B) < n

$$\lambda - 3 = 0 \text{ ଏବଂ } \mu - 10 = 0$$

$$\lambda = 3 \text{ ଏବଂ } \mu = 10$$

ଉଦାହରଣ 3.48 ଦର୍ଶାଅ ଯେ ସମୀକରଣ ର ସମାଧାନ ନାହିଁ

$$-2x + y + z = a$$

$$x - 2y + z = b$$

$$x + y - 2z = c$$

ଯେପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ a + b + c = 0 କେଉଁ ପରିସ୍ଥିତିରେ ତାହାର ଅସୀମ ଅନେକ ସମାଧାନ ଅଛି। ସେହି ସମାଧାନ ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେତେବେଳେ a = 1, b = 1 ଏବଂ c = –2 ହେବ।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପ ହେଉଛି

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ଅଗମେଣ୍ଟେଡ୍ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & : & a \\ 1 & -2 & 1 & : & b \\ 1 & 1 & -2 & : & c \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$
$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & b \\ -2 & 1 & 1 & : & a \\ 1 & 1 & -2 & : & c \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + 2R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$
$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & b \\ 0 & -3 & 3 & : & a+b \\ 0 & 3 & -3 & : & c-b \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2$
$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & b \\ 0 & -3 & 3 & : & a+2b \\ 0 & 0 & 0 & : & a+b+c \end{bmatrix}$$

ପରିସ୍ଥିତି 1: ଯଦି $a+b+c \neq 0$

$\Rightarrow \quad \rho(A) = 2$ ଏବଂ $\rho(A:B) = 3$

$\therefore \quad \rho(A) \neq \rho(A:B)$

ତେଣୁ ଗୋଷ୍ଠୀ ଅସଂଗତ, ଏହାର ସମାଧାନ ନାହିଁ।

ପରିସ୍ଥିତି 2: ଯଦି $a+b+c=0$ ହୁଏ

$\Rightarrow \quad \rho(A) = 2$ ଏବଂ $\rho(A:B) = 2$

$\therefore \quad \rho(A) = \rho(A:B)$

ତେଣୁ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ସଂଗତ ଅଟେ କିନ୍ତୁ $\rho(A) = \rho(A:B) < n$

ତେଣୁ ଏହାର ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ସମାଧାନ ଅଛି।

ପରିସ୍ଥିତି 3 : $a=1, b=1, c=-2$ ରଖିଲେ $x-2y+z=1, y=k$ ରଖିଲେ

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & 1 \\ 0 & -3 & 3 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$x - 2y + z = 1 \qquad \text{...(1)}$$

$$-3y + 3z = 3 \quad \Rightarrow \quad -y + z = 1 \qquad \text{...(2)}$$

(1)ରେ y ଏବଂ z ର ମାନ ରଖିଲେ

$x = k-1, \quad y = k-1, \quad z = k$

3.8.1.2 ସମଘାତୀ ସମୀକରଣ

ଏକ ସମଘାତୀ ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ $AX = 0$ ପାଇଁ ,

i. $X = 0$ ସବୁବେଳେ ସମାଧାନ ଅଟେ। ଏହି ସମାଧାନ ଯାହା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ମୂଲ୍ୟ ଶୂନ୍ୟ ହୁଏ। ତାହାକୁ ଶୂନ୍ୟ ସମାଧାନ କିମ୍ବା ମାମୁଲି ସମାଧାନ କୁହାଯାଏ। ତେଣୁ ସହଜାତୀୟ ସମୀକରଣ ସବୁବେଳେ ସଂଗତ ଅଟେ। ଏକ ରୈଖିକ ସମଘାତୀ ସମୀକରଣ ସମୂହର ମାମୁଲି ସମାଧନ କିମ୍ବା ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ସମାଧାନ ଅଛି।

ii. ଯଦି $\rho(A) =$ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ ସମୀକରଣ ସମୂହର କେବଳ ମାମୁଲି ସମାଧାନ ଅଛି।

iii. ଯଦି $\rho(A) <$ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ ତେବେ ସମୀକରଣ ସମୂହର ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ଅତୁଛ ସମାଧାନ ଅ ଛି।

ସଂକ୍ଷେପରେ:

ଏକ ରୈଖିକ ସମଘାତୀ ସମୀକରଣ ସମୂହର
$AX = 0$

↓

ସର୍ବଦା ସମାଧାନ ଅଛି

$\rho(A) = n$ → ଅନନ୍ୟ କିମ୍ବା ମାମୁଲି ସମାଧାନ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ଶୁନ୍ୟ ସହ ସମାନ ହୁଏ

$\rho(A) < n$ → ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ଅତୁଚ୍ଛ ସମାଧାନ ଅଛି

ଉଦାହରଣ 3.49. b ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି ସମଘାତୀ ସମୀକରଣ ସମୂହର

$$2x + y + 2z = 0,$$
$$x + y - 3z = 0$$
$$4x + 3y + bz = 0$$

i. ମାମୁଲି ସମାଧାନ ଅଛି ।

ii. ଅତୁଚ୍ଛ ସମାଧାନ ଅଛି । ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି ଅତୁଚ୍ଛ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (i) ମାମୁଲି ସମାଧାନ ପାଇଁ:

ଆମେ ଜାଣୁଯେ, x = 0, y = 0 z = 0] ତେଣୁ b ଯେ କୌଣସି ମୂଲ୍ୟ ହୋଇପାରିବ ।

ii. ଅତୁଚ୍ଛ ସମାଧାନ ପାଇଁ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପ ହେଉଛି

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ଅଗ୍‌ମେଣ୍ଟେଡେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : & 0 \\ 1 & 1 & -3 & : & 0 \\ 4 & 3 & b & : & 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$
$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & : & 0 \\ 2 & 1 & 2 & : & 0 \\ 4 & 3 & b & : & 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 4R_1$
$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & : & 0 \\ 0 & -1 & 8 & : & 0 \\ 0 & -1 & b+12 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$ $$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & : & 0 \\ 0 & -1 & 8 & : & 0 \\ 0 & 0 & b+4 & : & 0 \end{bmatrix}$$

ଅତୁଚ୍ଛ ସମାଧାନ ପାଇଁ $\rho(A) = \rho(A : B) < n, b + 4 = 0, b = -4$

ଉଦାହରଣ 3.50. k ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି ସମୀକରଣ ସମୂହ $\begin{bmatrix} 1 & k & 3 \\ 4 & 3 & k \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ର ଅତୁଚ୍ଛ ସମାଧାନ ଅଛି ।

$$x + ky + 3z = 0,$$
$$4x + 3y + kz = 0,$$
$$2x + y + 2z = 0$$

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପ ହେଉଛି।

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 3 \\ 4 & 3 & k \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = 0$$

ଅଗ୍‌ମେଣ୍ଟେଡେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ [A : B] ଅଟେ:

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} 1 & k & 3 & : & 0 \\ 4 & 3 & k & : & 0 \\ 2 & 1 & 2 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_3$ $$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : & 0 \\ 4 & 3 & k & : & 0 \\ 1 & k & 3 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_1$ $$C \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & : & 0 \\ 0 & k-\frac{1}{2} & 2 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - \left(k-\frac{1}{2}\right)R_2$ $$C \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & : & 0 \\ 0 & 0 & 2-\left(k-\frac{1}{2}\right)(k-4) & : & 0 \end{bmatrix}$$

ଅତୁଚ୍ଛ ସମାଧାନ ପାଇଁ: $\rho[A] = \rho[A : B] < n$

$$2 - \left(k-\frac{1}{2}\right)(k-4) = 0$$

$$2 - k^2 + 4k + \frac{k}{2} - 2 = 0$$

$$-k^2 + \frac{9}{2}k = 0$$

$$k\left(-k + \frac{9}{2}\right) = 0$$

$$k = 0, k = \frac{9}{2}.$$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା ୩.୭

ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସଂଗତି ଯାଂଚ କର । ଆଉ ମଧ୍ୟ ସମାଧାନ ସେଟ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

1. $x + 2y - z = 3$
   $3x - y + 2z = 1$
   $2x - 2y + 3z = 2$
   $x - y + z = -1$

2. $x + 3y - z = 4$
   $2x + y + z = 7$
   $2x - 4y + 4z = 6$
   $3x + 4y = 1$

3. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$
   $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$
   $4x_1 - 3x_2 + x_3 = 9$

4. $x - 4y - 3z = -16$
   $2x + 7y + 12z = 48$
   $4x - y + 6z = 16$
   $5x - 5y + 3z = 0$

5. ସମୀକରଣର ସଂଗତି ଆଲୋଚନା କର

$$x + 2y + 3z + 4t = 0$$
$$2x + 3y + 4z - 1 = 0$$
$$3x + 4y + t = 2$$
$$4x + z + 2t = 3$$

   ଯଦି ସଂଗତ ହୁଏ, ସମାଧାନ ସେଟ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. λ କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ସମୀକରଣ ଗୁଡିକ

$$3x - y + \lambda z = 0$$
$$2x + y + z = 2$$
$$x + 2y - \lambda z = -1$$

   ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ପାଇବାରେ ଅସଫଳ ହୁଏ । λର ଏହି ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକର କୌଣସି ସମାଧାନ ହେବକି?

7. ରାଙ୍କର ପରୀକ୍ଷା ବ୍ୟବହାର କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ଅସଙ୍ଗତ ଅଟେ ।

$$2x - y + z = 4$$
$$3x - y + z = 6$$
$$4x - y + 2z = 7$$
$$-x + y - z = 9$$

8. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକ ସଂଗତ ଏବଂ ତାହାକୁ ସମାଧାନ କର ।

$$x + 2y - 5z = -9$$
$$3x - y + 2z = 5$$
$$2x + 3y - z = 3$$
$$4x - 5y + z = -3$$

9. ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ କର ।

$$\lambda x + 2y - 2z = 1$$
$$4x + 2\lambda y - z = 2$$
$$6x + 6y + \lambda z = 3$$

ବିଶେଷ ଭାବରେ ପରିସ୍ଥିତିକୁ ବିଚାର କର ଯେତେବେଳେ $\lambda = 2$

10. a ଏବଂ b ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ସମୀକରଣ

$$x + y + 5z = 0$$
$$x + 2y + 3az = b$$
$$x + 3y + az = 1$$ ର

i. ସମାଧାନ ନାହିଁ ii. ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ iii. ଅସୀମ ଅନେକ ସମାଧାନ ଅଛି

ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ କର ।

11. $x - y + z = 0$
$-3x + y - 4z = 0$
$7x - 3y - 9z = 0$
$4x - 2y + 5z = 0$

12. $x + 3y - 2z = 0$
$2x - y + 4z = 0$
$x - 11y + 14z = 0$

13. $2w + 3x - y - z = 0$
$4w - 6x - 2y + 2z = 0$
$-6w + 12x + 3y - 4z = 0$
$8w - 24x - 4y + 8z = 0$

14. $3x + 4y - z - 6w = 0$
$2x + 3y + 2z - 3w = 0$
$2x + y - 14z - 9w = 0$
$x + 3y + 13z + 3w = 0$

15. k ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣର ସମୂହର ଗୋଟିଏ ଅତୁଚ୍ଛ ସମାଧାନ ଅଛି ।

$(3k-8)x+3y+3z=0$

$3x+(3k-8)y-3z=0$

$3x+3y+(3k-8)z=0$

16. ଦର୍ଶାଅ ଯେ λ ର ଏକ ମାତ୍ର ବାସ୍ତବ ମୂଲ୍ୟ ଯାହାପାଇଁ ସମୀକରଣ

$x+2y+3z=\lambda x$

$3x+y+2z=\lambda y$

$2x+3y+z=\lambda z$ ର ଅଣଶୂନ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି ।

ଉତ୍ତରମାଳା

1. $-1, 4, 4$
2. ସଙ୍ଗତ ନୁହେଁ
3. $-1, 4, 4$
4. $\frac{17}{5}-\frac{4}{5}k, \frac{1}{5}+\frac{3}{5}k, k$
5. ସଙ୍ଗତ $\left(\frac{9}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11}\right)$
6. ଅସଙ୍ଗତ] $\lambda=-\frac{7}{2}$
7. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$
8. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$
9. $x=\frac{1}{2}-k, y=k, z=0$
10. i. $a=1, b\neq\frac{1}{2}$ ii. $a\neq 1, b\in R$ iii. $a=1, b=\frac{1}{2}$
11. $x=y=z=0$
12. $x=\frac{-10}{7}k, y=\frac{8}{7}k, z=k$
13. $x=-\frac{1}{3}k_1, y=k_2, z=k_1, w=-\frac{1}{2}k_2$
14. $x=11k_1+6k_2, y=-8k_1-3k_2, z=k_1, w=k_2$
15. ଅତୁଚ୍ଛ ସମାଧାନ ଯଦି $k=\frac{11}{3}$ or $k=\frac{2}{3}$

3.9 ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ଦ୍ଵାରା ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ

3.9.1 କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ(Cramer's Rule)

ଏହି ପଦ୍ଧତି ସ୍ୱିସ ଗଣିତଜ୍ଞ ଗାବ୍ରିଏଲ କ୍ରାମରଙ୍କ ଦ୍ଵାରା ଉଦ୍ଭାବିତ ହୋଇଛି । ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ସମୂହକୁ ବିଚାର କରି ଆମେ ଏହି ପଦ୍ଧତିକୁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିବା ।

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$

$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$

$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$

ମନେକର $$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ତେବେ $$xD = \begin{vmatrix} xa_1 & b_1 & c_1 \\ xa_2 & b_2 & c_2 \\ xa_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$C_1 \to C_1 + yC_2 + zC_3$ ପ୍ରୟୋଗ କରି, ଆମେ ପାଇବା

$$xD = \begin{vmatrix} xa_1 + yb_1 + zc_1 & b_1 & c_1 \\ xa_2 + yb_2 + zc_2 & b_2 & c_2 \\ xa_3 + yb_3 + zc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$xD = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 = D$$ (କୁହାଯାଉ)

ତେବେ $$x = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

ସେହିପରି] $y = \frac{D_2}{D}$ ଏବଂ $z = \frac{D_3}{D}$

ଯେଉଁଠି $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ଏବଂ $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

ତେଣୁ $x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D}, z = \frac{D_3}{D}$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ ।

କିଛି ସମାଧାନ ହୋଇଥିବା ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 3.51. କ୍ରାମର ଙ୍କ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ସମୂହର ସମାଧାନ କର ।

$$x + y + z = 1,\ 3x + 5y + 6z = 4,\ 9x + 2y - 36z = 17$$

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $x + y + z = 1$

$$3x + 5y + 6z = 4$$

$$9x + 2y - 36z =$$

ଏଠାରେ $$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 9 & 2 & -36 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-180 - 12) - 1(-108 - 54) + 1(6 - 45)$$

$$= -192 + 162 - 39 = -69 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 17 & 2 & -36 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-180 - 12) - 1(-144 - 102) + 1(8 - 85)$$

$$= -192 + 246 - 77 = -23$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 9 & 17 & -36 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-144 - 102) - 1(-108 - 54) + 1(51 - 36)$$

$$= -246 + 162 + 15 = -69$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 9 & 2 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= 1(85 - 8) - 1(51 - 36) + 1(6 - 45)$$

$$= 77 - 15 - 39 = 23$$

କ୍ରାମର ଙ୍କ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଇବା

$$x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D}, z = \frac{D_3}{D}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-23}{-69} = \frac{1}{3}, y = \frac{-69}{-69} = 1, z = \frac{23}{-69} = -\frac{1}{3}$$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ 3.52. କ୍ରାମର ଙ୍କ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହକୁ ସମାଧାନ କର।

$$3x + y + 2z = 3, 2x - 3y - z = -3, x + 2y + z = 4$$

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ $$3x + y + 2z = 3$$

$$2x - 3y - z = -3$$

$$x + 2y + z = 4$$

ଏଠାରେ $$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 3(-3 + 2) - 1(2 + 1) + 2(4 + 3)$

$= 3(-1) - 1(3) + 2(7)$

$= -3 - 3 + 14 = 8 \neq 0$

$\therefore$ $$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 3(-3 + 2) - 1(-3 + 4) + 2(-6 + 12)$

$= 3(-1) - 1(1) + 2(6)$

$= -3 - 1 + 12 = 8$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 3(-3 + 4) - 3(2 + 1) + 2(8 + 3)$

$= 3(1) - 3(3) + 2(11)$

$= 3 - 9 + 22 = 16$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 3(-12 + 6) - 1(8 + 3) + 3(4 + 3)$

$= 3(-6) - (1)(11) + 3(7)$

$= -18 - 11 + 21 = -8$

ତେଣୁ

$\therefore \quad x = \frac{D_1}{D} = \frac{8}{8} = 1, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{16}{8} = 2, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{-8}{8} = -1$ (ଉତ୍ତର)

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା ୩.୮

କ୍ରାମର ଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର ।

1. $x + 3y + 6z = 2, 3x - y + 4z = 9, x - 4y + 2z = 7$

2. $x + y + z = -1, x + 2y + 4z = -5, 6x + 4y + 2z = 0$

3. $x - 4y - z = 11, 2x - 5y + 2z = 39, -3x + 2y + z = 1$

4. $x + 2y + 3z = 6, 2x + 4y + z = 7, 3x + 2y + 9z = 14$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. $x = 2, y = -1, z = 1/2$
2. $x = 1, y = -1, z = -1$
3. $x = -1, y = -5, z = 8$
4. $x = y = z = 1$

3.9.2 ଗସ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି (ରୈଖିକ ସମୀକରଣର ସମୂହର ସମାଧାନ କରିବାକୁ) ସମୀକରଣ ସମୂହକୁ ବିଚାରକୁ ନିଆଯାଉ ।

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array}\right\} \quad ...(1)$$

ଏହାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପ $AX = B$ ଅଟେ ।

ଯେଉଁଠାରେ $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ ଏବଂ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

ଅଗ୍‌ମେଣ୍ଟେଡେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $[A : B]$ କୁ ବିଚାରକୁ ନିଆଯାଉ ।

$$[A : B] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & : & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & : & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & : & d_3 \end{pmatrix} \quad ...(2)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ସମୀକରଣ (2) ଉପର ତ୍ରିଭୁଜୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସରେ ହ୍ରାସ କରାଯାଇ ପାରେ। ମନେକର $a_1 \neq 0$, ତେବେ

$$R_2 \to R_2 - \frac{a_2}{a_1}R_1, R_3 \to R_3 - \frac{a_3}{a_1}R_1 \quad \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & : & d_1 \\ 0 & b'_2 & c'_2 & : & d'_2 \\ 0 & b'_3 & c'_3 & : & d'_3 \end{pmatrix} \quad ...(3)$$

ଏଠାରେ a_1 ପ୍ରଥମ ପିଭଟ୍ କୁହାଯାଏ।
ବର୍ତ୍ତମାନ, b'_2 କୁ ପିଭଟ୍ ଭାବରେ ନିଅ ତେବେ $(b'_2 \neq 0)$,

$$R_3 \to R_3 - \frac{b'_3}{b'_2}R_2 \quad \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & : & d_1 \\ 0 & b'_2 & c'_2 & : & d'_2 \\ 0 & 0 & c''_3 & : & d''_3 \end{pmatrix} \quad ...(4)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ସମୀକରଣ (4)ରୁ $c''_3 \neq 0$ ସମୀକରଣ (4) କୁ ପିଭଟ୍ ଭାବରେ ନିଅ ଦତ୍ତ ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମତୁଲ ହେଉଛି।।

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$b'_2y + c'_2z = d'_2$$

$$c''_3z = d''_3$$

କିମ୍ବା $$z = \frac{d''_3}{c''_3}$$

ପଛ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ଦ୍ୱାରା $$y = \frac{(c''_3 d'_2 - c'_2 d''_3)}{b'_2 c''_3}$$

$$x = \frac{1}{a_1 b'_2 c''_3}(d_1b'_2c''_3 + b_1c'_2d''_3 - b'_2c_1d''_3 - b_1c''_3d'_2)$$

ମନ୍ତବ୍ୟ:

1- ଏହି ପଦ୍ଧତି ଅସଫଳ ହୁଏ ଯଦି ପିଭଟ୍ a_1, b'_2, c''_3 ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ଶୂନ୍ୟ ହୁଏ। ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ ଧାଡ଼ି ଗୁଡ଼ିକୁ ଅଦଳ ବଦଳ କରି, ଆମେ ଅଣଶୂନ୍ୟ ପିଭଟ୍ ପାଇପାରିବ।

2- ଆଂଶିକ ପିଭଟିଙ୍ଗ: ସମୀକରଣ (2) ର ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭରୁ ସର୍ବ ବୃହତ ପରମ ମୂଲ୍ୟ ସହିତ ଉପାଦାନ ଚୟନ କର। ଏହାକୁ ପିଭଟ୍ କୁହାଯାଏ। ତାପରେ ଦ୍ୱିତୀୟ ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଅର୍ଥାତ ସମୀକରଣ (3) ର ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭରୁ ଭାବରେ ସର୍ବ ବୃହତ ପରମ ମୂଲ୍ୟ ସହିତ ଉପାଦାନକୁ ପୁଣି ଥରେ ଚୟନ କର। ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟ ଜାରି ରଖ। ଏହି ପଦ୍ଧତିକୁ ଆଂଶିକ ପିଭଟିଙ୍ଗ କୁହାଯାଏ।

3- ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ ପିଭଟିଙ୍ଗ: ଯଦି ଜଣେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ୍ରମରେ x, y, z ର ଅପସାରଣ ପାଇଁ ଆଗ୍ରହୀ ନୁହଁନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ସଂଖ୍ୟକ ଭାବରେ ସଂମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଗୁଣାଙ୍କ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସର୍ବ ବୃହତ୍ତମ ସହଗ ବାଛନ୍ତୁ । ଏହା ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକର ଅଦଳ ବଦଳ ଏବଂ ଚଳରାଶିର ଅବସ୍ଥାନର ମଧ୍ୟ ଅଦଳ ବଦଳ ଆବଶ୍ୟକ କରେ।|

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 3.53. ଗସ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି ସମୀକରଣ ସମୂହ $3x + y - z = 3$, $2x - 8y + z = -5$, $x - 2y + 9z = 8$ ସମାଧାନ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ପଦ୍ଧତି ସହିତ ସମତୁଲ୍ୟ

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -8 & 1 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ଅଗ୍‌ମେଣ୍ଟେଡ୍ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ]

$$[A : B] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & : & 3 \\ 2 & -8 & 1 & : & -5 \\ 1 & -2 & 9 & : & 8 \end{pmatrix}$$ ଅଟେ ।

$$R_2 \to R_2 - \frac{2}{3}R_1, R_3 \to R_3 - \frac{1}{3}R_1 \quad \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & : & 3 \\ 0 & -\frac{26}{3} & \frac{5}{3} & : & -7 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{28}{3} & : & 7 \end{pmatrix}$$

ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭରୁ $-\frac{26}{3}$ କୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭରୁ ପିଭଟ ଭାବରେ ଚୟନ କରି,ଆମେ ପାଉ

$$R_3 \to R_3 - \frac{7}{26}R_3 \quad \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & : & 3 \\ 0 & -\frac{26}{3} & \frac{5}{3} & : & -7 \\ 0 & 0 & \frac{2079}{234} & : & \frac{231}{26} \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad 3x + y - z = 3$

$$\frac{-26}{3}y + \frac{5}{3}z = -7$$

$$\frac{2079}{234}z = \frac{231}{26} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{231 \times 234}{26 \times 2079} = 1$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ପଛ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନା ଦ୍ୱାରା, z = 1

$$-26y = -26 \quad \Rightarrow y = 1$$

ଏବଂ $\quad 3x = 3x \quad \Rightarrow x = 1$

$$x = 1, y = 1, z = 1 \quad \text{(ଉତ୍ତର)}$$

ଉଦାହରଣ 3.54. ଗସ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି ସମୀକରଣ ସମୂହକୁ ସମାଧାନ କର ।

$$3.15x - 1.96y + 3.85z = 12.95$$

$$2.13x + 5.12y - 2.89z = -8.61$$

$$5.92x + 3.05y + 2.15z = 6.88$$

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମତୁଲ୍ୟ

$$\begin{pmatrix} 3.15 & -1.96 & 3.85 \\ 2.13 & 5.12 & -2.89 \\ 5.92 & 3.05 & 2.15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.95 \\ -8.61 \\ 6.88 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

$$[A : B] = \begin{pmatrix} 3.15 & -1.96 & 3.85 & : & 12.95 \\ 2.13 & 5.12 & -2.89 & : & -8.61 \\ 5.92 & 3.05 & 2.15 & : & 6.88 \end{pmatrix}$$

3.15 କୁ ପିଭଟ ଭାବରେ ଚୟନ କରି

$$R_2 \to R_2 - \frac{2.13}{3.15}R_1, R_3 \to R_3 - \frac{5.92}{3.15}R_1 \sim \begin{pmatrix} 3.15 & -1.96 & 3.85 & : & 12.95 \\ 0 & 6.4453 & -5.4933 & : & -17.3667 \\ 0 & 6.7335 & -5.0855 & : & -17.4578 \end{pmatrix}$$

6.4453 କୁ ପିଭଟ ଭାବରେ ଚୟନ କରି ପଛ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ଦ୍ୱାରା

$$R_3 \to R_3 - \frac{6.7335}{6.4453}R_2 = \begin{pmatrix} 3.15 & -1.96 & 3.85 & : & 12.95 \\ 0 & 6.4453 & -5.4933 & : & -17.3667 \\ 0 & 0 & 0.6534 & : & 0.6854 \end{pmatrix}$$

ଅର୍ଥାତ୍ $3.15x - 1.96y + 3.85z = 12.95$

$$6.4453y - 5.4933z = -17.3667$$

$$0.6534z = 0.6854$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{0.6854}{0.6534} = 1.04897459$$

ପୁନର୍ବାର ପଛ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ଦ୍ୱାରା $z = 1.04897459$ ରଖିବାରେ

$$y = \frac{5.4933z - 17.3667}{6.4453} = -1.80043875$$

ଏବଂ

$$x = \frac{1.96y - 3.85(1.04897459) + 12.95}{3.15} = 1.70875806$$

ଉଦାହରଣ 3.55. ଗସ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣ ସମୂହକୁ ସମାଧାନ କର

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 7$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -2$$

ସମାଧାନ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

$$[A : B] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & : & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & : & 7 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & : & -2 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - 2R_1, R_4 \to R_4 - R_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & : & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & : & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & : & -4 \end{pmatrix}$$

ଯେହେତୁ ଉପାଦାନ ଦ୍ୱିତୀୟ ଧାଡ଼ିରେ ଅଛି, ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭ ଶୂନ୍ୟ ଅଟେ, ପିଭଟ ଉପାଦାନ 1 ପାଇବା ପାଇଁ ଦ୍ୱିତୀୟ ଏବଂ ତୃତୀୟ ଧାଡ଼ିକୁ ଅଦଳ ବଦଳ କର।

ଅର୍ଥାତ୍

$$R_2 \leftrightarrow R_3, \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & : & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & : & -4 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \to R_4 - R_2, \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & : & -8 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & : & -7 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \to R_4 - \frac{3}{2}R_3 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & : & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & : & 5 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ ...(1)

$x_2 - 3x_3 = 3$ ...(2)

$2x_3 - 3x_4 = -8$ ...(3)

$\frac{5}{2}x_4 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 2$

$$x_3 = \frac{1}{2}(-8 + 3x_4) = \frac{1}{2}(-8 + 6) = -1$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ପଛ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ଦ୍ୱାରା

$$x_2 = 3 + 3x_3 = 3 - 3 = 0$$

$$x_1 = 2 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 - 0 - (-1) - 2 = 1$$

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 2 \quad \text{(ଉତ୍ତର)}$$

ଅନୁଶୀଳନୀ ୩.୯

ଗସ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ କରନ୍ତୁ।

1. $x + 2y + z = 3$
   $2x + 3y + 3z = 10$
   $3x - y + 2z = 13$

2. $2x + 3y - z = 5$
   $4x + 4y - 3z = 3$
   $2x - 3y + 2z = 2$

3. $5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$
   $x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 12$
   $x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = -5$
   $x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = -6$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. $x = 2, y = -1, z = 3$ 2. $x = 1, y = 2, z = 3$ 3. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$

3.9.3 ଗସ-ଜୋର୍ଡାନ ପଦ୍ଧତି (ରୈଖିକ ସହ ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କରିବା ପାଇଁ)

ଏହି ପଦ୍ଧତି ଗସ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତିରେ ଏକ ପରିବର୍ତ୍ତନ ରୂପ ଅଟେ। AX = B ର A ଏକ ଗୁଣାଙ୍କ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣ A ର ଉପର ଏବଂ ତଳରୁପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ଶୂନ୍ୟ କରି Ax=B ର ଏକ ଗୁଣାଙ୍କ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କିମ୍ବା ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁ ହ୍ରାସ କରାଯାଇଛି। ଏଠାରେ ପଛ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନର ସମୟକୁ ସଂଚୟ କରାଯାଇଛି। ଯଦିଓ ଏହା ଅ ତିରିକ୍ତ ଗଣନା ସହିତ ଜଡ଼ିତ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 3.56. ଗସ-ଜୋର୍ଡାନ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର।

$$10x + y + z = 12$$

$$2x + 10y + z = 13$$

$$x + y + 5z = 7$$

ସମାଧାନ:ସମୀକରଣ ସମୂହର ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପ ହେଉଛି:

$$\begin{pmatrix}10 & 1 & 1\\2 & 10 & 1\\1 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\13\\7\end{pmatrix}$$

$$[A:B]=\begin{pmatrix}10 & 1 & 1 & : & 12\\2 & 10 & 1 & : & 13\\1 & 1 & 5 & : & 7\end{pmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - 9R_3$ $$\sim\begin{pmatrix}1 & -8 & -44 & : & -51\\2 & 10 & 1 & : & 13\\1 & 1 & 5 & : & 7\end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$
$R_3 \to R_3 - R_1$ $$\sim\begin{pmatrix}1 & -8 & -44 & : & -51\\0 & 26 & 89 & : & 115\\0 & 9 & 49 & : & 58\end{pmatrix}$$

$R_2 \to 3R_3 - R_2$ $$\sim\begin{pmatrix}1 & -8 & -44 & : & -51\\0 & 1 & 58 & : & 59\\0 & 9 & 49 & : & 58\end{pmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + 8R_2$
$R_2 \to R_2 - 9R_2$ $$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 420 & : & 421\\0 & 1 & 58 & : & 59\\0 & 0 & -473 & : & -473\end{pmatrix}$$

$R_3 \to -\frac{1}{473}R_3$ $$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 420 & : & 421\\0 & 1 & 58 & : & 59\\0 & 0 & 1 & : & 1\end{pmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - 420R_3$
$R_2 \to R_2 - 58R_3$ $$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & : & 1\\0 & 1 & 0 & : & 1\\0 & 0 & 1 & : & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$ ରୂପରେ ହ୍ରାସ କରାଯାଇଛି

ଅର୍ଥାତ୍ $x = 1 = y = z.$ **(ଉତ୍ତର)**

ଉଦାହରଣ 3.57.ଗସ-ଜୋର୍ଡାନ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କରନ୍ତୁ।

$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$, $x_1 + 10x_2 - x_3 = 10$ ଏବଂ $x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 9$

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ହେଉଛି

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & -1 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$[A : B] = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 & : & 12 \\ 1 & 10 & -1 & : & 10 \\ 1 & -2 & 10 & : & 9 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \to R_1 - 9R_2 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & -89 & 10 & : & -78 \\ 1 & 10 & -1 & : & 10 \\ 1 & -2 & 10 & : & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix} \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & -89 & 10 & : & -78 \\ 0 & 99 & -11 & : & 88 \\ 0 & 87 & 0 & : & 87 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \to \dfrac{R_2}{11} \\ R_3 \to \dfrac{R_3}{87} \end{matrix} \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & -89 & 10 & : & -78 \\ 0 & 9 & -1 & : & 8 \\ 0 & 1 & 0 & ; & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - 8R_3 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & -89 & 10 & : & -78 \\ 0 & 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ; & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \to R_1 + 89R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2 \end{matrix} \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -79 & : & -78 \\ 0 & 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \to R_1 + 79R_3 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{matrix} \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ରୂପରେ ହ୍ରାସ କରାଯାଇଛି

$\therefore \quad x_1 = x_2 = x_3 = 1$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ 3.58. ଗସ-ଜୋର୍ଡାନ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହର କରି ସମୀକରଣ ସମୂହକୁ ସମାଧାନ କରନ୍ତୁ।

$$5x - y - 2z = 142$$

$$x - 3y - z = -30$$

$$2x - y - 3z = -5$$

ସମାଧାନ:

ବର୍ତ୍ତମାନ $[A:B] = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 & : & 142 \\ 1 & -3 & -1 & : & -30 \\ 2 & -1 & -3 & : & -5 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & : & -30 \\ 5 & -1 & -2 & : & 142 \\ 2 & -1 & -3 & : & -5 \end{pmatrix}$

$R_2 \to R_2 - 5R_1$
$R_3 \to R_3 - 2R_1 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & : & -30 \\ 0 & 14 & 3 & : & 292 \\ 0 & 5 & -1 & : & 55 \end{pmatrix}$

$R_2 \to \frac{R_2}{14} \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & : & -30 \\ 0 & 1 & \frac{3}{14} & : & \frac{146}{7} \\ 0 & 5 & -1 & : & 55 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + 3R_2$
$R_3 \to R_3 - 5R_2 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{14} & : & \frac{228}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{14} & : & \frac{146}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{29}{14} & : & -\frac{345}{7} \end{pmatrix}$

$R_3 \to \left(-\frac{14}{29}\right)R_3 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{14} & : & \frac{228}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{14} & : & \frac{146}{7} \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{690}{29} \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + \frac{5}{14}R_3$
$R_2 \to R_2 - \frac{3}{14}R_3 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{8337}{203} \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{3199}{203} \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{690}{29} \end{pmatrix}$

$\therefore \quad x = \frac{8337}{203}, y = \frac{3199}{203}, z = \frac{690}{29}.$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ 3.59. ଗସ-ଜୋର୍ଡାନ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହର କରି ସମୀକରଣ ସମୂହକୁ ସମାଧାନ କର।

$$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=0$$

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=0$$

ସମାଧାନ:

$$6x+3y+2z=6$$

$$6x+4y+3z=0$$

$$20x+15y+12z=0$$

$$[A:B]=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & : & 6 \\ 6 & 4 & 3 & : & 0 \\ 20 & 15 & 12 & : & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \to \frac{R_1}{6} \qquad \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & : & 1 \\ 6 & 4 & 3 & : & 0 \\ 20 & 15 & 12 & : & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \to R_2 - 6R_1 \\ R_3 \to R_3 - 20R_1 \end{matrix} \qquad \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & : & 1 \\ 0 & 1 & 1 & : & -6 \\ 0 & 5 & \frac{16}{3} & : & -20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \to R_1 - \frac{1}{2}R_2 \\ R_3 \to R_3 - 5R_2 \end{matrix} \qquad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & : & 4 \\ 0 & 1 & 1 & : & -6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & : & 10 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to 3R_3 \qquad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & : & 4 \\ 0 & 1 & 1 & : & -6 \\ 0 & 0 & 1 & : & 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \to R_1 + \frac{1}{6}R_3 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{matrix} \qquad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 9 \\ 0 & 1 & 0 & : & -36 \\ 0 & 0 & 1 & : & 30 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad x = 9, y = -36, z = 30.$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 3.10

ଗସ-ଜୋର୍ଡାନ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର।

1. $x + y + z + w = 2$
   $2x - y + 2z - w = -5$
   $3x + 2y + 3z + 4w = 7$
   $x - 2y - 3z + 2w = 5$

2. $10x + y + z = 12$
   $2x + 10y + z = 13$
   $x + y + 5z = 7$

3. $3x + 4y + 5z = 18$
   $2x - y + 8z = 13$
   $5x - 2y + 7z = 20$

4. $x + 2y + z - w = -2$
   $2x + 3y - z + 2w = 7$
   $x + y + 3z - 2w = -6$
   $x + y + z + w = 2$

5. $10x + y + z = 18.141$
   $x + 10y + z = 28.140$
   $x + y + 10z = 38.139$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. $x = 0, y = 1, z = -1, w = 2$
2. $x = 1, y = 1, z = 1$
3. $x = 3, y = 1, z = 1$
4. $x = 1, y = 0, z = -1, w = 2$
5. $x = 1.234, y = 2.348, z = 3.455$

3.9.4 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ଗସ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି

ମନେକର ଅର୍ଡ଼ର 3 ର ଏକ ଅଣ ସିଙ୍ଗୁଲାର ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଅଟେ। A ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ହେଉଛି ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'X' ଯାହା ସମୀକରଣ AX=I କୁ ସନ୍ତୁଷ୍ଟ କରେ, ଯେଉଁଠାରେ I ଏକ ତୃତୀୟ ଅର୍ଡ଼ରର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ। ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମକୁ ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'X' ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ।

ମନେକର: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$

ସମୀକରଣ AX =I ହେବ:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ଏହା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ତିନୋଟି ସମୀକରଣ ସହିତ ସମତୁଲ୍ୟ, ଯାହାକି ତିନୋଟି ସମୀକରଣ ସମୂହ ସହିତ ସମତୁଲ୍ୟ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ...(1)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ...(2)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ...(3)$$

(1), (2) ଏବଂ (3) ସମୀକରଣ ସମୂହ, (1) -(3) ଗସ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା ସମାଧାନ କରାଯାଇ ପାରିବ। ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମୀକରଣ ସମୂହ (1), (2) ଏବଂ (3) ର ସମାଧାନ ସେଟ୍ ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ X ଅନୁରୂପ ସ୍ତମ୍ଭ ହେବ। ଯେହେତୁ ସମସ୍ତ ସମୀକରଣ (1), (2) ଏବଂ (3) ର ଗୁଣାଙ୍କ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସମାନ, ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୀକରଣ ସମୂହ ଗଠନ କରି ସବୁ ଏକା ସାଙ୍ଗରେ ସମାଧାନ ହୋଇପାରିବ।

$$[A/I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 3.60. ଗସ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ ଅଗ୍‌ମେଣ୍ଟେଡେ ଗୋଷ୍ଠୀ [A/I] ହେବ

$$[A/I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ଯେହେତୁ ଉପାଦାନ $a_{11} = 0$,ଆମେ ପ୍ରଥମ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ ଧାଡ଼ିକୁ ଅଦଳ ବଦଳ କରିବା, ହ୍ରାସ କରାଯାଇଥିବା ସମୀକରଣ ସମୂହ ହେଉଛି

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3 + (-3)R_1$ $\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$

$R_3 \to R_3 + 7R_2$, ଆମେ ପାଇବା $\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right)$

ତେଣୁ:

∴

$$\begin{aligned} x_{11} + 2x_{21} &= 0 \\ x_{21} + x_{31} &= 1 \\ 3x_{31} &= 7 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x_{31} = \frac{7}{3}, x_{21} = -\frac{4}{3}, x_{11} = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned} x_{12} + 2x_{22} &= 1 \\ x_{22} + x_{32} &= 0 \\ 3x_{32} &= -3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x_{32} = -1, x_{22} = 1, x_{12} = -1$$

$$\begin{aligned} x_{13} + 2x_{23} &= 0 \\ x_{23} + x_{33} &= 0 \\ 3x_{33} &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x_{33} = \frac{1}{3}, x_{23} = -\frac{1}{3}, x_{13} = \frac{2}{3}$$

ତେଣୁ $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ଉଦାହରଣ 3.61. ଗସ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ସମାଧାନ: [A/I]

$$[A/I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 6 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2 + 5R_1, R_3 \to R_3 - \left(\frac{5}{3}\right)R_1$ $\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-5}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$

$R_3 \to R_3 + \left(\frac{1}{3}\right)R_2$ $\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$

ବର୍ତ୍ତମାନ[1] ଏହି ସମୀକରଣ ସମୂହ ତିନୋଟି ସମୀକରଣ ସମୂହ ସହ ସମତୁଲ୍ୟ ଅଟେ।

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

ଏବଂ
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

ଏବଂ
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{r} 3x_{11} - x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{21} = 5 \\ \frac{1}{3}x_{31} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_{31} = 0, x_{21} = 5, x_{11} = 2$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_{12} - x_{22} + x_{32} = 0 \\ x_{22} = 1 \\ \frac{1}{3}x_{32} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{32} = 1, x_{22} = 1, x_{12} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_{13} - x_{23} + x_{33} = 0 \\ x_{23} = 0 \\ \frac{1}{3}x_{33} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_{33} = 3, x_{23} = 0, x_{13} = -1$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1

ଅଭ୍ୟାସ 3.11

1. ଗସ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା ନିମ୍ନଲିଖିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସର ବିଲୋମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

i. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ii. $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ iii. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & -11 \end{pmatrix}$

ଉତ୍ତର

1. i. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ii. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ iii. $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3.9.5 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଗସ-ର୍ଜୋଡାନ ପଦ୍ଧତି

ମନେକର A ଅର୍ଡ଼ର ତିନିର ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ଏବଂ $|A| \neq 0$ ତେବେ A ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ X ଅଟେ । ଯଦି, ସମୀକରଣ AX = I କୁ ସନ୍ତୁଷ୍ଟ କରେ ଯେଉଁଠାରେ I ଏକ ଅର୍ଡ଼ର ତିନିର ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ବର୍ତ୍ତମାନ, ଆମକୁ ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ X ର ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ।

ମନେକର $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$$AX = I$$

ତେବେ $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ଏହି ସମୀକରଣ ତିନୋଟି ସମୀକରଣ ସହିତ ସମତୁଲ୍ୟ, ଯାହାକି ତିନୋଟି ସମୀକରଣ ସମୂହ ସହ ସମତୁଲ୍ୟ। ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମୂହକୁ ଗସ-ର୍ଜୋଡାନ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା ସମାଧାନ କର, ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମୂହର ସମାଧାନ ସେଟ୍ ବିଲୋମ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସ୍ତମ୍ଭ ସହ ଅନୁରୂପ ହେବ। ଆଗ୍‌ମେଣ୍ଟେଡ଼େ ସମୂହ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରି ଆମେ ମଧ୍ୟ ସମସ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହକୁ ଏକାସାଙ୍ଗରେ ସମାଧାନ କରିପାରିବ।

$$[A/I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ସମାଧାନ ହୋଇଥିବା ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ **3.62.** ଗସ-ଜୋର୍ଡାନ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରନ୍ତୁ।

ସମାଧାନ: ଅଗ୍ମେଣ୍ଟେଡେ ସମୂହ [A/I] ହେଉଛି

$$[A/B] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_1 \to \frac{1}{3}R_1 \qquad \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1 \qquad \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 \to (-1)R_2 \qquad \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_1 \to R_1 + R_2$ ଏବଂ $R_3 \to R_3 + R_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to (-3)\, R_3 \qquad \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$R_2 \to R_2 + \frac{4}{3}R_3 \qquad \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

∴ A ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ (ଉତ୍ତର)

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 3.12

.1. ଗସ-ଜୋର୍ଡାନ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହର କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରନ୍ତୁ।

i. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ii. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ iii. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & -11 \end{pmatrix}$

iv. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ v. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. i. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ii. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ iii. $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

iv. $\begin{pmatrix} -4/3 & 2 & 7/3 \\ 5/3 & -2 & -8/3 \\ 7/3 & -3 & -10/3 \end{pmatrix}$ v. $\begin{pmatrix} 8/3 & -1 & 2/3 \\ -4/3 & 1 & -1/3 \\ 7/3 & -1 & 1/3 \end{pmatrix}$

ଆକର୍ଷଣୀୟ ତଥ୍ୟ

- ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମତ୍ସ୍ୟର ହାରାହାରି କ୍ୟାଲୋରୀ ମୂଲ୍ୟନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଜଙ୍ଗଲର ସମୃଦ୍ଧି ଏବଂ ଏହାର ପ୍ରକାର ଇତ୍ୟାଦି ପରିବେଶ ବିଜ୍ଞାନର ପରିସରରେ ଏହାର ଅନନ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ ଅଛି। ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୁପ, ଯଦି ଏକ ଜଙ୍ଗଲରେ 5ଟି ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ଗଛ ଥାଏ, ତେବେ ଆମେ ସେମାନଙ୍କ ବୟସ ମାପିବା ପାଇଁ ଏକ ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସୃଷ୍ଟି କରି ପାରିବା। ସେହିପରି ଭାବରେ ଆମେ ସେମାନଙ୍କ ଖାଦ୍ୟ ଉପରେ ଆଧାର କରି ସାମୁଦ୍ରିକ ଜୀବନର କୋର୍ବୋହାଇଡ୍ରେଟ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ଏକ ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସୃଷ୍ଟି କରି ପାରିବା। ଏବଂ ଏହି ପ୍ରକାରର ଅନେକ ଉଦାହରଣ ଅଛି।
- ବାସ୍ତବ ଦୁନିଆରେ, ଆମେ ଟ୍ରାଫିକ୍ ନିୟନ୍ତ୍ରଣ ପରିଚାଳନାରେ ଗସ-ଜୋର୍ଡାନ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି ଟ୍ରାଫିକ୍ ଜାମ୍ ସମସ୍ୟାର ମୁକାବିଲା କରିବା ପାଇଁ ନ୍ୟୁଟ୍ରୋସ୍କୋପିକ ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ଗଠନ କରି ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ବିଲୋମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର କୌଶଳ ସହିତ ଜଡିତ ହୋଇପାରିବ। (ଯାହା ଅବାସ୍ତବ ତଥ୍ୟ ସେଟ୍ ଉପରେ ଘୂରି ବୁଲୁଛି ଏବଂ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଏବଂ/କିମ୍ବା ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୂଚନା ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କରେ) ଏବଂ MATLAB ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ପ୍ରୟୋଗ କରିବା।
- **ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ**
- ଅଜ୍ଞାତ ପରିମାଣର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା, ଏହା ବୟସ, ମୂଲ୍ୟ କିମ୍ବା ଅନ୍ୟ କୌଣସି ଜିନିଷ ହେଉ।
- ବିମାନ ବନ୍ଦରରେ ଯେଉଁଠାରେ ବିମାନ, ଯାତ୍ରୀ ଇତ୍ୟାଦି ବିଷୟ ଗଣନା ଏବଂ ସୂଚନା ଏନକୋଡ୍ କରିବା ପାଇଁ ହାଇ-ଏଣ୍ଡ କମ୍ପ୍ୟୁଟର ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ।
- ସର୍କିଟ ବେଶ୍ଳେଷଣରେ ମେସ କନେକ୍ଟଡ୍ ପ୍ରୋସେସର ଉପରେ ଗସ-ଜୋର୍ଡାନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ।
- ସିଗ୍ନେଲିଙ୍ଗ ଆଲଗୋରିଦମ୍‌ରେ ଏହା ବ୍ୟବହାର ହୁଏ।
- ଗସ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି ଫିଙ୍ଗର ପ୍ରିଣ୍ଟ ପ୍ରତିବିମ୍ବ ବୃଦ୍ଧିରେ ଉପଯୋଗୀ,

ଭିଡିଓ ସନ୍ଦର୍ଭ (ଉତ୍ସ: NPTEL)

ଗସ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି

ଗସ୍-ଜୋର୍ଡାନ୍ ପଦ୍ଧତି

ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ-ଗସ ଅପସାରଣ

ସମାହିତ କଠିନ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

ଉଦାହରଣ1. k ର ମୂଲ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହା ପାଇଁ ସମୀକରଣ ସମୁହ

$$(k+1)x + 8y = 4k$$

$$kx + (k+3)y = 3k - 1$$

ର ଅସୀମ ଅନେକ ସମାଧାନ ଅଛି।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ ହେଉଛି

$$(k + 1)x + 8y = 4k$$

$$kx + (k + 3)y = 3k - 1$$

ଏହାକୁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ଲେଖାଯାଇ ପାରିବ AX = B

ଯେଉଁଠି $A \sim \begin{bmatrix} k+1 & 8 \\ k & k+3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 4k \\ 3k-1 \end{bmatrix}$

ବର୍ତ୍ତମାନ $[A : B] \sim \begin{bmatrix} k+1 & 8 & : & 4k \\ k & k+3 & : & 3k-1 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 - \dfrac{k}{k+1} R_1$ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ

$$[A : B] \sim \begin{bmatrix} k+1 & 8 & : & 4k \\ 0 & (k+3) - \dfrac{8k}{k+1} & : & (3k-1) - \dfrac{4k^2}{k+1} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} k+1 & 8 & : & 4k \\ 0 & \dfrac{k^2 - 4k + 3}{k+1} & : & \dfrac{-k^2 + 2k - 1}{k+1} \end{bmatrix}$$

ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ଅସୀମ ଅନେକ ସମାଧାନ ଅଛି

$\therefore \qquad \rho(A) = \rho(A : B) < n \ (= 2)$

ଏହା ପାଇଁ $\dfrac{k^2 - 4k + 3}{k+1} = 0$ ...(1)

ଏବଂ $\dfrac{-k^2 + 2k - 1}{k+1} = 0$ ...(2)

(1)ରୁ]

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$(k - 3)(k - 1) = 0$$

$$k = 3, 1$$

(2) ରୁ]

$$-k^2 + 2k - 1 = 0$$

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$(k - 1)^2 = 0$$

$$k = 1$$

$\therefore$ k = 1 କେବଳ ଗୋଟିଏ ସମାଧାନ ଅଟେ ଯେଉଥିପାଇଁ ସମୀକରଣସମୂହର ଅସୀମ ଅନେକ ସମାଧାନ ଛି।

ଉଦାହରଣ 2. ପ୍ରମାଣ କରଯେ,ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ $\begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ a\alpha+b & b\alpha+c & 0 \end{vmatrix} = 0$ ଯଦି a, b, c G.P ରେ ରୁହେ.

ସମାଧାନ: ମନେକର

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ a\alpha+b & b\alpha+c & 0 \end{vmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - (\alpha R_1 + R_2)$ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ 0 & 0 & -a\alpha^2-2b\alpha-c \end{vmatrix}$$

R_3 ସହିତ ବିସ୍ତାର କରି ଆମେ ପାଉ

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} b & a\alpha+b \\ c & b\alpha+c \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} a & a\alpha+b \\ b & b\alpha+c \end{vmatrix} - (a\alpha^2+2b\alpha+c)\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$

$$= -(a\alpha^2+2b\alpha+c)(ac-b^2)$$

$$= (b^2-ac)(a\alpha^2+2b\alpha+c)$$

ତେଣୁ $\Delta = 0$

$b^2 - ac = 0$ କିମ୍ବା $a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$

$\therefore$ କିନ୍ତୁ ଦିଆଯାଇଅଛି ଯେ,ଯଦି $b^2 = ac = 0$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

$\therefore$ ଅର୍ଥାତ୍ a, b, c G.P (ଗୁଣତ୍ତର ଶ୍ରେଣୀରେ) ଅଛନ୍ତି । ତେଣୁ $\Delta = 0$.

ଉଦାହରଣ 3. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$; $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 + cA + dI)$ ଯେଉଁଠାରେ $c, d \in R$, ତେବେ (c, d) ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଆମର ଅଛି $|A| = 1(4+2) - 0 + 0 = 6 \neq 0$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & 14 \end{bmatrix}$

ଆଉମଧ୍ୟ $$cA = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & c \\ 0 & -2c & 4c \end{bmatrix}$$

ଏବଂ $$dI = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

ଦତ୍ତ ଅଛି $$A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 + cA + dI)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & c \\ 0 & -2c & 4c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+c+d & 0 & 0 \\ 0 & -1+c+d & 5+c \\ 0 & -10-2c & 14+4c+d \end{bmatrix}$$

ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସର ସମାନତା ଦ୍ୱାରା, ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକ ସମାନ କରି, ଆମେ ପାଇବୁ।

$$6 = 1 + c + d \Rightarrow 5 = c + d$$

$$-1 = 5 + c \Rightarrow -6 = c$$

$$5 = -6 + d \Rightarrow d = 11$$

ତେଣୁ] (– 6, 11) ଆବଶ୍ୟକ ମୂଲ୍ୟ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ 4.ମନେକର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} k & 2k \\ k^2 - k & k^2 \end{bmatrix}$ ଏବଂ ଭେକ୍ଟର $X = [X_1\ X_2]^T$k ର ଭିନ୍ନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟକ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି ସମୀକରଣ $AX = B$ ଅସୀମ ଅନେକ ସମାଧାନ ଅଛି।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ଅସୀମ ଅନେକ ସମାଧାନ ଅଛି।

$$|A| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} k & 2k \\ k^2 - k & k^2 \end{vmatrix} = 0$$

କିମ୍ବା $$k^3 - 2k(k^2 - k) = 0$$

$$k^3 - 2k^3 + 2k^2 = 0$$

$$-k^3 + 2k^2 = 0$$

$$k^2(-k + 2) = 0$$

$k = 0$ କିମ୍ବା $k = 2$ (ଉତ୍ତର)

ତେଣୁ: k ଦୁଇଟି ମୂଲ୍ୟ ଅଛି ଯେପରିକି ଦତ୍ତ ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହର ଅସୀମ ଅନେକ ସମାଧାନ ଅଛି

ଉଦାହରଣ 5. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ ର $\det . A = 100$ and ଟ୍ରେସ (A) = 14, ତେବେ | a – b |ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ଅଛି $a + 5 + 2 + b = 14$ [ଟ୍ରେସ(A) = 14]

$$a + 7 + b = 14$$

$$a + b = 7 \qquad \text{...(1)}$$

ଆଉ ମଧ୍ୟ det. A = 100

R_4 ରେ ବିସ୍ତାର କଲେ

$$b \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 100$$

$$\Rightarrow b[a(10 - 0) - 0 + 3(0)] = 100$$

$$\Rightarrow \quad 10ab = 100$$

$$\Rightarrow \quad ab = 10$$

$$b = \frac{10}{a} \qquad \text{...(2)}$$

(2) ରୁ b ର ମାନକୁ (1) ରେ ରଖିଲେ, ଆମେ ପାଇବୁ

$$a + \frac{10}{a} = 7$$

$$a^2 + 10 = 7a$$

$$a^2 - 7a + 10 = 0$$

$$(a - 5)(a - 2) = 0$$

$a = 5$ କିମ୍ବା 2

(2) ରୁ $b = 2$ କିମ୍ବା 5

ବର୍ତ୍ତମାନ $|a - b| = |5 - 2|$ କିମ୍ବା $|2 - 5| = 3$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ 6. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $J_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ କୁ ବିଚାର କରାଯାଉ I_6 ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡିକ

ଯାହାକି ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ I_6 ଅର୍ଡରର ସ୍ତମ୍ଭ ଗୁଡିକୁ ବିପରୀତ କରି ପ୍ରାପ୍ତ ହୋଇଛି। ମନେକର $P = I_6 + \alpha J_6$ ଯେଉଁଠାରେ $\alpha \geq 0, \alpha \in R$. α ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଥି ପାଇଁ det (P) = 0 ହେବ

ସମାଧାନ: ମନେକର $P = I_2 + \alpha J_2$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad |P| = 1 - \alpha^2$

$$\det P = I_4 + \alpha I_4$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad |P| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 0 - \alpha \begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1[1(1-0) - \alpha(\alpha - 0) + 0] - \alpha[\alpha(1-\alpha^2)]$$

$$= 1 - \alpha^2 - \alpha(\alpha - \alpha^3) = 1 - \alpha^2 - \alpha^2 + \alpha^4$$

$$= 1 - 2\alpha^2 + \alpha^4 = (1-\alpha^2)^2$$

ସେହିପରି ଯଦି $P = I_6 + \alpha I_6$ ହୁଏ ତେବେ

$$|P| = (1-\alpha^2)^3$$

$$\det. P = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\alpha^2)^3 = 0$$

$\Rightarrow \quad 1 - \alpha^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (1-\alpha)(1+\alpha) = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha = -1, 1$

$\alpha \geq 0$ ଧନାତ୍ମକ ଅଟେ

$\therefore \quad \alpha = 1$

ଉଦାହରଣ 7. ମନେକର A, $m \times n$ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ B, $n \times m$ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ। ଏହା ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ:

$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$, ଯେଉଁଠାରେ I_k, $k \times k$ ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

ଉପରୋକ୍ତ ଗୁଣ ଧର୍ମକୁ ବ୍ୟବହାର କରି, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ଗଣନା କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ

$$\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

ମନେକର $AB=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}*[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]=A*B$

ଏବଂ $I_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}_{4\times 4}$

$\therefore \quad |I_4|=1$

ଏହା ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ, $|I_m+AB|=|I_n+BA|$

$\therefore \quad BA=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]\times\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=[4]$

$\det(I_n+BA)=|[4]+[1]|=|5|=5$

ଉଦାହରଣ 8 ସମସ୍ତ 2 × 2 ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସ୍ ମଧ୍ୟରୁ ଟ୍ରେସ 14 ସହିତ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ସର୍ବାଧିକ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ସାଧାରଣତ 2 × 2 ବାସ୍ତବ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}$ ଅଟେ

$\Rightarrow \quad |A|=ac-b^2$

ଏବଂ $\quad \text{trace } A=a+c=14$ ...(1)

$|A|$ ର ସର୍ବାଧିକ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ, b^2 ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବା ଜରୁରୀ।

ଯେହେତୁ b^2 ସର୍ବଦା ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ତେଣୁ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ

$b^2=0$

ଅର୍ଥାତ୍, ସର୍ବାଧିକ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ପାଇଁ $b=0$ ହେବ।

$|A|=ac=a(14-a)=14a-a^2$ [ସମୀକରଣ (1)ରୁs]

$|A|$ ର ସର୍ବାଧିକ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ, ଆମେ ଲେଖି ପାରିବା

$\frac{d|A|}{da}=0$

$$\Rightarrow \qquad 14 - 2a = 0$$

$$a = 7$$

(1) ରୁ, $c = 14 - a = 14 - 7 = 7$

$\therefore$ ସର୍ବାଧିକ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ $|A| = ac = 7 \times 7 = 49$ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ 9 ଦୁଇଟି ପରିବାର ଅଛି । ପରିବାର P ତିନୋଟି ପୁରୁଷ, ତିନୋଟି ମହିଳା ଏବଂ 12 ପିଲାଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ । ପରିବାର Q ଦୁଇଟି ପୁରୁଷ, ଦୁଇଟି ମହିଳା ଏବଂ ଚାରୋଟି ପିଲାଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ । କ୍ୟାଲୋରୀ ପାଇଁ ସୁପାରିଶ କରାଯାଇଥିବା ଦୈନିକ ଭତା ହେଉଛି : ପୁରୁଷ: 2400, ମହିଳା: 2000, ପିଲା 1400 ଏବଂ ପ୍ରୋଟିନ୍ ପାଇଁ: ପୁରୁଷ 60 ଗ୍ରାମ୍, ମହିଳା: 40 ଗ୍ରାମ୍ ଏବଂ ପିଲା: 35ଗ୍ରାମ, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୁଣନ ବ୍ୟବହାର କରି, ଦୁଇ ପରିବାରର ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ୟାଲୋରୀ ଏବଂ ପ୍ରୋଟିନ୍ ମୋଟ ଆବଶ୍ୟକତା ଗଣନା କରନ୍ତୁ ।

ସମାଧାନ: ମନେକର P ଏବଂ Q ପରିବାରରେ ପୁରୁଷ, ମହିଳା ଏବଂ ଶିଶୁଙ୍କ ସଂଖ୍ୟାକୁ ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କରୁଥିବ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' ହେଉ ।

$$A = \begin{matrix} \\ P \\ Q \end{matrix}\begin{bmatrix} \text{Men} & \text{Women} & \text{Children} \\ 3 & 3 & 12 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

କ୍ୟାଲୋରୀ ଏବଂ ପ୍ରୋଟିନ୍ ପାଇ ସୁପାରିଶ କରୁଥିବା ଦୈନିକ ଭତା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ B ହେଉ ।

ତେବେ B କୁ ଏପରି ଲେଖାଯାଇ ପାରିବ ।

$$B = \begin{matrix} \text{Man} \\ \text{Woman} \\ \text{Child} \end{matrix}\overset{\text{Calories Proteins}}{\begin{bmatrix} 2400 & 60 \\ 2000 & 40 \\ 1400 & 35 \end{bmatrix}}$$

ପରିବାର P ଏବଂ Q ସମୁଦାୟ କ୍ୟାଲୋରୀ ଏବଂ ପ୍ରୋଟିନ୍‌ର ଆବଶ୍ୟକତା ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସ୍‌ରେ ଗୁଣଫଳ ରୂପରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

$$\text{ଅର୍ଥାତ୍ } AB = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2400 & 60 \\ 2000 & 40 \\ 1400 & 35 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\times2400+3\times2000+12\times1400 & 3\times60+3\times40+12\times35 \\ 2\times2400+2\times2000+4\times1400 & 2\times60+2\times40+4\times35 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7200+6000+16800 & 180+120+420 \\ 4800+4000+5600 & 120+80+140 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} \\ P \\ Q \end{matrix}\begin{bmatrix} \text{Calories} & \text{Protiens} \\ 30000 & 720 \\ 14400 & 340 \end{bmatrix}$$

ତେଣୁ ଯଥାକ୍ରମେ ପରିବାର P ପାଇଁ କ୍ୟାଲୋରି ଏବଂ ପ୍ରୋଟିନ୍‌ର ସମୁଦାୟ ଆବଶ୍ୟକତା 30000 କ୍ୟାଲୋରିଜ୍ ଏବଂ 720 ଗ୍ରାମ ପ୍ରୋଟିନ ଏବଂ ପରିବାର Q ପାଇଁ ଯଥାକ୍ରମେ 14400 କ୍ୟାଲୋରିଜ୍ ଏବଂ 340 ଗ୍ରାମ ପ୍ରୋଟିନ୍

ସାରାଂଶ

1.ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହେଉଛି (m × n) ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକର ଏକ ବ୍ୟୁହ ଉପସ୍ଥାପନା ଏବଂ ଏହିପରି ଲେଖାଯାଏ,

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, i = 1, 2, ..., m

2. ବର୍ଗସମ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ: ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ ବର୍ଗ ସମ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ, ଯଦି $A^2 = A$ ହୁଏ।
3. ଇନଭଲୁଟୋରି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ: ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' କୁ ଇନ୍‌ଭଲୁଟୋରି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ଯଦି $A^2 = I$, ହୁଏ ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସର୍ବଦା ଇନଭଲୁଟୋରି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।
4. ରାଙ୍କ: ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଇକେଲନ୍ ରୂପରେ, ଅଣ-ଶୂନ୍ୟ ସଂଖ୍ୟକ ଧାଡିଗୁଡିକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କ କୁହାଯାଏ
5. ଅସମାଙ୍ଗୀ ସମୀକରଣ ସମୂହ ପାଇଁ

   a. ଯଦି $\rho(A) = \rho(A : B)$ =ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ ତେବେ ସମୀକରଣ ସମୂହ ସଂଗତ ସହ ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଟେ।

   b. ଯଦି $\rho(A) = \rho(A : B) <$ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ ତେବେ ସମୀକରଣ ସମୂହ ସଂଗତ ଅସୀମ ଅନେକ ସମାଧାନ ଅଛି।

   c. ଯଦି $\rho(A) \neq \rho(A : B)$, ତେବେ ସମୀକରଣ ସମୂହ ଅସଂଗତ ଅଟେ।
6. ସଜାତୀୟ ସମୀକରଣ ସମୂହ ପାଇଁ

   a. ଯଦି $\rho(A) =$ ଅଜ୍ଞତ ସଂଖ୍ୟା, ତେବେ ସମୂହ ସଂଗତ ସହିତ ଅନନ୍ୟ ସମାଧନ ଅଟେ। (ମାମୁଲି ସମାଧାନ)

   b. ଯଦି $\rho(A) <$ ଅଜ୍ଞତ ସଂଖ୍ୟା, ତେବେ ସମୂହ ସଂଗତ ସହିତ ଅସୀମ ସମାଧନ ଅଟେ। (ଅତୁଛ ସମାଧାନ)
7. ଯଦି ଡ଼ିଟରମିନାଣ୍ଟ $= 0$ ହୁଏ ତେବେ କ୍ରାମର ଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ ହୋଇ ପାରିବ ନାହିଁ।
8. ଯଦି ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଡ଼ିଟରମିନାଣ୍ଟ ଅଣ ଶୂନ୍ୟ ହୁଏ, ତେବେ ଏହାର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ବିଦ୍ୟ ମାନ ଅଛି ଏବଂ ଏହା ସର୍ବଦା ଅନନ୍ୟ।

ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନ

1. ଯଦି $2\begin{bmatrix} x & 9 \\ y & 6 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$, ହୁଏ ତେବେ x ଏବଂ y ର ମୂଲ୍ୟ ହେବ

   a. x = 6, y = 3 b. y = 6, x = 3 c. x = 9/2, y = 6 d. x = –1, y = –2

2. ଯଦି $X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, ତେବେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ X ମୂଲ୍ୟ ହେବ

   a. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

3. ଯଦି A = [2, 1, –3] ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, ତେବେ BA ର ଗୁଣଫଳ ହେଉଛି

a. 15 b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -6 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$ d. 26

4. y ର ମୂଲ୍ୟ ଯାହା ପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସ୍ ସମାନ ହେବ,

$$\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ x+y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

a. 4 b. 3 c. 0 d. –1

5. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, ହୁଏ ତେବେ

a. AB ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି b. BA ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି c.(A + B) ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି d. A – B ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି

6. ମନେକର A ଅର୍ଡର 3 ର ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ତେବେ | kA | ସହିତ ସମାନ

a. 3k | A | b. k | A | c. k^2 | A | d. k^3 | A |

7. ଯଦି $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$, ହୁଏ ତେବେ x ର ମୂଲ୍ୟ ହେବ

a. 3 b. 4 c. 2 d. –1

8. ଯଦି A ଅର୍ଡର 2 ର ଏକ ଇନଭଟିବିଲ୍ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହୁଏ , ତେବେ det (A^{-1}) କେଉଁଟି ସହ ସମାନ ହେବ

a. 0 b. det A c. 1 d. $\frac{1}{\det A}$

9. ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ $\begin{vmatrix} 0 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 9 & 12 \end{vmatrix}$ ର ମୂଲ୍ୟ କେଉଁଟି ଅଟେ।

a. 1 b. –1 c. 0 d. 2

10. ଯଦି $\begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ x+5 & 4 \end{vmatrix} = 3$, ହୁଏ ତେବେ xର ମୂଲ୍ୟ କେଉଁଟି ହେବ।

a. 7 b. 8 c. 12 d. 10

11. ଯଦି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଉଭୟ ସମମିତ ଏବଂ ବିଷମ ସମମିତ ହୁଏ ତେବେ

a.A ଏକ କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ b.A ଏକ ଶୂନ୍ୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

c. A ଏକ ସ୍କେଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ d.A ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

12. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix}$ ଏବଂ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, ହୁଏ ତେବେ A^{-1} ହେବ।

a. $\begin{bmatrix} a+ib & -c+id \\ -a+id & a-ib \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} a-ib & -c-id \\ c-id & a+ib \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} a-ib & c-id \\ -c-id & a+ib \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix}$

13. ଯଦି $A(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta} \end{bmatrix}$, ତେବେ $A(\alpha, \beta)^{-1}$ ମୂଲ୍ୟ ହେବ

a. $A(-\alpha, \beta)$ b. $A(-\alpha, -\beta)$ c. $A(\alpha, -\beta)$ d. $A(\alpha, \beta)$

14. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ଯେପରି $A^{-1} = kA$,ତେବେ k ର ମୂଲ୍ୟ କେଉଁଟି ଅଟେ।

a. $\frac{1}{19}$ b. $-\frac{1}{19}$ c. $\frac{1}{17}$ d. $-\frac{1}{17}$

15. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$ ର ରାଙ୍କ 3, ଏବଂ a, b, c ବାସ୍ତବ ତେବେ

a. $a = b = c$ b. ସମସ୍ତ a, b, c ଭିନ୍ନ କିନ୍ତୁ $a + b + c = 0$

c. a, b, c ର ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ସମାନ ହେବ କିନ୍ତୁ ତୃତୀୟରୁ ଭିନ୍ନ।

d. ସମସ୍ତ a, b, c ଭିନ୍ନ ଏବଂ $a + b + c \neq 0$

16. p ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଥି ପାଇଁ ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରାଙ୍କ୍ ହେବ $\begin{bmatrix} 3 & p & p \\ p & 3 & p \\ p & p & 3 \end{bmatrix}$

a. 4 b. 2 c. 3 d. 1

17. ଗସ ବିଲୋପନ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କର:

$x + 2y + 3z = 4$, $2x + 3y + 4z = 5$, $3x + 4y + 5z = 6$

a. $x = 0.5, y = 0$ ଏବଂ $z = 1$ b. $x = 0.5, y = 0$ ଏବଂ $z = -1$

c. $x = -0.5, y = 0$ ଏବଂ $z = 1.5$ d. $x = 0.5, y = 0$ ଏବଂ $z = -1.5$

18. ଗସ-ଜୋର୍ଡାନ ପଦ୍ଧତିରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ କେଉଁ ରୁପାନ୍ତର ଅନୁମତି ପ୍ରାପ୍ତ?

a. କର୍ଣ୍ଣ ରୁପାନ୍ତର b. ସ୍ତମ୍ଭ ରୁପାନ୍ତର

c. . ଧାଡି ରୁପାନ୍ତର d. ବର୍ଗ ରୁପାନ୍ତର

19. କ୍ରାମର ଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣକୁ ସମାଧାନ କର।

$3x + y + 2z = 3$, $2x - 3y - z = -3$, $x + 2y + z = 4$

a. $x = 1, y = 2, z = -1$ b. $x = 2, y = 1, z = -1$

c. $x = 2, y = -1, z = 1$ d. $x = 1, y = -1, z = 2$

20. କ୍ରାମର ଙ୍କ ନିୟମ କେଉଁଥି ପାଇଁ ବିଫଳ ହୁଏ

a. ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ > 0 b. ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ < 0

c. ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ = 0 d. ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ = ଅବାସ୍ତବ

ଉତ୍ତର

1. b	2. c	3. b	4. b
5. a	6. d	7. c	8. d
9. c	10. d	11. b	12. c
13. b	14. a	15. d	16. c
17. c	18. c	19. a	20. c

ଅସମାହିତ କଠିନ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

1. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଯଦି A ର ଏକ ଶୂନ୍ୟ ଧାଡି, ଅଛି ତେବେ AB ର ମଧ୍ୟ ଏକ ଶୂନ୍ୟ ଧାଡି ଅଛି।
2. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଯଦି B ର ଏକ ଶୂନ୍ୟ ସ୍ତମ୍ଭ ଅଛି, ତେବେ AB ର ମଧ୍ୟ ଏକ ଶୂନ୍ୟ ସ୍ତମ୍ଭ ଅଛି |
3. ମନେକର 'A' 'm' ରାଙ୍କ ସହିତ ଏକ $m \times n$ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ 'B' 'n' ରାଙ୍କ ସହିତ ଏକ $n \times p$ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ। AB ର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ତୁମର ଉତ୍ତରକୁ ଯଥାର୍ଥ କର।
4. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଯଦି B ଏକ 3×1 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ C ଏକ 1×3 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହୁଏ ତେବେ 3×3 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ BC ର ଅତି ବେଶୀରେ ରାଙ୍କ 1 ଅଛି। ଅପରପକ୍ଷେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଯଦି A କୌଣସି 3×3 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ରାଙ୍କ 1 ଥାଏ , ତେବେ ସେଠାରେ 3×1 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ B ଏବଂ 1×3 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ C ଅଛି ଯେପରି $A = BC$
5. 2×2 ଇନଭର୍ଟିବିଲ୍ ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସ୍ A ଏବଂ B ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି A + B ଶୂନ୍ୟ ସହ ସମାନ ନୁହେଁ ଏବଂ A+B ଇନଭର୍ଟିବିଲ୍ ନୁହେଁ।
6. ମନେକର $A \in M_{n\times n}(F)A$ କେଉଁ ପରିସ୍ଥିତିରେ, $\det(-A) = \det(A)$
7. ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅର୍ଥ ବ୍ୟବସ୍ଥା ଦ୍ରବ୍ୟ ଏବଂ ସେବାର ଦୁଇଟି କ୍ଷେତ୍ର କୁ ନେଇ ଗଠିତ। ଧରାଯାଉ ସମସ୍ତ ଦ୍ରବ୍ୟର 60% ଏବଂ ସମସ୍ତ ସେବା ଗୁଡ଼ିକର 30% ଦ୍ରବ୍ୟ ଉତ୍ପାଦନରେ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ। ସାମଗ୍ରୀ ଉତ୍ପାଦନରେ ସମୁଦାୟ ଅର୍ଥ ନୈତିକ ଉତ୍ପାଦର କେଉଁ ଅନୁପାତ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ।
8. ନିମ୍ନଲିଖିତ ବାକ୍ୟର ପ୍ରତ୍ୟୁଦାହରଣ ଦିଅନ୍ତୁ। ଯଦି m ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହର n ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ଗୁଣାଙ୍କ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କ m ଅଛି ତେବେ ସମୁହର ସମାଧାନ ଅଛି।

ପ୍ରକଳ୍ପ/ବ୍ୟବହାରିକା/କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ

ପ୍ରକଳ୍ପ

ଗ୍ରାଫ୍ ତତ୍ତ୍ୱରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ପ୍ରୟୋଗ ଦେଖାଯାଉଥିବା ଏକ (ନମୁନା) ପ୍ରସ୍ତୁତ କର।

ବ୍ୟବହାରିକ

1. ଏକ MATLAB ଫଳନ ଲେଖନ୍ତୁ ଯାହା ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଧାଡି ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ

ଥାଏ।ଫଳନକୁ ପାସ୍ ହୋଇଥିବା ଧାଡି ସଂଖ୍ୟା ସହିତ ଆରମ୍ଭ କରି, ଫଳନକୁ ପଠାଯାଇଥିବା ସ୍ତମ୍ଭକୁ ସ୍କୋର କର ଏବଂ ଧାଡି ସଂଖ୍ୟାକୁ ଫେରସ୍ତ କର ଯାହା ସ୍ତମ୍ଭରେ ସର୍ବ ବୃହତ ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ ମୂଲ୍ୟ ଧାରଣ କରେ। ଏବଂ ବ୍ୟବହାର କରି 3 × 3 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

2. MATLAB ବ୍ୟବହାର କରି, 3 × 3 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ

1. ଜଣେ ଦୋକାନୀ ପ୍ୟକେଟ P_1 ରେ 1 କିଲୋଗ୍ରାମ ଗହମ, 1 କିଲୋଗ୍ରାମ ଚାଉଳ ଏବଂ 1 କିଲୋଗ୍ରାମ ବାଜରା ଏବଂ P_2 ରେ 1 କିଲୋଗ୍ରାମ ଗହମ, 0 କିଲୋଗ୍ରାମ ଚାଉଳ ଏବଂ 1 କିଲୋଗ୍ରାମ ବାଜରା ଏବଂ P_3 , 0 କିଲୋଗ୍ରାମ ଗହମ, 1 କିଲୋଗ୍ରାମ ଚାଉଳ ଏବଂ 1 କିଲୋଗ୍ରାମ ବାଜରା ବିକ୍ରି କରେ। ତେବେ କେବଳ ଏକ କିଲୋଗ୍ରାମ ବାଜରା କିଣିବା ସମ୍ଭବ କି ନୁହେଁ ଯାଞ୍ଚ କରନ୍ତୁ। ଯଦି ହଁ ତେବେ କିପରି ?
2. (ଭେକ୍ଟର) କ'ଣ? ଏହା ଏକ ପ୍ରକାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କି? ଏକ ଉଦାହରଣ ଦେଇ ତୁମର ଉତ୍ତରକୁ ଚିନ୍ତାକର ଏବଂ ସମର୍ଥନ କର।
3. ବିଭିନ୍ନ ସହରର ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ମାନଙ୍କର ଏକ ଗୋଷ୍ଠୀ ଗଠନ କରନ୍ତୁ, ଏକ ଗ୍ରାଫ୍ ତିଆରି କରନ୍ତୁ ଏବଂ ସହର ଗୁଡିକୁ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ରୂପରେ ଏବଂ ପରିବହନ ମୂଲ୍ୟକୁ ଧାର ରୂପରେ ନେଇ ସମାନ୍ତରାଳ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଗଠନ କର।।

ଅଧିକ ଜାଣିବା

1. ଗୁଣନଫଳ xyz ର ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ଯେଉଁଥି ପାଇଁ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}$ ଧନାତ୍ମକ ଅଟେ।

   a. –8 b. –1 c. $-2\sqrt{2}$ d. $-16\sqrt{2}$

2. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 2\beta & \beta & -\beta \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{bmatrix}$ ଏକ ଅର୍ଥୋଗୋନାଲ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହୁଏ, ତେବେ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ତ୍ରିଗୁଣ (α, β, γ) ସଂଖ୍ୟା ହେଉଛି:

   a. 8 b. 6 c. 4 d. 2

3. ଯଦି $\alpha, \beta \neq 0$ ଏବଂ $f(n) = \alpha^n + \beta^n$ ଏବଂ $\begin{vmatrix} 3 & 1+f(1) & 1+f(2) \\ 1+f(1) & 1+f(2) & 1+f(3) \\ 1+f(2) & 1+f(3) & 1+f(4) \end{vmatrix} = k(1-\alpha)^2 (1-\beta)^2 (\alpha-\beta)^2$, ହୁଏ ତେବେ k ର ମାନ:ହେବ:

   a. $\alpha\beta$ b. $1/\alpha\beta$ c. 1 d. –1

4. $A = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ ର ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

5. 'a'ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ର ରାଙ୍କ 3 ଠାରୁ ସାନ ହୁଏ।

ଉତ୍ତରମାଳା

1. a   2. a   3. c

4. $\rho(A) = \rho(A) = \begin{cases} 3 & \text{ଯଦି } x \neq y,\ y \neq Z,\ Z \neq x \\ 2, & \text{କିମ୍ବା } x = y, \text{ କିମ୍ବା } x = z, \text{ ଏବଂ } y \neq z \quad x \\ 1 & \text{ଯଦି } x = y = z \end{cases}$ 5. 0, 3

ସହାୟକ ଓ ପରାମର୍ଶ ମୂଳକ ପଠନ

1. Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.
2. Dettman, J.W. (1974). Introduction to Linear Algebra and Differential Equations, McGraw Hill, Kogakusha.
3. Garg, Reena (2019). Engineering Mathematics-I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
4. Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers.
5. Herstein, I.N. (1993). Topics in Algebra, Wiley Eastern.
6. Hohn, E. Franz. (1964). Elementary Matrix Algebra, Macmillan Company, NewYork.
7. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition, Narosa.
8. Philip, Franklin (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. NewYork.
9. Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.
10. Ram, Babu. Engineering Mathematics, Pearson.
11. Thomas, G.B. and Finney, R.L. (1992). Calculus and Analytic Geometry, Addision-Wesley, Reading,

MA.

4 ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍- I

ଅଧ୍ୟାୟ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍, ଭେକ୍ଟରର ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳତା ଓ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ରତା,ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ, ରୈଖିକ ବିସ୍ତୃତ ଆଧାର, ମାତ୍ରା, ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ (ମ୍ୟାପ୍ସ), ରୈଖିକ ମ୍ୟାପର ବ୍ୟାପ୍ତି ଓ କର୍ଣ୍ଣେଲ, ରାଙ୍କ ଓ ଶୂନ୍ୟତା, ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ, ରାଙ୍କ-ଶୂନ୍ୟତା ଉପପାଦ୍ୟ, ରୈଖିକ ମ୍ୟାପର ଗଠନ, ଏକ ରୈଖିକ ମ୍ୟାପ ସହିତ ଜଡିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ଇତ୍ୟାଦି ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି । ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ମାନଙ୍କ ପାଇଁ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ଓ ପ୍ରୟୋଗଗୁଡିକୁ ଅଧିକ ସ୍ପଷ୍ଟ କରିବା ପାଇଁ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ଉଦାହରଣ ସନ୍ନିବେଶିତ ହୋଇଛି ।

ଯୁକ୍ତିଯୁକ୍ତତା

ରୈଖିକ ବୀଜଗଣିତ ସବୁସ୍ଥାନରେ ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଏ, କିନ୍ତୁ ବେଳେବେଳେ ଏହା ବୁଝିବା କଷ୍ଟକର ବୋଧହୁଏ, ଗଣିତ, ବିଜ୍ଞାନ ଓ ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂରେ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଏ। ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ କରିବାପାଇଁ ଏହା ଉପଯୁକ୍ତ ରୈଖିକ ବୀଜ ଗାଣିତିକ ଧାରଣା । ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ, ରୈଖିକ ବୀଜଗଣିତର ଏକ ମୂଳ ବିଷୟବସ୍ତୁ ମଧ୍ୟରୁ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଏକ ମୂଳ ବିଷୟବସ୍ତୁ, ବିଶ୍ଳେଷଣାତ୍ମକ ଜ୍ୟାମିତି, ଅବକଳ ସମୀକରଣ ଏବଂ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏହାର ବ୍ୟାପକ ପ୍ରୟୋଗ ଅଛି । ବାର୍ତ୍ତାଗୁଡିକୁ ଏନକୋଡ କରିବା ପାଇଁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ, ଏବଂ ଡିକୋଡର ହେଉଛି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ । ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ମଧ୍ୟରେ ଏକ ରୈଖିକ ମ୍ୟାପ ଏବଂ ଏକ ସମତଳରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବାପାଇଁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ବ୍ୟବହାର ହୁଏ ।

ପ୍ରାକ୍-ଆବଶ୍ୟକତା

1. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କ, ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ଓ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ବିଷୟରେ ଭଲ ଧାରଣା ।
2. ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହର ଗଠନ ଓ ସମାଧାନର ବିଶ୍ଳେଷଣରେ ପାରଙ୍ଗମ ହେବା|
3. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସରେ ପ୍ରାଥମିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା କିପରି ପ୍ରୟୋଗ କରାଯିବ ତାହା ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ଜାଣିବା ଉଚିତ୍।
4. ସରଜେକ୍‌ଟିବ, ଇନ୍‌ଜେକ୍ଟିଵ୍ ଇତ୍ୟାଦି ଫଳନର ଆଚରଣ ବିଷୟରେ ସ୍ପଷ୍ଟ ଧାରଣା। |

ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟ ସମାପ୍ତହେବାରେ, ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ସକ୍ଷମ ହେବେ :

U4-01: ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍, ସବ୍ ସ୍ପେଶ୍, ମାତ୍ରା ଓ ସେମାନଙ୍କ ଗୁଣଧର୍ମ ର ଧାରଣାକୁ ବୁଝିପାରିବେ, |

U4-02: ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ର ଗୁଣଧର୍ମ ବିଷୟରେ ଶିଖିପାରିବେ; R^n ରୁ R^m ଓ ବିପରୀତ କ୍ରମରେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସହିତ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ର ସହସମ୍ବନ୍ଧକୁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିପାରିବେ।

U4-03: ପରୀକ୍ଷା କର ଓ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କିପରି ବଦଳେ, ଯେତେବେଳେ ସେମାନଙ୍କର ଆଧାର ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୁଏ; ରାଙ୍କ- ନଲିଟି ଉପପାଦ୍ୟ ବିଷୟରେ ଶିଖି ପାରିବେ ।

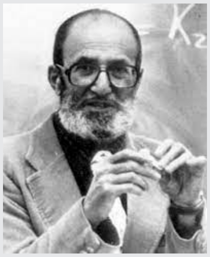
U4-04: ବ୍ୟାପ୍ତି-ସ୍ପେଶ୍ ,ନଲ-ସ୍ପେଶ୍, କର୍ଣ୍ଣଲ ସ୍ପେଶ୍ ବିଶେଷ ପ୍ରକାରର ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଧାରଣାର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କନ କରିପାରିବେ; ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସହିତ ଆଧାର/ ରୈଖିକ ମ୍ୟାପ ର ସମ୍ପର୍କ କରିପାରିବେ

ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ ସହିତ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳର ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ

ୟୁନିଟ୍ 4 ଫଳାଫଳ	ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳ ସହିତ ଆଶାକରା ଯାଉଥିବା ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ (1-ଦୁର୍ବଳ ସହସମ୍ବନ୍ଧ; 2-ମାଧ୍ୟମ ସହସମ୍ବନ୍ଧ; 3-ଦୃଢ ସହସମ୍ବନ୍ଧ)				
	co-1	co-2	co-3	co-4	co-5
u4-01	-	-	-	3	1
u4-02	-	-	2	3	2
u4-03	-	-	1	3	2
u4-04	-	-	2	3	2

ଇତିହାସ;

ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ର ଧାରଣା, ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା {a,b,c--} ର କ୍ଷେତ୍ର ସହ ଜଡିତ, ସଂଗୃହିତ ଭେକ୍ଟର {u,v,w---} ର ସାଧାରଣ ଦୁଇଟି ଏବଂ ତିନୋଟି ମାତ୍ରାବିଶିଷ୍ଟ ସ୍ପେଶ୍‌ର ଦ୍ୱାରା ବିକଶିତ ହୋଇଛି। ୧୮୮୪ ମସିହାରେ ଇଟାଲୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞ ଗୁସେପ୍ ପିଆନୋଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଥମେ, ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍, ଆବଷ୍ଟ୍ରାକ୍ଟ ବୀଜଗାଣିତିକ ବସ୍ତୁ ଭାବରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥଲା,



ପଲ ହାଲମୋସ

ପିଆନୋ ତାଙ୍କ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ଗୁଡିକୁ "ଲିନିଅର ସିଷ୍ଟମ"(ରୈଖିକ ପ୍ରଣାଳୀ) କାରଣ ସେ ସଠିକ୍ ଭାବରେ ଦେଖିଲେଯେ, ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଅନେକ ସସୀମ ଭେକ୍ଟର ଓ ସ୍କେଲାର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗରେ av+ bw+...+cz କୌଣସି ଭେକ୍ଟର ପାଇପାରିବା,

"ଗଣିତ ଶିଖିବାର ଏକମାତ୍ର ଉପାୟ ହେଉଛି, ଗଣିତକୁ ଅଭ୍ୟାସ କରିବା"

4.1ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍

ମନେକର F ଏକ କ୍ଷେତ୍ର ଏବଂ V ଏକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ଯାହା ଦୁଇଟି ଦ୍ୱି ଆଧାରୀ ପ୍ରକ୍ରିୟା, ଭେକ୍ଟର ଯୋଗ '+' ଏବଂ ସ୍କେଲାର୍ ଗୁଣନ '.' କୁ କ୍ଷେତ୍ର F ରେ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ କୁହାଯାଏ, ଯଦି ଏହା ନିମ୍ନୋକ୍ତ ସର୍ତ୍ତାବଳୀକୁ ପୂରଣକର

i- V ଯୋଗର ଅନ୍ତର୍ଗତ ସଂବୃତ ହୁଏ ଅର୍ଥାତ୍ $u + v \in V$, ସମସ୍ତ $u + v \in V$ ପାଇଁ

ii. **ସଂଯୋଜ୍ୟତା ଅର୍ଥାତ**: $u + (v + w) = (u + v) + w$, ସମସ୍ତ $u, v, w \in V$ ପାଇଁ

iii. **ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ:** ଏକ ଉପାଦାନ $0 \in V$ ର ଏହି ପ୍ରକାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି କି $u + 0 = 0 + u = u$ ସମସ୍ତ $u \in V$ ପାଇଁ।

iv. **ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ:** ପ୍ରତ୍ୟେକ $u \in V$ ପାଇଁ ଏଠାରେ ଏକ ଅଦ୍ୱିତୀୟ ଉପାଦାନ $-u \in V$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି ଯେପରିକି $u + (-u) = 0 = (-u) + u$.

v. **କ୍ରମବିନିମୟୀ:** $u + v = v + u$, ସମସ୍ତ $u, v \in V$ ପାଇଁ

vi. V ସ୍କେଲାର ଗୁଣନର ଅନ୍ତର୍ଗତ ସଂବୃତ ଅଟେ ଅର୍ଥାତ୍ $au \in V$ ସମସ୍ତ $a \in F$ ଏବଂ $u \in V$. ପାଇଁ

vii- $a(u + v) = au + av$, ସମସ୍ତ $a \in F, u, v \in V$ପାଇଁ

viii- $(a + b)u = au + bu$, ସମସ୍ତ $a, b \in F, u \in V$ପାଇଁ

ix- $(ab)u = a(bu)$, ସମସ୍ତ $a, b \in F, u \in V$ପାଇଁ

x. $1u = u$, ସମସ୍ତ $u \in V$ ପାଇଁ ଏବଂ 'F' ର ଗୁଣାତ୍ମକ ଅଭେଦ 1 ଅଟେ, ତେଣୁ V(F) ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ଅଟେ ।

> ମନ୍ତବ୍ୟ: Vର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ F ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍କେଲାର କୁହାଯାଏ |

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ: ଯାଞ୍ଚ କର Z(Q) ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ କି ନା?

ସମାଧାନ: ମନେକର $1 \in Z$ ଏବଂ $\frac{1}{2} \in Q$

ଗୁଣଧର୍ମ (vi) ଅନୁସାରେ $au \in V$ ସମସ୍ତ $a \in F$ ଏବଂ $u \in V$ ପାଇଁ.

$\therefore \quad 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \notin Q$

$\therefore Z(Q)$ ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ନୁହେଁ ।

4.1.1R^nରେ ଭେକ୍ଟର

ଏକ ଭେକ୍ଟର n ମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ, ଏକ କ୍ରମିତ n-ଟପଲ $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, ଭାବରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଏ, ଯେଉଁଠାରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ a_i ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ,n - ମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ ସମସ୍ତ ଭେକ୍ଟର ର ସେଟ୍‌କୁ R^n ଦ୍ୱାରା ସୂଚୀତ କରାଯାଏ । ଏକ କ୍ରମିକ n-ଟପଲ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ବାସ୍ତବ n-ଭେକ୍ଟର କୁହାଯାଏ। ଏହା ଗାଣିତିକ ରୂପରେ ଏପରି ଲେଖାଯାଏ

$R^n = \{a_1, a_2, \ldots a_n \mid a_i \in R, 1 \le i \le n\}$

୪.୧.୨ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସରେ ଭେକ୍ଟର:

$M_{m \times n}(F)$ = ସମସ୍ତ $m \times n$ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ସେଟ୍ ଯାହାର ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକ F ରେ ଅଛନ୍ତି ।

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} a_{ij} \in F$$

୪.୧.୩ ସର୍ବାଧିକ n- ଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ ରେ ଭେକ୍ଟର:

$P_n(F)$ = ସର୍ବାଧିକ n-ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ସମସ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ ର ସେଟ ଯାହାର ସହଗ F ରେ ଅଛି ଓ ଶୂନ୍ୟ ପଲିନୋମିଆଲ୍

$$= \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, a_i \in F, n \in N \cup \{0\}\}$$

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ୪.୧: ପ୍ରମାଣ କରଯେ, R ରେ ସମସ୍ତ କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସେଟ, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଯୋଗ ଓ ସ୍କେଲାର ଗୁଣନ ଭିତ୍ତିକ ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେସ୍ ।

ସମାଧାନ: ମନେକର $V = n \times n$ ସମସ୍ତ କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଏକ ସେଟ୍

$$= [a_{ii}]_{n \times n}, a_{ii} \in R$$

ଆମେ ଜାଣୁ, ଯେ ଅର୍ଡର ସମାନ କ୍ରମ ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଯୋଗ ସଂଜ୍ଞାଯୁକ୍ତ ଏବଂ ସ୍କେଲାର ଗୁଣନ ହେଉଛି ।

$$\alpha A = [\alpha\, a_{ii}]_{n\times n}$$

i. ମନେକର $[a_{ii}]_{n\times n}, [b_{ii}]_{n\times n} \in V$, ତେବେ

$[a_{ii}]_{n\times n} + [b_{ii}]_{n\times n} = [a_{ii} + b_{ii}]_{n\times n}$ ଏକ କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ମଧ୍ୟ ।

ii. ମନେକର $[a_{ii}]_{n\times n}, [b_{ii}]_{n\times n}, [c_{ii}]_{n\times n} \in V$

$$\therefore \quad [a_{ii}]_{n\times n} + \{[b_{ii}]_{n\times n} + [c_{ii}]_{n\times n}\} = [a_{ii}]_{n\times n} + [b_{ii} + c_{ii}]_{n\times n}$$

$$= [a_{ii}]_{n\times n} + [b_{ii} + c_{ii}]_{n\times n}$$

$$= [a_{ii} + (b_{ii} + c_{ii})]_{n\times n}$$

$$= [(a_{ii} + b_{ii}) + c_{ii}]_{n\times n}$$ [∵ ଯୋଗ R ରେ ସଂଯୋଗୀ]

$$= [a_{ii} + b_{ii}]_{n\times n} + [c_{ii}]_{n\times n}$$

$$= [a_{ii}]_{n\times n} + [b_{ii}]_{n\times n} + [c_{ii}]_{n\times n}$$

iii. ମନେକର $A = [a_{ii}]_{n\times n} \in V.$

ଆମେ ଜାଣୁ n × n ଶୂନ୍ୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସେଟ୍ V ର ଏକ ଉପାଦାନ ଏବଂ ଏହାକୁ 0 ରୂପେ ସୂଚିତ କରାଯାଏ $0 = [0]_{n\times n}$

$$A + 0 = [a_{ii}]_{n\times n} + [0]_{n\times n}$$
$$= [a_{ii} + 0]_{n\times n}$$
$$= [a_{ii}]_{n\times n} = A$$

ଏହି ପରିଭାବେ $0 + A = A$

iv. ମନେକର $A = [a_{ii}]_{n\times n} \in V$, ତେବେ ଏଠାରେ ଅଛି

$$-A = [-a_{ii}]_{n\times n} \in V$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $A + (-A) = [a_{ii}]_{n\times n} + [-a_{ii}]_{n\times n}$
$$= [a_{ii} - a_{ii}]_{n\times n}$$
$$= [0]_{n\times n}$$
$$= 0$$

ଏହି ପରିଭାବେ $(-A) + A = 0$

v. ମନେକର $A = [a_{ii}]_{n\times n}$, $B = [b_{ii}]_{n\times n} \in V$

$\therefore$ $A + B = [a_{ii}]_{n\times n} + [b_{ii}]_{n\times n}$
$$= [a_{ii} + b_{ii}]_{n\times n}$$
$= [b_{ii} + a_{ii}]_{n\times n}$ [$\because$ R ରେ ଯୋଗ କ୍ରମବିନିମୟୀ]
$$= [b_{ii}]_{n\times n} + [a_{ii}]_{n\times n}$$
$$= B + A$$

vi. ମନେକର $a \in \boldsymbol{R}$, $A = [a_{ii}]_{n\times n} \in V$

ବର୍ତ୍ତମାନ $aA = a[a_{ii}]_{n\times n}$
$$= [a.a_{ii}]_{n\times n}$$
$= n \times n$ ଅର୍ଡର କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

vii. ମନେକର $A = [a_{ii}]_{n\times n}$, $B = [b_{ii}]_{n\times n} \in V$ ଏବଂ $a \in \boldsymbol{R}$

$\therefore$ $a(A + B) = a([a_{ii}]_{n\times n} + [b_{ii}]_{n\times n})$
$$= a[a_{ii} + b_{ii}]_{n\times n} = [a(a_{ii} + b_{ii})]_{n\times n}$$
$= [a.a_{ii} + ab_{ii}]_{n\times n}$ [$\because$ R ରେ ବଣ୍ଟନ ନିୟମ]

$= [a \,.\, a_{ii}]_{n\times n} + [a \,.\, b_{ii}]_{n\times n}$

$= a[a_{ii}]_{n\times n} + a[b_{ii}]_{n\times n}$

$= aA + aB$

viii. ମନେକର $a, b \in \boldsymbol{R}$ ଏବଂ $A = [a_{ii}]_{n\times n} \in V$

$\therefore \quad (a + b)\, A = (a + b)\, [a_{ii}]_{n\times n}$

$= [(a + b) \,.\, a_{ii}]_{n\times n}$

$= [a \,.\, a_{ii} + b \,.\, a_{ii}]_{n\times n}$

$= [a \,.\, a_{ii}]_{n\times n} + [b \,.\, a_{ii}]_{n\times n}$

$= a[a_{ii}]_{n\times n} + [b \,.\, a_{ii}]_{n\times n}$

$= a[a_{ii}]_{n\times n} + b \,.\, [a_{ii}]_{n\times n}$

$= aA + bA.$

ix. ମନେକର $a, b \in \boldsymbol{R}$ ଏବଂ $A = [a_{ii}]_{n\times n} \in V$

$\therefore \quad (ab)A = (ab)\, [a_{ii}]_{n\times n}$

$= [(ab)\, a_{ii}]_{n\times n}$

$= [a(ba_{ii})]_{n\times n}$

$= a[b \,.\, a_{ii}]_{n\times n}$

$= a\, ([b[a_{ii}]_{n\times n})$

$= a(bA)$

x. ମନେକର $A = [a_{ii}]_{n\times n} \in V$, ତେବେ

$1 \,.\, A = 1 \,.\, [a_{ii}]_{n\times n} = [1 \,.\, a_{ii}]_{n\times n}$

$= [a_{ii}]_{n\times n} = A$

ଏହିପରି V] ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ର ସମସ୍ତ ଗୁଣକୁ ପୂରଣ କରେ ଏବଂ ତେଣୁ $V(R)$ ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ଅଟେ |

ଉଦାହରଣ୪.୨:- ମନେକର ସମସ୍ତ m×n ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ର ସେଟ୍ ହେଉଛି M । ଏହା ଉପାଦାନ ଗୁଡିକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଯୋଗ ଓ ସ୍କେଲାର ଗୁଣନ ଭିତ୍ତିକ, କ୍ଷେତ୍ର R ରେ M ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍।

ସମାଧାନ: ସମାନ ଅର୍ଡରର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ m×n ଏବଂ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୁଣନ ମଧ୍ୟ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି।

$M = \{[a_{ij}]_{m\times n};\, a_{ij} \in R\}$

ସମାନ କ୍ରମର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ସଂଜ୍ଞାଯୁକ୍ତ

i. ମନେକର $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n} \in M$, ତେବେ

$$A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}$$

$$= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} \in M$$

ii. ମନେକର $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M, B = [b_{ij}]_{m\times n} \in M, C = [c_{ij}]_{m\times n} \in M$

$\therefore [a_{ij}]_{m\times n} + \{[b_{ij}]_{m\times n} + [c_{ij}]_{m\times n}\}$

$$= [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij} + c_{ij}]_{m\times n}$$

$$= [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]_{m\times n}$$

$$= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m\times n}$$ [$\because$ ଯୋଗ R ରେ ସଂଯୋଗୀ]

$$= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} + [c_{ij}]_{m\times n}$$

$$= [[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}\} + [c_{ij}]_{m\times n}$$

iii. ମନେକର $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଶୂନ୍ୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ '0' ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ଏବଂ $0 \in M$

ଅର୍ଥାତ୍ $0 = [0]_{m\times n}$

ବର୍ତ୍ତମାନ $A + 0 = [a_{ij}]_{m\times n} + [0]_{m\times n}$

$$= [a_{ij} + 0]_{m\times n}$$

$$= [a_{ij}]_{m\times n} = A$$

ଏହି ପରିଭାବେ $0 + A = A$

iv. ମନେକର $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M$, ତେବେ ଏଠାରେ ଅଛି

$$-A = [-a_{ij}]_{m\times n} \in M$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $A + (-A) = [a_{ij}]_{m\times n} + [-a_{ij}]_{m\times n}$

$$= [a_{ij} - a_{ij}]_{m\times n}$$

$$= [0]_{m\times n}$$

$$= 0$$

ଏହି ପରିଭାବେ]$(-A) + A = 0$

v. ମନେକର $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M, B = [b_{ij}]_{m\times n} \in M$

$$A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}$$

$$= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

$$= [b_{ij} + a_{ij}]_{m\times n}$$ [$\because$ R ରେ ଯୋଗ କ୍ରମବିନିମୟୀ]

$$= [b_{ij}]_{m\times n} + [a_{ij}]_{m\times n}$$

$= B + A$

vi. ମନେକର $a \in \boldsymbol{R}$ ଏବଂ $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M$

ବର୍ତ୍ତମାନ] $aA = a[a_{ij}]_{m\times n}$

$= [aa_{ij}]_{m\times n} \in M.$

vii. ମନେକର $a \in \boldsymbol{R}$ ଏବଂ $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M, B = [b_{ij}]_{m\times n} \in M$

$\therefore \quad a(A + B) = a\{[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}\}$

$= a[a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$ [$\because$ R ରେ ଗୁଣନ ର ବଣ୍ଟନ ନିୟମ]

$= [a(a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

$= [a . a_{ij} + a . b_{ij}]_{m\times n}$

$= [a . a_{ij}]_{m\times n} + [a . b_{ij}]_{m\times n}$

$= [a . a_{ij}]_{m\times n} + [a . b_{ij}]_{m\times n}$

$= a[a_{ij}]_{m\times n} + a[b_{ij}]_{m\times n}$

$= aA + aB$

viii. ମନେକର $a, b \in \boldsymbol{R}$ ଏବଂ $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M$

$\therefore \quad (a + b)A = (a + b) [a_{ij}]_{m\times n}$

$= [(a + b) . a_{ij}]_{m\times n}$

$= [a . a_{ij} + b . a_{ij}]_{m\times n}$

$= [a . a_{ij}]_{m\times n} + [b . a_{ij}]_{m\times n}$

$= a[a_{ij}]_{m\times n} + b[a_{ij}]_{m\times n}$

$= aA + bA.$

ix. ମନେକର $a, b \in \boldsymbol{R}$ ଏବଂ $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M$

$\therefore \quad (ab)A = (ab) [a_{ij}]_{m\times n}$

$= [(ab)a_{ij}]_{m\times n}$

$= [a(b . a_{ij})]_{m\times n}$

$= a[b . a_{ij}]_{m\times n}$

$= a\{b[a_{ij}]_{m\times n}\}$

$= a(bA)$

x. ମନେକର $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M$, ତେବେ

$$1 . A = 1 . [a_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [1 . a_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [a_{ij}]_{m\times n} = A$$

ଏହିପ୍ରକାର, M ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ର ସମସ୍ତ ଗୁଣକୁ ପୂରଣ କରିଛି ଏବଂ ଏଥିପାଇଁ M, R ରେ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ୪.୩:ଭେକ୍ଟର $(x_1, x_2, x_3, x_4); \in R^4$ ସେଟ୍ ଯେଉଁଠାରେ $x_2 > 0$ ଏହା ସଧାରଣ ଯୋଗ ସ୍କେଲାର ଗୁଣନ ଭିତ୍ତିକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ କି ?

ସମାଧାନ:ମନେକର $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_2 > 0$ ଯେଉଁଠାରେ $\forall x_i \in R; 1 \le i \le 4\}$

ମନେକର $-1 \in R$ ଏବଂ $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$ ଯେଉଁଠାରେ $x_2 > 0$

ବର୍ତ୍ତମାନ, ଗୁଣଧର୍ମ (vi) ଅନୁସାରେ $au \in V \;\forall\; a \in F$ ଏବଂ $u \in V$

$\Rightarrow \quad -1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4) \notin V$

କାରଣ $x_2 < 0$

$\therefore$ V(R) ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ନୁହେଁ।

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 4.1

1. ପ୍ରମାଣ କର

   i. C ରେ C ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ।

   ii. C, ରେ R ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ନୁହେଁ ।

   iii. Q ରେ C ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ।

   iv. Q ରେ Z ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ନୁହେଁ ।

   v. C ରେ R ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍।

2. ମନେକର $V = \{(a, b) ; a, b \in R\}$ ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଯୋଗ ଏବଂ ସ୍କେଲାର ଗୁଣନ ଭିତ୍ତିକ ବାସ୍ତବିକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ନୁହେଁ, ଯେପରିକି ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭାବରେ ପ୍ରତ୍ୟେକରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି:

   i. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ ଏବଂ $k(a, b) = (0, kb)$

   ii. $(a, b) + (c, d) = (0, b + d)$ ଏବଂ $k(a, b) = (ka, kb)$

   iii. $(a, b) + (c, d) = (ac, bd)$ ଏବଂ $k(a, b) = (ka, kb)$

   iv. $(a, b) + (c, d) = (0, 0)$ ଏବଂ $k(a, b) = (ka, kb)$

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି R^4 ର ଉପସେଟ୍, ସାଧାରଣ ଯୋଗ ଏବଂ ସ୍କେଲାର ଗୁଣନ ପାଇଁ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ଅଟେ? ଭେକ୍ଟର ସେଟ୍ $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ ଯେପରିକି

   a. $x_1 = 0$ b. $x_1 < 0$ c. $x_4 = 0$ d. $x_3^2 \ge 0$

e. $2x_1 + 3x_2 = 0$

4. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସମସ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ସେଟ୍ ଯାହାର ରୂପ $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ ଯେଉଁଠାରେ $x, y \in C$, ରେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯୋଗ ଓ ସ୍କେଲାର ଗୁଣନ ଭିତ୍ତିକ ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ |

ଉତ୍ତର ମାଳା

1. a. ହଁ b. ନାହିଁ c. ହଁ d. ହଁ
   e. ହଁ

୪.୨ ଭେକ୍ଟରର ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳତା ଏବଂ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ରତା :

ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ ଭେକ୍ଟର:ମନେକର V(F) ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ଅଟେ ତେବେ ଭେକ୍ଟର $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \in V$ ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ, ଯଦି ଏଠାରେ ସ୍କେଲାର $a_1, a_2, ..., a_n \in F$ (ସମସ୍ତ ଶୂନ ନୁହେଁ)ଏପରି ଭାବରେ ବିଦ୍ୟମାନ ଅଛି ଯେ

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0$$

ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଭେକ୍ଟର: ମନେକର $V(F)$ ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ | ଭେକ୍ଟର $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \in V$ କୁ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର କୁହାଯାଏ ।

ଯଦି ସେଠାରେ

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0 \text{ ସମସ୍ତ } a_i \in F, 1 \le i \le n \text{ ପାଇଁ}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$$

ଫଳାଫଳ:

i. ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଭାବରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି।

ii. ଏକ ସେଟ୍ ଯେଉଁଥିରେ କେବଳ ଶୂନ ଭେକ୍ଟର ଅର୍ଥାତ୍ {0} ଥାଏ, ତାହା ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳତ ।

iii. ଏକ ସେଟ୍ ଯେଉଁଥିରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ଅଣଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର ଅଛି ତାହା ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର।

iv. ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଏହି ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ଅନ୍ୟଟିର ସ୍କେଲାର ଗୁଣଫଳ ଅଟେ |

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ୪.୪: ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭେକ୍ଟର ପାଇଁ ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳତା /ସ୍ୱତନ୍ତ୍ରତା ପରୀକ୍ଷା କର:

i. $\{(1, 2, 3), (1, 0, 0), (0, 2, 3)\}$ $\boldsymbol{R}^3$ ରେ

ii. $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (0, 1, 3)\}$ $\boldsymbol{R}^3$ ରେ

ସମାଧାନ: ମନେକର u = (1, 2, 3), v = (1, 0, 0), w = (0, 2, 3)

ମନେକର ସ୍କେଲାର୍ a, b, c ପାଇଁ au + bv +cw = 0

$\therefore$ a(1, 2, 3) + b(1, 0, 0) + c(0, 2, 3) = 0

$\Rightarrow$ (a + b, 2a + 2c, 3a + 3c) = (0, 0, 0)

ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନଗୁଡିକୁ ତୁଳନା କରିବା ପରେ, ଆମେ ପାଉ

$$a + b = 0 \quad \ldots(1)$$

$$2a + 2c = 0 \Rightarrow a + c = 0 \quad \ldots(2)$$

$$3a + 3c = 0 \Rightarrow a + c = 0$$

ସମୀକରଣ(1),ରୁ a = –b

ସମୀକରଣ(2),ରୁ a = –c

$\therefore$ a = –b, a = –c, a ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ସମାଧାନ ।

ଯଦି a = 1, b = –1, c = –1, ଏକ ସମାଧାନ ଅଟେ ତେବେ ଦିଅଯାଇଥିବା ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକ ରୈଖିକ ନିର୍ଭଳଶୀଳ ଅଟେ।

ବିକଳ୍ପପଦ୍ଧତି: ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' ସୃଷ୍ଟିକର, ଯାହାର ସ୍ତମ୍ଭ, ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକ।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା $R_3 \to R_3 - \frac{3}{2}R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ଏହି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Aର ଧାଡି ଇକେଲନ୍ ରୂପ ଏବଂ $\rho(A)$ ର ରାଙ୍କ $= 2 < A$ ର ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା ଏଣୁ ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକ ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ।

ii. ସ୍ତମ୍ଭରେ ଭେକ୍ଟର ଲେଖି ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ସୃଷ୍ଟି କର, ଅର୍ଥାତ୍

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା $R_2 \rightarrow R_2 - R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା $R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ଏହି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Aର ଧାଡି ଇକେଲନ୍ ରୂପ ଏବଂ $\rho(A) = 3 = A$ ର ସ୍ତମ୍ଭ -ସଂଖ୍ୟା ।

$\therefore$ ତେଣୁ ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକୁ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର।

ମନ୍ତବ୍ୟ: ଭେକ୍ଟର କି ନାହିଁ ଯାଞ୍ଚ କରିବାକୁ, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର ରେ ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ/ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଯାଞ୍ଚ କରିବା ।

i.ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଗଠନ ଯାହାର ସ୍ତମ୍ଭ ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର ଅଟେ !

ii. ପ୍ରାଥମିକ ଧାଡି ପ୍ରକ୍ରିୟା ବ୍ୟବହାର କର, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ ଧାଡି ଇକେଲନ୍ ରୂପରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କର।

iii. $\rho(A)\begin{cases} n = L.I \\ < n = L.D \end{cases}$ ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା = ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା =ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ଉଦାହରଣ୪.୫: α ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି ଭେକ୍ଟର {(1, –1, 3), (1, 2, –3), (a, 0, 1)} ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ।

ସମାଧାନ: ମନେକର u = (1, –1, 3), v = (1, 2, –3) ଏବଂ w = (a, 0, 1).

ଯେହେତୁ ଭେକ୍ଟରଗୁଡ଼ିକ ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ, ତେବେ

$$au + bv + cw = \mathbf{0}$$

ଯେଉଁଠାରେ a, b, c ଭେକ୍ଟର ଅଟନ୍ତି ଏବଂ ସମସ୍ତେ ଶୂନ ନୁହନ୍ତି ।

$$a(1, -1, 3) + b(1, 2, -3) + c(a, 0, 1) = \mathbf{0}$$

$$(a + b + ac, -a + 2b, 3a - 3b + c) = (0, 0, 0)$$

ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ଗୁଡିକୁ ତୁଳନା କରିବା ପରେ, ଆମେ ପାଉ

$$a + b + ac = 0 \quad ...(1)$$

$$-a + 2b = 0 \quad ...(2)$$

$$3a - 3b + c = 0 \quad ...(3)$$

ସମୀକରଣ (2) x 2+ ସମୀକରଣ(3)

$$\begin{aligned} 3a - 3b + c &= 0 \\ -2a + 4b \quad &= 0 \\ \hline a + \ b + c &= 0 \end{aligned} \qquad ...(4)$$

ସମୀକରଣ (1) ରୁ (4) କୁ ବିୟୋଗ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଆମେ ପାଉ

$$ac - c = 0$$

କିମ୍ବା $c(a - 1) = 0$

କିନ୍ତୁ $c \neq 0$,ତେଣୁ $\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

ଉଦାହରଣ 4.6.ଦର୍ଶାଅ ଯେ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର କ୍ଷେତ୍ରରେ, ସମସ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲର ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କର ସେଟ $\{x^3 - x + 1, x^3 + 2x + 1, x + 1\}$ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟେ।

ସମାଧାନ: ମନେକର a, b, c $\in$R

$$\therefore \quad a(x^3 - x + 1) + b(x^3 + 2x + 1) + c(x + 1) = 0$$

$$(a + b)x^3 + (-a + 2b + c)x + (a + b + c) = 0$$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ xର ସମାନ ଘାତର ସହଗକୁ ସମାନ କଲେ,

$$a + b = 0 \qquad ...(1)$$

$$-a + 2b + c = 0 \qquad ...(2)$$

$$a + b + c = 0 \qquad ...(3)$$

ସମୀକରଣ (1) କୁ ସମୀକରଣ (3) ରୁ ବିୟୋଗ କରିବା ପରେ , ଆମେ ପାଉ

$$c = 0$$

ସମୀକରଣ (2),ରୁ $-a + 2b = 0 \Rightarrow a = 2b$

ସମୀକରଣ (2),ରୁ $a + b = 0 \Rightarrow a = -b$

ଏହି ପ୍ରକାର $-b = 2b \Rightarrow 3b = 0$

$\Rightarrow b = 0$ ତେଣୁ $a = 0$

$a = 0, b = 0, c = 0$. 0 କେବଳ ଗୋଟିଏ ସମାଧାନ ଅଟେ। ତେଣୁ ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟେ ।

ବିକଳ୍ପ ପଦ୍ଧତି: ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଗଠନ କର, ଯାହାର ସ୍ତମ୍ଭ ଭେକ୍ଟରଗୁଡ଼ିକ ଦତ୍ତ ଅଛି

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times3}$$

$R_2 \to R_2 + R_1, R_4 \to R_4 - R_1$ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_4 \leftrightarrow R_3'$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ଏହା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Aର ଧାଡି ସମାନୀୟ ଇକେଲନ୍ ରୂପ।

$\rho(A) = 3 =$ A ର ସ୍ତମ୍ଭର ସଂଖ୍ୟା

ଏଣୁ ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ4.7 ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର ସେଟ୍ $\{(1, -5, -2, 3), (1, 0, 0, -1), (1, 0, 2, 4)\}$ ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର କି ନାହିଁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର $u = (1, -5, -2, 3), v = (1, 0, 0, -1), w = (1, 0, 2, 4)$.

ମନେକର କିଛି ସ୍କେଲାର୍ a, b, c ପାଇଁ $au + bv + cw = 0$ ତେବେ

$$\therefore \quad a(1, -5, -2, 3) + b(1, 0, 0, -1) + c(1, 0, 2, 4) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad (a + b + c, -5a, -2a + 2c, 3a - b + 4c) = (0, 0, 0, 0)$$

ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ଗୁଡିକୁ ସମାନ କରିବାପରେ, ଆମେ ପାଉ

$$a + b + c = 0 \qquad ...(1)$$

$$-5a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$-2a + 2c = 0 \qquad ...(2)$$

$$3a - b + 4c = 0 \qquad ...(3)$$

ସମୀକରଣ (2) ରୁ, ଆମେ ପାଉ $c = 0$

ସମୀକରଣ (1), $a = 0$ ଏବଂ $c = 0$ ରଖିଲେ ଆମେ ପାଉ

$$b = 0$$

$\therefore \quad a = 0, b = 0, c = 0$, କେବଳ ଗୋଟିଏ ସମାଧାନ ଅଟେ।

ତେଣୁ: ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର ସେଟ୍ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟେ।

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 4.2

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକ ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ କିମ୍ବା ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ରତା, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
   i. $\{(2, 3, 1), (-1, 4, -2), (1, 18, -4)\}$
   ii. $\{(0, 2, -4), (1, -2, -1), (1, -4, 3)\}$
   iii. $\{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-1, 4, 5)\}$
   iv. $\{(2, 3, -1, -1), (1, -1, -2, -4), (3, 1, 3, -2), (6, 3, 0, -7)\}$
2. ଯଦି ଭେକ୍ଟର $(1, -1, 3), (1, p, 3)$ ଏବଂ $(1, 0, 1)$ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ ତେବେ pର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
3. ଯଦି ଭେକ୍ଟର $(2, 0, k), (3, -1, 5), (5, -1, 1)$ ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ ତେବେ kର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
4. ଘାତ≤ 4 ପଲିନୋମିଆଲର ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ରେ ,ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ସେଟ୍ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ?
   i. $x + 1, x^3 + x^2, x + x^2, x^3 + x^4, x^4 - 1$
   ii. $x^3 + 1, x^3 - 1, x, x^4 - x$

ଉତ୍ତର ମାଳା

1. i. ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ ii. ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ
   iii. ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର iv. ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ
2. $p = -1$ 3. $k = -4$ 4. i. ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ
   ii. ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର

4.3 ଭେକ୍ଟରର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ

ମନେକର V(F) ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ । ଏକ ଭେକ୍ଟର $v \in V$ କୁ ଭେକ୍ଟର $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ କୁହାଯାଏ ଯଦି v କୁ ଏହି ପ୍ରକାର ଲେଖାଯାଇପାରିବ

ଯଥା $$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$

ଯେଉଁଠାରେ ସ୍କେଲାର୍ a_i's $\in$ F. ।

ଉଦାହରଣ:

i. ମନେକର $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)$, rc ,ତେବେ v = (2, 3, 4)
ଭେକ୍ଟର v_1, v_2 ଏବଂ v_3 ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ଏବଂ ଏହାକୁ ଏହିପରି ଭାବରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ

$$(2, 3, 4) = 2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 4(0, 0, 1)$$

$$v = 2v_1 + 3v_2 + 4v_3$$

ii. 'ଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର o କୁ ଭେକ୍ଟର $v_1, v_2 \dots v_n$ ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ,ଏପରି ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ |

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$$

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ4.8. ଭେକ୍ଟର $u = (2 - 5, 4)$ କୁ $V_3(R)$ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍‌ରେ $v_1 = (1, -3, 2)$ $v_2 = (2, -1, 1)$ ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ଲେଖ।

ସମାଧାନ: ମନେକର $u = av_1 + bv_2; a, b \in R$

$$\Rightarrow \quad (2, -5, 4) = a(1, -3, 2) + b(2, -1, 1)$$

$$(2, -5, 4) = (a + 2b, -3a - b, 2a + b)$$

ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନକୁ ସମାନ କରିବା ପରେ, ଆମେ ପାଉ

$$a + 2b = 2 \quad \dots(1)$$

$$-3a - b = -5 \quad \dots(2)$$

$$2a + b = 4 \quad \dots(3)$$

ସମୀକରଣ (2) ଏବଂ(3) କୁ ଯୋଗ କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଉ

$$a = 1$$

ସମୀକରଣ (3),ରୁ ଆମେ ପାଉ

$$b = 2$$

କିନ୍ତୁ $a = 1, b = 2$ ସମୀକରଣ(1) କୁ ସନ୍ତୁଷ୍ଟ କରେ ନାହିଁ

ଯେପରିକି $\quad a + 2b = 1 + 4 = 5 \neq 2$

ତେଣୁ ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର v_1 ଏବଂ v_2 ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ

ଉଦାହରଣ4.9. a,b,c ପାଇଁ ସର୍ତ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟକର ଯାହା ପାଇଁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & c \end{bmatrix}$ କୁ ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ।

ସମାଧାନ: ମନେକର $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & c \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots(1)$

ଯେଉଁଠାରେ $a_1, a_2, a_3 \in R$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & a_1 + a_2 - a_3 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

ଦୁଇଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସ ର ସମାନତାର ସଂଜ୍ଞାରୁ, ଆମେ ପାଉ

$$a = a_1 + a_2 + a_3 \quad ...(2)$$

$$-b = a_1 + a_2 - a_3 \quad ...(3)$$

$$b = -a_2 \quad ...(4)$$

$$c = -a_1 \quad ...(5)$$

ସମୀକରଣ (2) ଏବଂ(3) ଯୋଗରେ, ଆମେ ପାଉ

$$a - b = 2a_1 + 2a_2 \quad ...(6)$$

ସମୀକରଣ (6) ରେ ସମୀକରଣ (4) ଏବଂ(5) କୁ ବ୍ୟବହାର କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$a - b = -2c - 2b$$

$$a + b + 2c = 0$$

ଯାହାକି ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତ।

ବିକଳ୍ପ : ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ଉପାଦାନଗୁଡିକ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଲେଖି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ [A : B] ଗଠନ କର

$$[A : B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & a \\ 1 & 1 & -1 & : & -b \\ 0 & -1 & 0 & : & b \\ -1 & 0 & 0 & : & c \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1, R_4 \to R_4 + R_1$ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & a \\ 0 & 0 & -2 & : & -b-a \\ 0 & -1 & 0 & : & b \\ 0 & 1 & 1 & : & c+a \end{bmatrix}$$

$R_4 \to R_4 + R_3, R_2 \to \frac{-R_2}{2}$ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & a \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{b+a}{2} \\ 0 & -1 & 0 & : & b \\ 0 & 0 & 1 & : & c+a+b \end{bmatrix}$$

$R_3 \to (-1)R_3, R_4 \to R_4 - R_2$ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & : & a\\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{a+b}{2}\\ 0 & 1 & 0 & : & -b\\ 0 & 0 & 0 & : & \frac{a+b+2c}{2}\end{bmatrix}$$

$R_3 \leftrightarrow R_2$, ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା $$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & : & a\\ 0 & 1 & 0 & : & -b\\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{a+b}{2}\\ 0 & 0 & 0 & : & \frac{a+b+2c}{2}\end{bmatrix}$$

ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତ $a + b + 2c = 0$

ଉଦାହରଣ **4.10.** k ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର,ଯେପରିକି $w = (1, k, 4)$ ଭେକ୍ଟର $u = (1, 2, 3)$ ଓ $v = (2, 3, 1)$ ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ।

ସମାଧାନ:w, ଭେକ୍ଟର u ,v ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ତେବେ, ଏଠାରେ ସ୍କେଲାର $a_1, a_2 \in R$ ଅଛି ଯେପରିକି,

$w = a_1u + a_2v$

$$(1, k, 4) = a_1(1, 2, 3) + a_2(2, 3, 1)$$
$$= (a_1 + 2a_2, 2a_1 + 3a_2, 3a_1 + a_2)$$

ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନକୁ ତୁଳନା କରିବା ପରେ ଆମେ ପାଉ

$a_1 + 2a_2 = 1$ ...(1)

$2a_1 + 3a_2 = k$ ...(2)

$3a_1 + a_2 = 4$ ... (3)

ସମୀକରଣ (1) ଏବଂ(3) ରୁ, ଆମେ ପାଉ

$a_1 = \frac{7}{5}, a_2 = \frac{-1}{5}$

ଏହି ମୂଲ୍ୟକୁ ସମୀକରଣ (2) ରେ ରଖିଲେ, ଆମେ ପାଉ

$\frac{14}{5} - \frac{3}{5} = k \Rightarrow \qquad k = \frac{11}{5}$

ବିକଳ୍ପ ପଦ୍ଧତି: ସ୍ତମ୍ଭରେ u ଓ v ଲେଖିକରି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଗଠନ କର

ଅର୍ଥାତ୍ $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}1\\ k\\ 4\end{bmatrix}$

ତେଣୁ $[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 1 \\ 2 & 3 & : & k \\ 3 & 1 & : & 4 \end{bmatrix}$

R2 – 2R1, R3 ,R3 – 3R1 ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & -1 & : & k-2 \\ 0 & -5 & : & 1 \end{bmatrix}$$

$R3 \rightarrow R3 - 5R2$ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & -1 & : & k-2 \\ 0 & 0 & : & 11-5k \end{bmatrix}$$

ଯେହେତୁ w, u ଓ v ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ, ତେଣୁ

$11 - 5k = 0$

$\Rightarrow k = \frac{11}{5}.$

ଉଦାହରଣ **4.11.**କ'ଣ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $3x^2-5x+7$ କୁ,ପଲିନୋମିଆଲ୍ $2x^2+7x-3$ ଏବଂ $x^2 + 3x - 5$ ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ?

ସମାଧାନ: ମନେକର $3x^2 - 5x + 7 = a(2x^2 + 7x - 3) + b(2x^2 + 3x - 5)$ ଯେଉଁଠାରେ $a,b \in R$

$3x^2 - 5x + 7 = (2a + b)x^2 + (7a + 3b)x + (-3a - 5b)$

x ର ସମାନ ଘାତ ସହଗ କୁ ତୁଳନା କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$3 = 2a+b$ ... (1)

$-5 = 7a+3b$ ... (2)

$7 = -3a-5b$ ... (3)

ସମୀକରଣ (1) ଏବଂ(2) ରୁ, ଆମେ ପାଉ, $a = -14$, $b = 31$

ଏହି ମୂଲ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ (3) ରେ ରଖିଲେ,

$-3(-14) -5(31) = 42 - 155 = -113 \neq 7$ (ସମୀକରଣ (3) ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ.)।

ତେଣୁ,ସମୀକରଣ (1), (2) ଏବଂ(3) ର କୌଣସିସମାଧାନନାହିଁ।

ଏହି ପ୍ରକାର, $3x^2 - 5x + 7$ କୁ $2x^2 + 7x - 3$ ଏବଂ $x^2 + 3x - 5$ ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଉପାରିବ ନାହିଁ ।

ବିକଳ୍ପ ପଦ୍ଧତି:ସ୍ତମ୍ଭରେ x ର ବିଭିନ୍ନ ଘାତର ସହଗକୁ ଲେଖି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଗଠନ କର,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[A : B] = \begin{bmatrix} -3 & -5 & : & 7 \\ 7 & 3 & : & -5 \\ 2 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + \frac{7}{3}R_1, R_3 \to R_3 + \frac{2}{3}R_1$ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

$$\begin{bmatrix} -3 & -5 & : & 7 \\ 0 & -26/3 & : & 34/3 \\ 0 & -7/3 & : & 25/3 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to 3R_2, R_3 \to 3R_3$ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

$$\sim \begin{bmatrix} -3 & -5 & : & 7 \\ 0 & -26 & : & 34 \\ 0 & -7 & : & 25 \end{bmatrix}$$

ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା $R_3 \to R_3 - \frac{7}{26}R_2$ $\sim \begin{bmatrix} -3 & -5 & : & 7 \\ 0 & -26 & : & 34 \\ 0 & 0 & : & 206/13 \end{bmatrix}$

$\rho(A) = 2, \rho(A : B) = 3$, ସମୀକରଣ ସମୂହର କୌଣସି ସମାଧାନ ନାହିଁ

ତେଣୁ, $3x^2 - 5x + 7$ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ।

4.3.1 ରୈଖିକ ବିସ୍ତୃତି:-

ମନେକର V(F)ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ଏବଂS={v1,v2,...,vn} ,ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ V(F)ର ଗୋଟିଏ ଅଣ-ଶୂନ୍ୟ ଉପସେଟ୍‌କୁ ରୈଖୀକ ବିସ୍ତୃତି କୁହାଯାଏ, ଏହା L(S).ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ।

$L(S) = \langle S \rangle$

$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i ; a_i \in F, v_i \in S, n \right.$ ସିମୀତ

ଅର୍ଥାତ୍ Vର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭେକ୍ଟର, Sର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ।

ଉଦାହରଣ: ସେଟ୍ {(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} $R^3(R)$ର $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$ ବିସ୍ତୃତି ସେଟ୍। କାରଣ R^3 ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭେକ୍ଟର ତିନି ଭେକ୍ଟରର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ଭାବରେ ପ୍ରକାଶ କରିହେବ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ4.12: ଯାଞ୍ଚ କର $(1, -3, 5), S = \{(1, 2, 1), (1, 1, -1), (4, 5, -2)\}$ ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେସ୍ ସହିତ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ଅଛି କି ନାହିଁ।

ସମାଧାନ:ଦତ୍ତ ସେଟ୍ S = {(1, 2, 1), (1, 1, -1), (4, 5, -2)}

ଆମକୁ ଏହା ଯାଞ୍ଚ କରିବାର ଅଛିକି (1, –3, 5) Sର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ କି ନାହିଁ ?

ମନେକର a, b, c $\in$R ସ୍କେଲାର, ତେବେ

$$(1, -3, 5) = a(1, 2, 1) + b(1, 1, -1) + c(4, 5, -2)$$

$$(1, -3, 5) = (a + b + 4c, 2a + b + 5c, a - b - 2c)$$

ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନକୁ ତୁଳନା କଲେ, ଆମେ ପାଉ,,

$$1 = a + b + 4c \quad ...(1)$$

$$-3 = 2a + b + 5c \quad ...(2)$$

$$5 = a - b - 2c \quad ...(3)$$

ସମୀକରଣ (1) ଏବଂ(3) ଯୋଗ କଲାପରେ, ଆମେ ପାଉ

$$2a + 2c = 6$$

$$\Rightarrow \quad a + c = 3 \quad ...(4)$$

ସମୀକରଣ (1) ରୁ (2) ବିୟୋଗ ପରେ, ଆମେ ପାଉ

$$-a - c = 4$$

$$\Rightarrow \quad a + c = -4 \quad ...(5)$$

ସମୀକରଣ (4) ଏବଂ(5) କୌଣସି ସମାଧାନ ନାହିଁ।

ଏଣୁ, ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର (1, –3, 5), Sର ଭେକ୍ଟରର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ।

ଉଦାହରଣ4.13: ଦର୍ଶାଅ ଯେ $S = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$, R^3 ରୈଖିକ ବିସ୍ତୃତି ଏବଂ ଭେକ୍ଟର (2, 4, 8) କୁ S ର ଭେକ୍ଟରର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ଲେଖ।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ S = {(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)}।

ମନେକର $(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3$ ସ୍ୱେଚ୍ଛ ଭେକ୍ଟର ଅଟେ।

ବର୍ତ୍ତମାନ (x,y,z)କୁ S ର ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା।

ତେବେ ସ୍କେଲାର $a, b, c \in R$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଏହିପ୍ରକାର ଅଛି ଯେ

$$a(0, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 1, 0) = (x, y, z)$$

$$(b + c, a + c, a + b) = (x, y, z)$$

ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକର ତୁଳନା କଲେ, ଆମେ ପଉ

$$b + c = x \quad ...(1)$$

$$a + c = y \quad ...(2)$$

$$a + b = z \quad ...(3)$$

ସମୀକରଣ (2) ରୁ (1) କୁ ବିୟୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$a - b = y - x \quad ...(4)$$

ସମୀକରଣ (3) ଏବଂ (4) ଯୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$a = \frac{y - x + z}{2}$$

ସମୀକରଣ (4) ରୁ,

$$b = a - y + x$$

$$= \frac{y - x + z}{2} - y + x$$

$$= \frac{x - y + z}{2} \quad ...(5)$$

ସମୀକରଣ (1)ରୁ, ଆମେ ପାଉ,

$$c = x - b$$

$$= x - \frac{x - y + z}{2} \quad \text{[ସମୀକରଣ (5)ରୁ]}$$

$$= \frac{x + y - z}{2}$$

ଏହି ପ୍ରକାର, $(x, y, z) = \frac{y - x + z}{2}(0,1,1) + \frac{x - y + z}{2}(1,0,1) + \frac{x + y - z}{2}(1,1,0)$

ଏହି ପ୍ରକାର, ସେଟ୍S, R^3 ର ବିସ୍ତୃତ ଅଟେ ଅର୍ଥାତ୍ R^3 ରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭେକ୍ଟରରେ S ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ ।

ତେବେ $(x, y, z) = (2, 4, 8)$

$\Rightarrow$ $x = 2, y = 4, z = 8$

$$(2, 4, 8) = \frac{4 - 2 + 8}{2}(0,1,1) + \frac{2 - 4 + 8}{2}(1,0,1) + \frac{2 + 4 - 8}{2}(1,1,0)$$

$$(2, 4, 8) = 5(0, 1, 1) + 3(1, 0, 1) - 1(1, 1, 0)$$

ଏହି ପ୍ରକାର, (2, 4, 8) କୁ S ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ଭାବରେ ପ୍ରକାଶ କରିହେବ |

ପ୍ରଶ୍ନାମାଳା - 4.3

1. ଭେକ୍ଟର $v=(4,-5,9,-7)$ କୁ ଭେକ୍ଟର $V_1=(1,1,-2,1), V_2=(3,0,4,-1), V_3=(-1,2,5,2)$ ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର।
2. R3 (R) ରେ ଭେକ୍ଟର $v=(1,-2,k)$ ବିଚାର କର। k (ଯଦି କିଛିଅଛି) ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ଭେକ୍ଟର $V_1=(3,0,-2)$ $V_2=(2,-1,-5)$ ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ?

3. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $v = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ କୁ $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ 2×2 ଭେକ୍ଟର ସ୍ପଶ୍‌ରେ ପ୍ରକାଶ କର।

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ଭେକ୍ଟର $<(1, 2, 1), (1, 1, -1), (4, 5, -2)>$ ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ।

   i. $(2, -1, -8)$ ii. $\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

5. $\{x^3, x^2 + 2x, x^2 + 2, 1 - x\}$ ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତୃତ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ପଲିନୋମିଆଲ ଅଛି।

   i. $3x + 2$ ii. $3x^2 + x + 5$

   iii. $2x^3 + 3x^2 + 3x + 7$ iv. $x^4 + 7x + 2$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. $v = -3v_1 + 2v_2 - v_3$ 2. $k = -8$ 3. $v = 2v_1 - v_2 + 2v_3$

4. $(2, -1, -8)$ 5. $3x^2 + x + 5$

4.3.2 ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍‌ର ଆଧାର:-

ମନେକର V(F) ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ । ଭେକ୍ଟର $S = \{v_1, v_2, \dots v_3\} \in V$ର ଏକ ଭେକ୍ଟର ସେଟ୍ କୁ Vର ଆଧାର କୁହାଯିବ, ଯଦି

i. $v_1, v_2, \dots v_n$ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର।

ii. $v_1, v_2, \dots v_n$ ବିସ୍ତୃତି V ଅର୍ଥାତ୍, Vର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭେକ୍ଟର,Sର ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକର ଏକ ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ଅଟେ।

ମନ୍ତବ୍ୟ:

i. ଗୋଟିଏ ଆଧାରରେ ଭେକ୍ଟର ସଂଖ୍ୟା ଅଦ୍ୱିତୀୟ କିନ୍ତୁ ଭେକ୍ଟରର ଆଧାର ଅଦ୍ୱିତୀୟ ନୁହେଁ।

ii. ଉଦାହରଣ $\{(1, 0), (0, 1)\}$, $R^2(R)$ ର ଆଧାର ଅଟେ ଏବଂ $\{(1, 1), (1, 0)\}$ ଏହା ମଧ୍ୟ R^2ର ଆଧାର ଅଟେ।ଆଧାରରେ ଭେକ୍ଟର ସଂଖ୍ୟା 2= ମାତ୍ର R^2 ପାଇଁ ଆଧାର ଅସୀମ ଅଟେ।

iii. ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍‌ର ଆଧାରଗୁଡିକ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସେଟ୍ କିନ୍ତୁ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସେଟ୍ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ର ଆଧାର ହେବା ଜରୁରୀ ନୁହେଁ
ଉଦାହରଣ: $\{(1, 0)\}$ ଏକ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସେଟ୍ କିନ୍ତୁ R^2ର ଆଧାର ନୁହେଁ, ଏବଂ$\{(1, 0), (0, 1)\}$, R^2ର ଆଧାର ଏବଂ ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକ ମଧ୍ୟ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟେ।

4.3.3 ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ର ମାତ୍ରା:-

ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍V(F)ର କୌଣସି ଆଧାରରେ ଉପାଦାନଗୁଡକ / ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକର ସଂଖ୍ୟାକୁ Vର ମାତ୍ରା କୁହାଯାଉଛି ଏବଂ ଏହାକୁ ମାତ୍ରା V ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଏ। ଯଦି ମାତ୍ରା V = n, ତେବେ V ହେଉଛି ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ଯାହାର ମାତ୍ରା n ଅଟେ| ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ମାତ୍ରା ସସୀମ ହେଲେ ତାହାକୁ ସସୀମ ମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ କୁହାଯାଏ।

ଉଦାହରଣ : { (1, 0), (0, 1) }, R^2ର ଆଧାର ଅଟେ, ତେବେ R^2ର ମାତ୍ରା = 2

ଫଳାଫଳ

i. ଏକ ଭେକ୍ଟର ସେଟ୍] $v_1, v_2, \ldots v_n$ Vର ଆଧାର ଅଟେ, ଏବଂ କେବଳ ଯଦି Vର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ଅଦ୍ୱିତୀୟ ଭାବେ ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକ $v_1, v_2, \ldots v_n$ ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗରେ ପରିପ୍ରକାଶ ହୋଇଥାଏ।

ii. ଯଦିV ଏକ ସସୀମ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଥିବା ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ତେବେ ଯେକୌଣସି Vର ଦୁଇଟି ଆଧାରର ସମାନ ସଂଖ୍ୟକ ଉପାଦାନ ଥାଏ।

iii. ଯଦି Vର ମାତ୍ରା =n ଏବଂ $S = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ ଏକ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଉପସେଟ୍ Vରତେବେ S,Vର ଆଧାର ଅଟେ।

iv. ଯଦି Vର ମାତ୍ରା =n ଏବଂ $S = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$, Vର ସୃଷ୍ଟିକର୍ତ୍ତା ତେବେ S, Vର ଏକ ଆଧାର ଅଟେ।

v. ଯଦି Vର ମାତ୍ରା =n ଏବଂ $S = \{v_1, v_2, \ldots v_n, v_{n+1}\}$ର (n + 1) ଟି ଭେକ୍ଟର ଅଛି, ତେବେ S ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ କିମ୍ବା ଏକ ସେଟ୍ S ଧାରଣ କରିଥିବା ଭେକ୍ଟରର ମାତ୍ରାଠାରୁ ଅଧିକ ତାହା ସବୁବେଳେ ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ ଅଟେ।

vi. ଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟରର ମାତ୍ରା = 0 ଏବଂ ଶୂନ ଭେକ୍ଟରେ ଆଧାର = { } କିମ୍ବା ϕ

ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍	ମାନକ ଆଧାର	ମାତ୍ରା
$C^n(C)$	$\{(1, 0, \ldots 0), (0, 1, \ldots 0), \ldots, (0, 0, \ldots 1)\}$	n
$C^n(R)$	$\{(1, 0, \ldots 0), (0, 1, \ldots 0), \ldots, (0, 0, \ldots 1), (i, 0, \ldots 0), (0, i, \ldots 0), \ldots, (0, 0, \ldots, i\}$	$2n$
$R^n(R)$	$\{(1, 0, \ldots 0), (0, 1, \ldots 0), \ldots, (0, 0, \ldots 1)$	n
$P_n(C)$, C ରେ	$\{1, x, x^2 \ldots, x^n\}$	$n + 1$
$P_n(C)$ R ରେ	$\{(1, x, x^2, \ldots, x^n, i, ix, ix^2, \ldots, ix^n\}$	$2(n + 1)$
$P_n(R)$, R ରେ	$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$	$n + 1$

ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେସ୍	ମାନକ ଆଧାର	ମାତ୍ରା
$M_{m,\,n}(C)$, C ରେ	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$	mn
$M_{m,\,n}(C)$, R ରେ	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & i \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & i \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & i & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & i \end{bmatrix}$	2(mn)
$M_n(R)$, R ରେ	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$	mn

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ୪.୧୪:- ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକ (2, –1, 0), (3, 5, 1), (1, 1, 2), R^3ର ଆଧାର ସୃଷ୍ଟି କରନ୍ତି।

ସମାଧାନ: ଆମେ ଜାଣୁ R^3ର ମାତ୍ରା =3 ଏବଂ S = {(2, –1, 0), (3, 5, 1), (1, 1, 2)}ତିନି ଭେକ୍ଟର ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସେଟ୍ ତେବେ S କୁ R^3 ର ଆଧାର ହେବା ପାଇଁ Sର ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯଥେଷ୍ଟ ହେବ,

ମନେକର a, b, c $\in$ R ଯେପରିକି

$$a(2, -1, 0) + b(3, 5, 1) + c(1, 1, 2) = 0$$

$$\Rightarrow (2a + 3b + c, -a + 5b + c, b + 2c) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a + 3b + c = 0$$

$$-a + 5b + c = 0$$

$$b + 2c = 0$$

ଏହି ସମୀକରଣଗୁଡିକୁ ସମାଧାନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା a = 0, b = 0, c = 0

ଏଣୁ: S, ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଏବଂ R^3ର ଆଧାର ସୃଷ୍ଟି କରେ।

ବିକଳ୍ପପଦ୍ଧତି: ସ୍ତମ୍ଭରେ ଭେକ୍ଟର ଲେଖି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Aକୁ ଗଠନ କର, ଅର୍ଥାତ୍

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା $R_2 \leftrightarrow R_1$ $\sim \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା $R_2 \to R_2 + 2R_1 \sim \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 13 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା $R_2 \to R_2 - 13R_3 \sim$ $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା $R_2 \leftrightarrow R_3$ $\sim \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -23 \end{bmatrix}$

ଏହା Aର ଧାଡି ଇକେଲନ୍ ରୂପ ଅଟେ ତେବେ $\rho(A) = 3$ = ସ୍ତମ୍ଭର ସଂଖ୍ୟା

ଏଣୁ, ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଏବଂ R^3 ରେ ଆଧାର ସୃଷ୍ଟି କରେ, ତେବେR^3 ର ମାତ୍ରା = 3.

ଉଦାହରଣ୪.୧୫:- ଭେକ୍ଟର $(-3, 1, 2), (0, 1, 3), (2, 1, 0), (1, 1, 1)$ ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ସ୍ପେଶ୍‌ର ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ମନେକର $S = \{(-3, 1, 2), (0, 1, 3), (2, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

ସ୍ପଷ୍ଟଭାବେ $\{(-3, 1, 2)\}$ ଏକ ଉପାଦାନ ବିଶିଷ୍ଟ ସେଟ୍ ଯାହା ଅଣ ଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର

$\{(-3, 1, 2), (0, 1, 3)\}$ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଭେକ୍ଟର ସେଟ୍ କାରଣ ଭେକ୍ଟର ଅନ୍ୟ କାହାର ସ୍କେଲାର ଗୁଣନ ନୁହଁ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ମନେକର ତିନୋଟି ଭେକ୍ଟରର ସେଟ୍$\{(-3, 1, 2), (0, 1, 3), (2, 1, 0)\}$.

ମନେକର$a(-3, 1, 2) + b(0, 1, 3) + c(2, 1, 0) = 0$

$\Rightarrow \quad (-3a + 2c, a + b + c, 2a + 3b) = 0$

$\Rightarrow \quad -3a + 2c = 0 \quad ...(1)$

$a + b + c = 0 \quad ...(2)$

$2a + 3b = 0 \quad ...(3)$

ସମୀକରଣ (2) କୁ 2 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ ଏବଂ ଏହାକୁ ସମୀକରଣ (1) ରୁ ବିୟୋଗ କଲେ ଆମେ ପାଇବା

$-5a - 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad 5a + 2b = 0 \quad ...(4)$

ସମୀକରଣ (3) ଏବଂ(4) କୁ ସମାଧାନ କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$a = 0, b = 0$

ବର୍ତ୍ତମାନ ସମୀକରଣ (1),ରୁ $c = 0$

ତାହେଲେ, କେବଳ ସମାଧାନ $a = 0, b = 0, c = 0$ ଅଟେ।

ଏହି ପ୍ରକାର, ଭେକ୍ଟର ସେଟ୍ ଗୁଡିକ $\{(-3, 1, 2), (0, 1, 3), (2, 1, 0)\}$ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସେଟ୍। Sର ଉପାଦାନ $S \in R^3$

$\therefore$ R^3 ର ମାତ୍ରା = 3

ଯେହେତୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ $n + 1$ ଭେକ୍ଟରର ସେଟ୍ n ମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ଏବଂ Vର ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ ଅଟେ।

$\therefore$ S ରୈଖିକ ବିର୍ଭରଶୀଳ।

ଏଣୁ, $\{(-3, 1, 2), (0, 1, 3), (2, 1, 0)\}$ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଏବଂ ବିସ୍ତୃତି R^3 ତେଣୁ ଏହା R^3 ର ଆଧାର।

ମନ୍ତବ୍ୟ: ଭେକ୍ଟରର ବିସ୍ତରଣ

i. ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଗଠନ କର ଯାହାର ଧାଡିଗୁଡିକ ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର ଅଟେ।

ii. ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ଧାଡି ପ୍ରକ୍ରିୟା ବ୍ୟବହାର କରି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ ଧାଡି ଇକଲନ୍ ରୂପକୁ ହ୍ରାସ କର।

iii. ସେହି ସ୍ତମ୍ଭକୁ ଚୟନ କର ଯାହାର ପିଭଟ ଉପାଦାନ ନଥିବ।

iv. ଏକ ଭେକ୍ଟରକୁ ଚୟନ କରି ଭେକ୍ଟରର ସେଟ୍ ବିସ୍ତାର କର ଯେପରି ସମସ୍ତ ସ୍ତମ୍ଭର ପିଭଟ ଥିବ,

ଉଦାହରଣ୪.୧୬: ଭେକ୍ଟର $\{(1, 2, 3), (2, 2, 3)\}$ ରସେଟ୍ କୁ R^3 ର ଆଧାର ତିଆରି କରିବା ପାଇଁ ବିସ୍ତାର କର।

ସମାଧାନ: ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ସୃଷ୍ଟି କର, ଯାହାର ଧାଡିଗୁଡିକ ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର,

ଅର୍ଥାତ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$

$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

ଯାହାକି ଧାଡି ଇକେଲନ୍ ରୂପ ଏବଂ ତୃତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭରେ ପିଭଟ ନାହିଁ,

$\therefore$ ଦତ୍ତ ତିନୋଟି ଭେକ୍ଟର $\{(1, 2, 3), (2, 2, 3), (0, 0, 1)\}$ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଏବଂ R^3ର ଆଧାର

ମନ୍ତବ୍ୟ: ଆଧାରର ବିସ୍ତାର ଅଦ୍ୱିତୀୟ ନୁହେଁ।

ଉଦାହରଣ୪.୧୭:- ଭେକ୍ଟର $\{(1, 2, 3), (2, 1, 0)\}$ର ସେଟ୍‌କୁ ଆଧାର ତିଆରି କରିବା ପାଇଁ ବିସ୍ତାର କର,

ସମାଧାନ: ଯେହେତୁ R^3 ର ମାତ୍ରା = 3

ମନେକର $A = \{(1, 2, 3), (2, 1, 0)\}$

ସ୍ପଷ୍ଟ ରୂପରେ, A, ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସେଟ୍ କାରଣ ସେହିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେହିବି ଅନ୍ୟର ସ୍କେଲାର ଗୁଣିତକ ନୁହନ୍ତି।

ବର୍ତ୍ତମାନ, ଆମ୍ଭେ ଏକ ଅଧିକ ଭେକ୍ଟର ଆବଶ୍ୟକ କରୁ ଯାହା ସେଟ୍ A ଗଠନ କରିବ R^3 ର ଆଧାର।

R^3ର ମାନକ ଆଧାରଗୁଡିକ $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ଅଟେ।

ମନେକର $S = \{(1, 2, 3), (2, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

ପ୍ରଥମ ତିନୋଟି ଭେକ୍ଟର ନେଇ ଆରମ୍ଭ କରିବା ଏବଂ ପରୀକ୍ଷା କରିବା ସେହିମାନେ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସେଟ୍ କି ନୁହେଁ।

ମନେକର $a(1, 2, 3) + b(2, 1, 0) + c(1, 0, 0) = 0$

$\Rightarrow (a + 2b + c, 2a + b, 3a) = 0$

$\Rightarrow \quad a + 2b + c = 0 \quad ...(1)$

$2a + b = 0 \quad ...(2)$

$3a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad ...(3)$

ସମୀକରଣ (3) କୁ (2) ବ୍ୟବହାର କଲେ, ଆମ୍ଭେ ପାଉ b =0

ବର୍ତ୍ତମାନ, ସମୀକରଣ (1)ରୁ ପାଇବା a =0

ତେଣୁ, ସମୀକରଣ (1), 2)) ଏବଂ(3)ର କେବଳ ମାତ୍ର ସମାଧାନ a = 0, b = 0, c = 0

∴ ସେଟ୍ {(1, 2, 3), (2, 1, 0), (1, 0, 0)} ଏକ ଆଧାର ସୃଷ୍ଟି କରେ ଏବଂ ଏହା ଆବଶ୍ୟକ ବିସ୍ତାରିତ ସେଟ୍।

ବିକଳ୍ପପଦ୍ଧତି: ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ସୃଷ୍ଟି କର ଯାହାର ଧାଡିଗୁଡିକ ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା $R_2 \to R_2 - 2R_1$,~ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା $R_2 \to \left(\frac{-1}{3}\right)R_2$,~$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ଯାହାକି Aର ଧାଡି ଇକେଲନ୍ ରୂପ ଅଟେ ଏବଂ ତୃତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭରେ ପିଭଟ ନାହିଁ। ଏଣୁ ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟେରଗୁଡିକ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଏବଂ R^3 ର ଆଧାର ଗଠନ କରେ |

ଉଦାହରଣ୪.୧୮:- W ର ଆଧାର ଏବଂ ମାତ୍ରା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହା R^3 ର ଭେକ୍ଟର (1, –1, 1), (8, 4, 2), (2, 2, 0), (3, 9, –3) ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଛି।

ସମାଧାନ: ଆମକୁ ପରୀକ୍ଷା କରିବାର ଅଛି ଏହି ଚାରୋଟି ଭେକ୍ଟର ମଧ୍ୟରୁ କେତୋଟି ଭେକ୍ଟର ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର।

ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଗଠନକର ଯାହାର ଧାଡିଗୁଡିକ ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 8R_1$, $R_3 \to R_3 - 2R_1$, $R_4 \to R_4 - 3R_1$ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 12 & -6 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 12 & -6 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to \frac{1}{6}R_2$, $R_3 \to \frac{1}{2}R_3$, $R_4 \to \frac{1}{6}R_4$~ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

$R_3 \to R_3 - R_2$, $R_4 \to R_4 - R_2$ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ଅଣଶୂନ୍ୟ ଧାଡି, Wର ଆଧାର ତିଆରି କରେ।

$\therefore$ Wର ମାତ୍ରା =2

ବିକଳ୍ପପଦ୍ଧତି: ସ୍ପଷ୍ଟ ରୂପରେ (1, -1,1) ଏକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର ହୋଇଥବା ହେତୁ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟେ ଏବଂ {(1,-1,1),(8,4,2)} ମଧ୍ୟ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟେ କାରଣ ଏଥିମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟି ଅନ୍ୟମାନଙ୍କର ସ୍କେଲାର ଗୁଣିତକ ନୁହେଁ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଯାଞ୍ଚ କର {(1,-1,1), (8,4,2), (2,2,0)} ଭେକ୍ଟର ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ କିମ୍ବା ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର,

ମନେକର a, b, c $\in R$ ସ୍କେଲାର ଅଟେ ଯେପରିକି $a(1, -1, 1) + b(8, 4, 2) + c(2, 2, 0) = \mathbf{0}$

$$[a + 8b + 2c, -a + 4b + 2c, a + 2b) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad a + 8b + 2c = 0 \quad ...(1)$$

$$-a + 4b + 2c = 0 \quad ...(2)$$

$$a + 2b = 0 \quad ...(3)$$

ସମୀକରଣ (2) କୁ (1) ରୁ ବିୟୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$2a + 4b = 0$$

$$\Rightarrow \quad a + 2b = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = -2b$$

ସମୀକରଣ (1), ରୁ

$$-2b + 8b + 2c = 0$$

$$6b + 2c = 0$$

$$c = -3b$$

$\therefore$ $a = -2b, c = -3b$, b ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ଏକ ସମାଧାନ ଅଛି।

ବିଶେଷରୂପରେ, ଯଦି $b = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -2, b = -3$ ଏକ ସମାଧାନ ଅଛି।

ଏଣୁ {(1, −1, 1), (8, 4, 2), (2, 2, 0)} ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ ଅଟେ।

ଏହି ପ୍ରକାର ସେଟ୍ {(1, −1, 1), (8, 4, 2), (3, 9, −3)}କୁ ମଧ୍ୟ ଯାଞ୍ଚକର। ଏହି ସେଟ୍ ମଧ୍ୟ ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ ଅଟେ।

ଏହି ପ୍ରକାର wର ଆଧାର = {(1, −1, 1), (8, 4, 2)} ଏବଂ Wର ମାତ୍ରା = 2

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା-4.4

1. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭେକ୍ଟର ସେଟ୍ R^4 ର ଆଧାର
   i. {(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)}
   ii. {(1, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (1, 2, 3, 0), (1, 2, 0, 4)}
2. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭେକ୍ଟର ସେଟ୍ R^3ର ଆଧାର :
   i. {(4, 3, 2), (2, 1, 0), (–1, 1, –1)}
   ii. {(–1, 1, 0), (0, 3, –3), (2, 0, 1)}
   iii. {(2, 1, 4), (1, –1, 2), (3, 1, –2)}
3. ଭେକ୍ଟର {(1, 1, 1), (1, 0, –1), (3, –1, 0), (2, 1, –2)} ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତୃତ ସବ-ସ୍ପେଶ୍‌ର ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର
4. ଭେକ୍ଟର {(3, 2, 4), (1, 0, 2), (1, –1, –1), (6, 7, 5)} ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତୃତ ସବ-ସ୍ପେଶ୍‌ର ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର
5. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭେକ୍ଟର ସେଟ୍‌ର R^3 ର ଆଧାର ଗଠନ କରିବାକୁ ବିସ୍ତାର କର।
   i. {(1, 2, 3), (2, –2, 0)}
   ii. {(2, 1, –3), (1, –2, 2)}
   iii. {(0, 1, 2), (2, –1, 4)}

6. ମନେକର, Rରେ n×n ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର V ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ଏବଂ

ଭେକ୍ଟର, $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଥିବା W ଏକ ସବ-ସ୍ପେଶ୍ ଦର୍ଶାଅ

ଯେ $\left\{\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ ଏକ ଆଧାର ସୃଷ୍ଟି କରେ ଓ Wର ମାତ୍ରା = 2

ଉତ୍ତରମାଳା

3. {(1, 1, 1), (1, 0, –1), (3, –1, 0)}
4. {(3, 2, 4), (1, 0, 2), (1, –1, –1)}
5. i. (1, 2, 3), (2, –2, 0), (1, 0, 0)
   ii. (2, 1, –3), (1, –2, 2), (1, 0, 0)
   iii. (0, 1, 2), (2, –1, 4), (1, 0, 0)

4.4 ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ:-

ମନେକର U ଏବଂ V ସମାନକ୍ଷେତ୍ର F ଉପରେ ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ତେବେ ଏକ ମ୍ୟାପ ଫଳନ $T: U \rightarrow V$ କୁ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ କିମ୍ବା ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ହୋମୋମର୍ଫିଜିମ୍ କୁହାଯାଏ, ଯଦି

i. T ଯୋଗ କୁ ସଂରକ୍ଷଣ କରେ ଅର୍ଥାତ୍,

$T(u + v) = T(u) + T(v)$, ସମସ୍ତ $u, v \in U$ ପାଇଁ

ii. T ସ୍କେଲାର ଗୁଣନକୁ ସଂରକ୍ଷଣ କରେ ଅର୍ଥାତ୍,

$T(au) = a\,T(u)$, ସମସ୍ତ $a \in F, u \in U$ ପାଇଁ

ମନ୍ତବ୍ୟ:

1. ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ସଂଜ୍ଞାରେ ଦୁଇଟି ଗୁଣଧର୍ମ ଗୋଟିଏ ଗୁଣଧର୍ମ ସଂକ୍ଷେପରେ ଲେଖାଯାଇପାରେ।

   $T(au + v) = aT(u) + T(v)$, ସମସ୍ତ $a \in F, u, v \in U$ ପାଇଁ

2. ଯଦି $U = V$,ତେବେ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T:U \rightarrow U$ ରୈଖିକ ଅପରେଟର୍ କୁହାଯାଏ।
3. ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T:U \rightarrow F$ ଯେଉଁଠାରେ F ସ୍କେଲାର୍ କ୍ଷେତ୍ର, ଅଟେ ଏହାକୁ ରୈଖିକ ଫଳନକ ବିଶ୍ଳେଷଣ କୁହାଯାଏ।
4. **ଶୂନ୍ୟ ରୂପାନ୍ତରଣ:** ଶୂନ୍ୟ ମ୍ୟାପ $0:V \rightarrow V$ ଏହି ପ୍ରକାର ଅଟେ $0(v)=0$, ସମସ୍ତ $v \in V$, ପାଇଁ।
5. **ଅଭେଦ ରୂପାନ୍ତରଣ:** ଅଭେଦ ମ୍ୟାପ $I:V \rightarrow V$ ଏହି ପ୍ରକାର $I(v)=V$ ସମସ୍ତ $v \in V$ ପାଇଁ।
6. ଯଦି ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଥିବା ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ ରୈଖିକ ନୁହେଁ, ତେବେ ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ ରୂପାନ୍ତରଣ ନୁହେଁ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ୪.୧୯:-ଦର୍ଶାଅ ଯେ $T(x, y, z) = (3x - y, x + y - 2z)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଥିବା ଫଳନ $T : R^3 \rightarrow R^2$ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ।

ସମାଧାନ: ମନେକର, $u = (x_1, y_1, z_1) \in R^3$ ଏବଂ $v = (x_2, y_2, z_2) \in R^3$.

$$\therefore \quad T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$= (3x_1 + 3x_2 - y_1 - y_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, -2z_1 - 2z_2)$$
$$= \{(3x_1 - y_1) + (3x_2 - y_2), (x_1 + y_1 - 2z_1) + (x_2 + y_2 - 2z_2)\}$$
$$= (3x_1 - y_1, x_1 + y_1 - 2z_1) + (3x_2 - y_2, x_2 + y_2 - 2z_2)$$
$$= T(u) + T(v)$$

ଆଉ ମଧ୍ୟ, $a \in R$ ଏବଂ $u = (x_1, y_1, z_1) \in \boldsymbol{R}^3$, ପାଇଁ ଆମେ ପାଉ

$$T(au) = T(ax_1, ay_1, az_1)$$
$$= (3ax_1, -ay_1, ax_1 + ay_1 - 2az_{1)})$$
$$= a(3x_1 - y_1, x_1 + y_1 - 2z_1)$$
$$= a\,T(u)$$

$\therefore$ T ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ୪.୨୦: ଦର୍ଶାଅ ଯେ $T(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଥିବା ଫଳନ $T : R^2 \to R^3$ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ନୁହେଁ।

ସମାଧାନ: ମନେକର, $u = (x_1, y_1) \in R^2$ ଏବଂ $v = (x_2, y_2) \in R^2$ ସ୍ୱେଚ୍ଛ ଉପାଦାନ ଅଟେ,

$$\therefore \quad T(u) = T(x_1, y_1) = (x_1 + 1, 2y_1, x_1 + y_1)$$

$$T(v) = T(x_2, y_2) = (x_2 + 1, 2y_2, x_2 + y_2)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ
$$T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$= (x_1 + x_2 + 2, 2y_1 + 2y_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \quad ...(1)$$

ଆଉ ମଧ୍ୟ
$$T(u) + T(v) = (x_1 + x_2 + 2, 2y_1 + 2y_2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2) \quad ...(2)$$

ସମୀକରଣ (1) ଏବଂ(2) ରୁ, ଆମେ ପାଉ,

$$T(u + v) \neq T(u) + T(v)$$

ତେଣୁ: T ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ନୁହେଁ।

ଉଦାହରଣ୪.୨୧: ପ୍ରମାଣକର ଯେ, ଫଳନ $T : V \to P_2(x)$ ଯେଉଁଠାରେ V ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ୍ ଗୁଡିକର ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ଯାହା $T(A) = a + (b + c)x + dx^2$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି ତେବେ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V$ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ।

ସମାଧାନ: ମନେକର $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in V$

$$\therefore \quad T(A + B) = T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+f \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a + c) + (b + f + c + g)x + (d + h)x^2$$

$$= [a + (b + c)x + dx^2] + [e + (f + g)x + hx^2]$$

$$= T(A) + T(B)$$

ଆଉ ମଧ୍ୟ $\alpha \in R$ ଏବଂ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V$, ପାଇଁ, ଆମେ ପାଉ,

$$T(\alpha A) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}\right)$$

$$= \alpha a + (\alpha b + \alpha c)x + \alpha dx^2$$
$$= \alpha[a + (b + c)x + dx^2]$$
$$= \alpha T(A)$$

T ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅଟେ।

ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ: ମନେକର ଏକ ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ୍ $T : U \to V$ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ସର୍ତ୍ତ:-

i. U ର ଆଧାର

ii. T ରେ ଆାଧାରର ପ୍ରତିବିମ୍ବ,

ଉଦାହରଣ ୪.୨୨: ମନେକର $T : R^2 \to R^3$ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T(1, 2) = (3, -1, 5)$ ଏବଂ $T(0, 1) = (2, 1, -1)$ ମ୍ୟାପିଙ୍ଗକୁ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଭାବେ ବର୍ଣ୍ଣନା କର।

ସମାଧାନ: ଆମେ ଦେଖିପାରୁଯେ $u_1 = (1, 2)$ ଏବଂ $u_2 = (0, 1)$ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଏବଂ R^2 ର ଆଧାର।

ମନେକର $u = (x_1, x_2) \in R^2$ ସ୍ୱେଚ୍ଛ ଉପାଦାନ ଅଟେ।

ତେଣୁ, u କୁ u_1 ଓ u_2 ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇପାରିବ|

$\therefore$ ଏଠାରେ ସ୍କେଲାର a ଏବଂ bର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଏହିପରି ଅଛି, ଯେପରି କି

$$u = au_1 + bu_2$$
$$(x_1, x_2) = a(1, 2) + b(0, 1) \quad ...(1)$$
$$(x_1, x_2) = (a, 2a + b)$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = a$$
$$x_2 = 2a + b \quad \Rightarrow \quad b = x_2 - 2x_1$$

a ଏବଂ b ମୂଲ୍ୟକୁ ସମୀକରଣ (1) ରେ ରଖିଲେ, ଅମେ ପାଉ,

$$(x_1, x_2) = x_1(1, 2) + (x_1 - 2x_1)\,(0, 1)$$

ଏବେ, T କୁ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$$T(x_1, x_2) = T[(x_1(1, 2) + (x_2 - 2x_1)\,(0, 1)].$$
$$= x_1\, T(1, 2) + (x_2 - 2x_1)\, T(0, 1) \quad [..T,\text{ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ}]$$
$$T(x_1, x_2) = x_1(3, -1, 5) + (x_2 - 2x_1)(2, 1, -1)$$
$$= (3x_1, -x_1, 5x_1) + (2x_2 - 4x_1, x_2 - 2x_1, -x_2 + 2x_1)$$

$T(x_1, x_2) = (2x_2 - x_1, -3x_1 + x_2, 7x_1 - x_2)$ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ

ଉଦାହରଣ୪.୨୩. ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର $T : R^3 \rightarrow R^2$ ଯେପରିକି

$T(1, 1, 1) = (1, 1)$ ଓ $T(1, -1, 1) = (0, 1)$

ସମାଧାନ: ଯେହେତୁ ମାତ୍ରା $R^3 = 3$ ଏବଂ ସେଟ୍ $\{(1, 1, 1), (1, -1, 1)\}$ R^3, ର ଆଧାର ନୁହେଁ, ଏଥିପାଇଁ ଆମେ R^3 ର ଆଧାର ପାଇବା ପାଇଁ ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକ ର ସେଟ୍ କୁ ବିସ୍ତାର କରିବା

R^3 ର ମାନକ ଆଧାର $= \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

ମନେକର $S = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \text{ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା}]$$

ଯାହାକି A ଧାଡି ଇକଲନ୍ ରୂପ ଅଟେ

$$\rho(A) = 3 \text{ ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡିକର ସଂଖ୍ୟା}$$

ତେଣୁ $\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଏବଂ R^3 ର ଆଧାର ସୃଷ୍ଟି କରେ।

ଦତ୍ତ ଅଛି $\quad T(1, 1, 1) = (1, 1)$

$\quad T(1, -1, 1) = (0, 1)$

ମନେକର $\quad T(0, 0, 1) = (0, 0)$

ଅନୁମାନ କର, $u = (x, y, z) \in R^3$ ସ୍ୱେଚ୍ଛ ଉପାଦାନ ଅଟେ ଏବଂ ଏହାକୁ ଆଧାରର ଭେକ୍ଟରକୁ ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇପାରିବ।

ମନେକର, $a, b, c \in R$ ସ୍କେଲାର ଅଟେ ଯେପରିକି

$$u = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 1) + c(0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \quad (x, y, z) = (a + b, a - b, a + b + c)$$

$$\Rightarrow \quad x = a + b$$

$$y = a - b$$

$$z = a + b + c$$

ଏହି ସମୀକରଣଗୁଡିକ ସମାଧାନ କରିବା ପରେ, ଆମେ ପାଉ

$$a = \frac{x+y}{2}, b = \frac{x-y}{2}, c = z - x$$

ଏହି ମୂଲ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ସମୀକରଣ (1)ରେ ରଖିଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$u = \frac{x+y}{2}(1, 1, 1) + \frac{x-y}{2}(1, -1, 1) + z - x(0, 0, 1)$$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ T ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$T(x, y, z) = \frac{x+y}{2} T(1, 1, 1) + \frac{x-y}{2} T(1, -1, 1) + z - x(0, 0, 1) \qquad [T, \text{ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ}]$$

$$T(x, y, z) = \frac{x+y}{2}(1, 1) + \frac{x-y}{2}(0, 1) + (z-x)(0, 0)$$

$$= \left(\frac{x+y}{2}, x\right)$$

ଯାହାକି ଆବଶ୍ୟକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ।

ମନ୍ତବ୍ୟ:ଉତ୍ତର ଅନନ୍ୟ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ କାରଣ ଏହା ବିସ୍ତାରିତ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ତାଙ୍କର ମନୋନୀତ ପ୍ରତିବିମ୍ବ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ।

ଉଦାହରଣ୪.୨୪: ରୈଖିକରୂପାନ୍ତରଣ $T : R^3 \to R^3$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେପରିକି $T(X) = AX$ ଯେଉଁଠାରେ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ସମାଧାନ: ମନେକର $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in R^3$

$$T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\Rightarrow \quad T(X) = Y$$

ତେବେ] $\quad Y = AX \qquad [\because \quad T(X) = AX]$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad y_1 = x_1 + x_3$$

$$y_2 = 2x_1 + x_2 + x_3$$

$$y_3 = -x_1 + x_2 + 2x_3$$

ତେଣୁ, ଆବଶ୍ୟକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ହେଉଛି

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3)$$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା-4.5

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ ରୈଖିକରୂପାନ୍ତରଣ ଅଟେ:

   i. $T : R^3 \to R^2$, $T(x, y, z) = (z, 2x + y)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

   ii. $T : R^3 \to R^2$, $T(x, y, z) = (|x|, 0)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

   iii. $T : R^2 \to R^3$, $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

   iv. $T : R^3 \to R$, $T(x, y, z) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^3$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

   v. $T : R^2 \to R$, $T(x, y) = |2x - 3y|$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

   vi. $T : R^2 \to R$, $T(x, y) = xy$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

   vii. $T : R^2 \to R^3$,$T(x, y) = (x + 2y, 3x - 5y, y)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

   viii. $T : R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x^2, y)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

   ix. $T : R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x \cos\theta + y \sin\theta, -x \sin\theta + y \cos\theta)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

2. ମନେକର P ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡିକର ସମସ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେସ୍ ଅଟେ ତେବେ ଫଳନ$T : P \to P$, ଏହି ପ୍ରକାର ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଛି $T[p(x)] = \frac{d}{dx}p(x)$, ରେ ଯେଉଁଠାରେ $p(x) \in P$, P ରେ ଏକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର।

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକରେ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

   i. $T : R^2 \to R^2$ ଯେପରି କି $T(2, 3) = (4, 5)$ ଏବଂ $T(1, 0) = (0, 0)$

   ii. $T : R^3 \to R^2$ ଯେପରି କି $T(1, 1, -1) = (1, 0)$, $T(4, 1, 1) = (0, 1)$ ଏବଂ $T(1, -1, 2) = (1, 1)$

   iii. $T : R^3 \to R^2$ ଯେପରି କି $(1, 1, 1), (-1, 1, -1), (1, 2, 2)$ R^3 ରୁ $(1, 1), (1, 1), (1, 0)$ R^2 କୁ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅନୁସାରେ ରୂପାନ୍ତରିତ ହୋଇଛି।

4. ନିମ୍ନଲିଖିତରେ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର:

   i. $T : R^3 \to R^2$ ଯେପରି କି $T(1, 2, 3) = (1, 1)$ ଏବଂ $T(0, 1, 2) = (1, 2)$

   ii. $T : R^3 \to R^2$ ଯେପରି କି $T(1, 1, 0) = (1, 0)$ ଏବଂ $T(1, -1, 0) = (1, 1)$

   iii. $T : R^3 \to R^2$ ଯେପରି କି $T(1, 1, 1) = (1, 0)$ ଏବଂ $T(1, 1, 2) = (1, -1)$

5. ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T : R^3 \to R^3$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି$T(X) = AX$ଯେଉଁଠାରେ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$A

ଉତ୍ତରମାଳା

1. i. ହଁ ii. ନାହିଁ iii. ହଁ iv. ନାହିଁ

   v. ନାହିଁ vi. ନାହିଁ vii. ହଁ viii. ନାହିଁ

   ix. ହଁ

3. i. $T(x, y) = \left(\frac{4y}{3}, \frac{5y}{3}\right)$ ii. T(x, y, z) = (5x − 12y − 8z, x − 2y − z)

   iii. T(x, y, z) = (y, x + y − z)

4. i. ଶେଷ ଭେକ୍ଟରକୁ $(0, 0)$ ନେଲା ପରେ T(x, y, z) = (−x + y, −3x + 2y) ଉତ୍ତର ଅନନ୍ୟ ନୁହେଁ।

   ii. $T(x, y, z) = \left(x, \frac{x-y}{2}\right)$ iii. T(x, y, z) = (x, x − z)

4.5 ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ସହିତ ଜଡିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ:-

କ୍ରମିତ ଆଧାର: ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ର ଆଧାରକୁ କ୍ରମିତ ଆଧାର କୁହାଯାଏ, ଯଦି ତାହାର ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ୍ରମରେ ଲଖାଯାଏ। ମନେକର $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ V ର ଆଧାର।

ଏବେ ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକର କ୍ରମ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି, ମନେକର $B' = \{v_2, v_1, v_3\}$.

B ଏବଂ B′ ର ସମାନ ଆଧାର ଅଛି କିନ୍ତୁ ଅଲଗା ଅଲଗା କ୍ରମିତ ଆଧାର ଅଛି କାରଣ B ଏବଂ B′ ରେ ତିନୋଟି ଭେକ୍ଟରର କ୍ରମ ଭିନ୍ନ ଅଟେ

4.5.1କ୍ରମିକ ଆଧାର ଭିତ୍ତିରେ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ:

ମନେକର $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ ଏବଂ $B' = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ ଯଥାକ୍ରମେ ସୀମିତ ମାତ୍ରିକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ U ଏବଂ V ପାଇଁ କ୍ରମିତ ଆଧାର।

ମନେକର $T : U \rightarrow V$ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ।

ଯେହେତୁ $T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n) \in V$ ଏବଂ $\{v_1, v_2, \ldots v_m\}$] V ର ଆଧାର ଅଟେ, ତେଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ

$\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$.କୁ ଅନନ୍ୟ ଭାବରେ ଭେକ୍ଟରର ରୈକିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇପାରିବ।

ମନେକର
$$T(u_1) = a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + ... + a_{1m} v_m$$
$$T(u_2) = a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + ... + a_{2m} v_m$$

....

$T(u_n) = a_{n1} v_1 + a_{n2} v_2 + ... + a_{nm} v_m, a_{ij} \in F$ ସମସ୍ତ $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ ପାଇଁ।

ଏହି ସମୀକରଣ ସମୂହର ସହଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହେଉଛି $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$।

ଏହା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ,ଏକ $m \times n$ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ, ତାହା କ୍ରମିତ ଆଧାର B ଏବଂ B′ ଭିତ୍ତିକ T ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ [T : B, B′] ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ।

$$[T : B, B'] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

ମନ୍ତବ୍ୟ :

i. ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T:U \rightarrow V$ ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର କ୍ରମ $m \times n$ ଅଟେ, ଅର୍ଥାତ୍ Vର ମାତ୍ର ×Uର ମାତ୍ରା

ii. ଯଦି U = V ଏବଂ B, ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବ୍ୟବହୃତ ଆଧାର, ତେବେ T ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ [T:B,B′] ବଦଳରେ [T : B] ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଏ।

iii. ଯଦି B କିମ୍ବା B′କୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରାଯାଉଛି କିମ୍ବା ଉଭୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୋଇଛି, ତେବେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ମଧ୍ୟ ସେହି ଅନୁସାରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୁଏ।

ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T : R^m \rightarrow R^n$ ର ଉଭୟ ପାର୍ଶରେ ମାନକ ଆଧାରରେ, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଜାଣିବା ପାଇଁ ପ୍ରଥମେ ପ୍ରଥମ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନେଇ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଗଠନ କର ଯାହା ଦ୍ୱାରା Tର ସୂତ୍ର ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇପାରିବ ଏବଂ ପୁଣି ଏହାର ପ୍ରଥମ ଧାଡିରେ x,y,z ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଲେଖିବେ ଏବଂ ଏହିପ୍ରକାରରେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇପାରିବ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ: $T : R^2 \rightarrow R^2$] T(x, y) = (x, –y) ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି ମନେକର B = B′ = {(1, 0), (0, 1)}, R^2] ର ମାନକ ଆଧାର ଅଟେ।

ତେବେ, $[T : B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ଯଦି ଆମେ Tର ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ସୂତ୍ରକୁ ଖୋଜିବା ଆବଶ୍ୟକ ଅଛି, ଯେତେବେଳେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ [T : B, B′] , ଏଠାରେ ପ୍ରଣାଳୀ ହେବ [ଯେତେବେଳେ ମାନକ ଆଧାର ଦତ୍ତ ଅଛି]। ପ୍ରଥମ ଧାଡିରେ ସ୍କେଲାରକୁ x,y,z ଇତ୍ୟାଦିରେ ଗୁଣନକର ଏବଂ ଯୋଗକର । ଏହା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କାରୀ ସୂତ୍ରର ପ୍ରଥମ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦିଏ। ଏହି ପ୍ରକାରରେ ଅନ୍ୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିହେବ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ:$T : R^2 \rightarrow R^3$ ଯାହାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ଅଟେ।

ମନେକର B = {(1, 0), (0, 1)} ଏବଂ B′ = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} ଯଥାକ୍ରମେ] R^2 ଏବଂ R^3 ର ମାନକ ଆଧାର ତେବେ T(x, y) = (x – y, –2x + 3y, y).

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ୪.୨୫: ନିମ୍ନଲିଖିତ ପରିସ୍ଥିତିରେ B = {(1, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)} ଏବଂ B′ = {(1, 2), (0, 1)} ରେ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T : \boldsymbol{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଥିବାT(x, y, z) = (x + y, y + z) ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ [T : B, B′]ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ହେଉଛି

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z)$$

∴ କ୍ରମିତ ଆଧାର ପାଇଁ B = {(1, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)}, ଆମେ ପାଉ,

$$T(1, 1, 1) = (2, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} T(1,0,0)=(1,0) \\ T(1,1,0)=(2,1) \end{array}\right\} \quad ...(1)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $T(1, 1, 1)]$ $T(1, 0, 0)]$ $T(1, 1, 0)$ କୁ $B' = \{(1, 2), (0, 1)\}$ ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ଲେଖିଲେ

$T(1, 1, 1) = (2, 2) = a(1, 2) + b(0, 1)$ ସ୍କେଲାର $a, b \in R$ ପାଇଁ ---(2)

ଆମେ ପାଉ, $(2, 2) = (a, 2a + b)$

$\Rightarrow$ $a = 2$

ଏବଂ $2a + b = 2 \Rightarrow b = -2$

ଏହି ମୂଲ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ସମୀକରଣ (2)ରେ ରଖିଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$T(1, 1, 1) = (2, 2) = 2(1, 2) + (-2)(0, 1)$

ସେହିଭଳି $T(1, 0, 0) = (1, 0) = 1(1, 2) + (-2)(0, 1)$

$T(1, 1, 0) = (2, 1) = 2(1, 2) + (-3)(0, 1)$

B ଏବଂ B′ ସହିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ T ହେଉଛି ଉପଯୁକ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀର ଗୁଣାଙ୍କର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

$$[T : B, B'] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

ଉଦାହରଣ୪.୨୬: ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T : R^3 \to R^2$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $[T : B, B'] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ଯେଉଁଠାରେ $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 0, 0)\}$ ଏବଂ $B' = \{(1, 1), (1, -1)\}$.

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $[T : B, B'] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$T(1, 1, 1) =$ B′ ଭେକ୍ଟରର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ଏବଂ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭର ସ୍କେଲାରକୁ ବ୍ୟବହାର କରି

$= 1(1, 1) + 3(1, -1)$

$= (4, -2)$

ସେହିପରି, $T(1, 2, 3) = -1(1, 1) + 1(1, -1) = (0, -2)$

ଏବଂ, $T(1, 0, 0) = 2(1, 1) + 0(1, -1) = (2, 2)$

ବର୍ତ୍ତମାନ, ମନେକର $(x, y, z) \in R^3$ ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ

$(x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(1, 2, 3) + c(1, 0, 0)$ ...(1)

$(x, y, z) = (a + b + c, a + 2b, a + 3b)$

$\Rightarrow$ $x = a + b + c$

$y = a + 2b$

$z = a + 3b$

ଏହି ସମୀକରଣଗୁଡିକୁ ସମାଧାନ କଲାପରେ, ଆମେ ପାଉ

$a = 3y - 2z, b = z - y, c = x - 2y + z$

ସମୀକରଣ (1)ରେ ଏହି ମୂଲ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରିବାପରେ, ଆମେ ପାଉ

$$(x, y, z) = (3y - 2z)(1, 1, 1) + (z - y)(1, 2, 3) + (x - 2y + z)(1, 0, 0)$$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ T ବ୍ୟବହାର କଲେ,

$$T(x, y, z) = (3y - 2z)\,T(1, 1, 1) + (z - y)\,T(1, 2, 3) + (x - 2y + z)\,T(1, 0, 0)$$

[$\because$ T, ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ]

$$= (3y - 2z)(4, -2) + (z - y)(0, -2) + (x - 2y + z)(2, 2)$$

$$= (12y - 8z + 2x - 4y + 2z - 6y + 4z - 2z + 2y + 2x - 4y + 2z)$$

ତେଣୁ, $T(x, y, z) = (2x + 8y - 6z, 2x - 8y + 4z)$

ଯାହାକି ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ।

ଉଦାହରଣ୪.୨୭:- ଯଦି ମାନକ ଆଧାର ସହିତ R^3ରେ ଏକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର Tର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ଅଟେ, ତେବେ

$B' = \{(1, 2, 2), (1, 1, 2), (1, 2, 1)\}$ ଭିତ୍ତିକ ଆପେକ୍ଷିକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Tର ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $[T, B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad T(1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) + (-1)(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) = (1, -1, 1)$$

$$T(0, 1, 0) = 1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + (-1)(0, 0, 1) = (1, 1, -1)$$

$$T(0, 0, 1) = -1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) = (-1, 1, 1)$$

ମନେକର $(a, b, c) \in \boldsymbol{R}^3$ ର ସ୍ୱେଚ୍ଛ ଉପାଦାନ ଅଟେ ଏଥିପାଇଁ (a, b, c) ଭେକ୍ଟରଗୁଡ଼ିକୁ {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ।

ଆମେ ପାଉ $(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ T ବ୍ୟବହାର କରିବାପରେ ଆମେ ପାଉ

$T(a, b, c) = aT(1, 0, 0) + bT(0, 1, 0) + cT(0, 0, 1)$ [$\because$ T ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ହେଉଛି]

$$\Rightarrow \quad T(a, b, c) = a(1, -1, 1) + b(1, 1, -1) + c(-1, 1, 1)$$

$$= (a + b - c, -a + b + c, a - b + c)$$

ଯାହାକି ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ।

ବିକଳ୍ପ ପଦ୍ଧତି: ମନେକର $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$,$\boldsymbol{R}^3$ ର ମାନକ ଆଧାର ତେବେ

$$T(x, y, z) = (x + y - z, -x + y + z, x - y + z)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ କ୍ରମିତ ଆଧାର $B' = \{(1, 2, 2), (1, 1, 2), (1, 2, 1)\}$, ଆମେ ପାଉ

$T(1, 2, 2) = (1, 3, 1)$

$T(1, 1, 2) = (0, 2, 2)$

$T(1, 2, 1) = (2, 2, 0)$

ବର୍ତ୍ତମାନ $T(1, 2, 2), T(1, 1, 2), T(1, 2, 1)$ କୁ $B' = \{(1, 2, 2), (1, 1, 2), (1, 2, 1)\}$ ର ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ଲେଖିଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$T(1, 2, 2) = (1, 3, 1) = a(1, 2, 2) + b(1, 1, 2) + c(1, 2, 1) \quad ...(1)$$

$$(1, 3, 1) = (a + b + c, 2a + b + 2c, 2a + 2b + c)$$

$$\Rightarrow \quad a + b + c = 1$$

$$2a + b + 2c = 3$$

$$2a + 2b + c = 1$$

ଏହି ସମୀକରଣଗୁଡିକ ସମାଧାନ କରିବାପରେ, ଆମେ ପାଉ

$$a = 1, b = -1, c = 1$$

ଏହି ମୂଲ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ସମୀକରଣ (1)ରେ ରଖିଲେ, ଆମେ ପାଉ

$$T(1, 2, 2) = (1, 3, 1) = 1(1, 2, 2) + (-1)(1, 1, 2) + 1(1, 2, 1)$$

ଏହିପ୍ରକାର] $T(1, 1, 2) = (0, 2, 2) = 4(1, 2, 2) + (-2)(1, 1, 2) + (-2)(1, 2, 1)$

ଏବଂ, $T(1, 2, 1) = (2, 2, 0) = -4(1, 2, 2) + 2(1, 1, 2) + 4(1, 2, 1)$

ଏହିପରି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ T ହେଉଛି B ର ଆଧାର ଭିତ୍ତିକ ଆପେକ୍ଷିକ:

$$[T, B'] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 4.6

1. $T(x, y) = (x, -y)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥିବା ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T : R^2 \to R^2$ ପାଇଁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $[T : B, B']$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁଠାରେ

   i. $B = (e_1, e_2)$ ଏବଂ $B' = \{(1, 1), (1, -1)\}$ ii. $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$ ଏବଂ $B' = \{(2, 3), (4, 5)\}$

2. $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_3 + (a_2 + a_3)x + (a_0 + a_1)x^2$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥିବା ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T: P^3 (R) \to P_2 (R)$ ଆଧାର ଯଥାକ୍ରମେ $B = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}$ ଏବଂ $B' = \{1, x, x^2\}$ ର ସମ୍ପର୍କୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଲେଖ।

3. ମନେକର V, କେତେକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବାସ୍ତବ ଫଳନର ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ ଏବଂ B = {1, t, e^t, te^t}], Vର ଏକ ଆଧାର। ମନେକର D : V → V, V ରେ ଅବକଳନ ଅପରେଟର ଅର୍ଥାତ୍ D(f) = $\frac{df}{dt}$. ତେବେ [D, B]ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

4. T : $R^3 \to R^4$ ର ମାନକ ଆଧାର ଆପେକ୍ଷିକ T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + z, 2y – z, 6y)] R^3 ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥିବା ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T: $R^3 \to R^4$ କୁ ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କରୁଥିବା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

5. R^2ଓR^3 ର ମାନକ ଆଧାର ଆପେକ୍ଷିକ, $T(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2, 2x_1 + 4x_2, 5x_1 - 6x_2)$, R^2 ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥିବା ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T : $R^2 \to R^3$ କୁ ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କରୁଥିବା ମ୍ୟାଟ୍ରୀକ୍ସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

6. i. B = {e_1, e_2, e_3} ଏବଂ B′ = {1, 1, 0), (1, 2, 3), (–1, 0, 1)} ର କ୍ରମିତ ଆଧାର ଆପେକ୍ଷିକ, T(x, y, z) = (x – y + z, 2x + 3y – z/2, x + y – 2z) ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥିବା ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T : $R^3 \to R^3$ କୁ ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କରୁଥିବା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

   ii. {(1,3), (2,5)}ର ଆଧାର ଆପେକ୍ଷିକ, ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T(x, y) = (2y, 3x – y)ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥିବା ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T : $R^2 \to R^2$ କୁ ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କରୁଥିବା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

7. B={(1, 1), (–1, 1)} ଏବଂ B′={(1, 1, 1), (1, –1, 1), (0, 0, 1)} କ୍ରମିତ ଆଧାର ଆପେକ୍ଷିକ, ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T : $R^2 \to R^3$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯାହାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ଅଟେ।

8- B = {(1, 0), (1, 1)} ର କ୍ରମିତ ଆଧାର ଆପେକ୍ଷିକ, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 2/3 & 4 \end{bmatrix}$ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ଭିତ୍ତିରେ R^2 ରେ ଥିବା ରୈଖିକ T କୁ ବର୍ଣ୍ଣନା କର।

9. B = {(1, 1), (0, 2)} ଏବଂ B′ = {(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)} ର କ୍ରମିତ ଆଧାର ଆପେକ୍ଷିକ, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ଭିତ୍ତିରେ ରୈଖିକ ମ୍ୟାପ T : $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ କ ବର୍ଣ୍ଣନା କର।

10. ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T : $R^3 \to R^3$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯାହାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ କ୍ରମିତ ଆଧାର ଆପେକ୍ଷିକ ଅଛି

    a. B = B′ = {e_1, e_2, e_3}
    b. B = {(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)}; B′ = {1, 2, 3), (1, –1, 1), (2, 1, 1)}

11. (5, 1, 3), (3, 2, 2), (1, 2, 1) ଆଧାର ଭିତ୍ତିକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T : $R^3 \to R^3$] ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେତେବେଳେ ରୂପାନ୍ତରଣ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ଅଟେ।

12. B = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) ର କ୍ରମିତ ଆପେକ୍ଷିକ, R^3 ରେ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯଦି

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ହୁଏ, ତେବେ B′ = {(0, 1, –1), (–1, 1, 0), (1, –1, 1)} ର ଆଧାର ଆପେକ୍ଷିକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ଉତ୍ତରମାଳା

1. a. $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -9/2 & -5/2 \\ 5/2 & 3/2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$

6. i. $[T : B, B'] = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/4 \\ 1 & 11/2 & -5/4 \end{bmatrix}$ ii. $[T : B] = \begin{bmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{bmatrix}$

7. T(x, y) = (2y – x, y, –3x + 3y)

8. $T(x, y) = \left(\frac{7x+23y}{6}, \frac{2x+10y}{3}\right)$

9. T(x, y) = (–4x + 2y, x, –2x + y)

10. a. T(x, y, z) = (x, y, z) b. T(x, y, z) = (x + 2y – 2z, –x + y + 2z, x + y + z)

12. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4.6 ଦୁଇଟି ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ସଂଯୋଗ (ଗୁଣଫଳ)

ମନେକର, U, V, W କ୍ଷେତ୍ର F ରେ ତିନୋଟି ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ।

ମନେକର $T_1 : U \to V$ ଏବଂ $T_2 : V \to W$ ଦୁଇଟି ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ T_2 ଏବଂ T_1 କୁ $T_2T_1 : U \to W$ ଏହି ପ୍ରକାରର ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରୁ ଯେ,

$(T_2T_1)(u) = T_2(T_1(u))$ ସମସ୍ତ $u \in V$ ପାଇଁ।

ମନ୍ତବ୍ୟ:

i. ଦୁଇଟି ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ସଂଯୋଗ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅଟେ।

ii. T_2T_1 କୁ ଏହି ସର୍ତ୍ତରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛିକି T_1ର ବ୍ୟାପ୍ତି $\subseteq T_2$ ର ପରିସର କିମ୍ବା ପରବର୍ତ୍ତୀ ଉତ୍ପାଦକ ରୂପାନ୍ତରଣର ବ୍ୟାପ୍ତି $\subseteq$ ପୂର୍ବ ଉତ୍ପାଦକ ରୂପାନ୍ତରଣ ପରିସର।

iii. ମନେକର U ଏବଂ V କ୍ଷେତ୍ର F ରେ ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ ଯଦି $T_1 : U \to V$ ଏବଂ $T_2 : U \to V$ ଦୁଇଟି ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ତେବେ

a. T_1 ଏବଂ T_2 ର ସମଷ୍ଟି, $T_1 + T_2 : U \to V$ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ

$(T_1 + T_2)(u) = T_1(u) + T_2(u)]$ ସମସ୍ତ $u \in V$ ପାଇଁ,

b. ଯଦି $a \in F$ ଯେକୌଣସି ସ୍କେଲାର, ତେବେ Tର ସ୍କେଲାର ଗୁଣିତକ a ସହିତ aT ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଏ, ଯେପରିକି$aT : U \to V$ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଏବଂ $(aT)(u) = a(T(u))$, $u \in U$ ପାଇଁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ୪.୨୮:ମନେକର $T_1 : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ ଯେପରିକି $T_1(x, y, z) = (3x, 4y - z)$ ଏବଂ $T_2 : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ ଯେପରି $T_2(x, y) = (-x, y)$, ତେବେ T_1T_2 ଏବଂ T_2T_1 ଗଣନା କର।

ସମାଧାନ: $T_2(=\boldsymbol{R}^2)$ ର ବ୍ୟାପ୍ତି $\not\subseteq T_1(=\boldsymbol{R}^3)$ ର ପରିସର

$\therefore$ T_1T_2 ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ।

ବର୍ତ୍ତମାନ] T_2T_1 ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି କାରଣ $T_1(=\boldsymbol{R}^2)$ ର ବ୍ୟାପ୍ତି $\subseteq T_2(=\boldsymbol{R}^2)$ ର ପରିସର

$$T_2T_1 = \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2 \text{ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅଟେ।}$$

$$T_2T_1(x, y, z) = T_2(T_1(x, y, z)) = T_2(T_1(3x, 4y - z) = (-3x, 4y - z)$$

ଉଦାହରଣ୪.୨୯.ମନେକର TଏବଂS ଦୁଇଟି ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ ରେ ଏହି ପ୍ରକାର ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି ଯେ$T(x, y, z) = (2x -3y, 7y + 2z)$ ଏବଂ $S(x, y, z) = (x - z, y)$ ତେବେ $S + T$, $3S$, $2S - 3T$, ST, TS, $T^2(TT)$ର ଗଣନା କର।

ସମାଧାନ: i. SଏବଂT, ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅଟେ ତେବେ S +T ମଧ୍ୟ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ହେବ।

$S + T : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି, ଯେପରି

$$\begin{aligned}(S + T)(x, y, z) &= S(x, y, z) + T(x, y, z)\\ &= (x - z, y) + (2x - 3y, 7y + 2z)\\ &= (3x - 3y - z, 8y + 2z).\end{aligned}$$

ii. S, ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ, ତେଣୁ3S ମଧ୍ୟ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅଟେ $3S : \boldsymbol{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$,

$((3S)(x, y, z) = 3S(x, y, z) = 3(x - z, y)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି।

$= (3x - 3z, 3y)$

iii. S ଏବଂT, ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅଟେ, ତେଣୁ 2 S, 3T ମଧ୍ୟ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ

∴ 2S – 3T, ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅଟେ

$2S - 3T : \boldsymbol{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି।

$$\begin{aligned}(2S - 3T)(x, y, z) &= 2S(x, y, z) - 3T(x, y, z)\\ &= 2(x - z, y) - 3(2x - 3y, 7y + 2z)\\ &= (2x - 2z, 2y) - (6x - 9y, 21y + 6z)\\ &= (-4x + 9y - 2z, -19y - 6z)\end{aligned}$$

iv. $T(=\boldsymbol{R}^2)$ ର ବ୍ୟାପ୍ତି $\not\subseteq$ $S(=\boldsymbol{R}^3)$ର ପରିସର

∴ ST ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇ ନାହିଁA

v. $S(=\boldsymbol{R}^2)$ ବ୍ୟାପ୍ତି $\not\subseteq$ $T(=\boldsymbol{R}^3)$ ର ପରିସର

∴ TS ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇ ନାହିଁ।

vi. $T(=\boldsymbol{R}^2)$ ବ୍ୟାପ୍ତି $\not\subseteq$ $T(=\boldsymbol{R}^3)$ ର ପରିସର

∴ T^2 ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇ ନାହିଁ।

ଉଦାହରଣ୪.୩୦: ଦୁଇଟି ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T_1 ଏବଂ T_2 ର ଉଦାହରଣ ଦିଅନ୍ତୁ ଯେପରି $T_1T_2 = 0$ ଏବଂ $T_2T_1 \neq 0.$

ସମାଧାନ: ମନେକର T_1 ଓ T_2 ଏହିପରି ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି, ଯେପରି

$T_1 : \boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$ ଦ୍ୱାରା $T_1(x, y) = (0, y)$

ଏବଂ $T_2 : \boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$ ଦ୍ୱାରା $T_2(x, y) = (y, 0)$

∴ T_1T_2 ଏବଂ T_2T_1 ଉଭୟ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି।

ବର୍ତ୍ତମାନ, $(T_2T_1)(x, y) = T_2(T_1(x, y)) = T_2(0, y) = (y, 0) \Rightarrow T_2T_1 = (y, 0) \neq 0$

ଏଠାରେ ମଧ୍ୟ, $(T_2T_1)(x, y) = T_1(T_2(x, y)) = T_1(y, 0) = (0, 0) \Rightarrow T_1T_2 = 0.$

4.6.1 ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ(ଅପରେଟର)ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ:

ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T : U \rightarrow V$ ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ ହେବ ଯଦି ଏହା ଏକ-ଏକ, ଅନନ୍ଟୁ ଏବଂ T ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ, $T^{-1} : V \rightarrow U$ ଯେପରି $T^{-1}(v) = u$ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $T(u) = v.$

ମନ୍ତବ୍ୟ:

i. $T^{-1} : V \to U$ ମଧ୍ୟ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅଟେ।

ii. $T_1 : U \to V$ ଏବଂ $T_2 : V \to w$ ଦୁଇଟି ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ, ତେବେ T_2T_1 ମଧ୍ୟ ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ ଅଟେ ଏବଂ $(T_2T_1)^{-1} = T_1^{-1} T_2^{-1}$.

କେତକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ୪.୩୧: ମନେକର T ଏକ R^3 ରେ ରୈଖିକ ଅପରେଟର ଏହିପରି ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$ ଦର୍ଶାଅ ଯେ T ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ ଏବଂ T^{-1} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଆମେ ଜାଣିଛୁ ଯେ, T ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି T ହେଉଛି ଏକ-ଏକ ଅନତୁ ମ୍ୟାପ

T ହେଉଛି ଏକ-ଏକ: ମନେକର $u = (x_1, y_1, z_1)$ ଏବଂ $v = (x_2, y_2, z_2) \in \boldsymbol{R}^3$ ସ୍ୱେଚ୍ଛ ଭେକ୍ଟର ଯେପରିକି

ମନେକର $T(u) = T(v)$

$$\Rightarrow T(x_1, y_1, z_1) = T(x_2, y_2, z_2)$$

$$\Rightarrow (2x_1, 4x_1 - y_1, 2x_1 + 3y_1 - z_1) = (2x_2, 4x_2 - y_2, 2x_2 + 3y_2 - z_2)$$

$$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$4x_1 - y_1 = 4x_2 - y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

$$2x_1 + 3y_1 - z_1 = 2x_2 + 3y_2 - z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\Rightarrow u = v$$

ତେଣୁ T ଏକ-ଏକ ଅଟେ।

T ହେଉଛି ଅନତୁ: ମନେକର $(x, y, z) \in R^3$,କୌଣସି ଭେକ୍ଟର ଅଛି ଏବଂ ମନେକର $(a, b, c) \in R^3$ ଏକ ଭେକ୍ଟର ଯେପରିକି $T(a, b, c) = (x, y, z)$

$$(2a, 4a - b, 2a + 3b - c) = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow 2a = x$$

$$4a - b = y$$

$$2a + 3b - c = z$$

ଏହି ସମୀକରଣଗୁଡିକ ସମାଧାନ କରିବାପରେ, ଆମେ ପାଉ

$$a = \frac{x}{2}, b = 2x - y, c = 7x - 3y - z$$

ଯେହେତୁ $x, y, z \in R \Rightarrow a, b, c \in R$

$\therefore \quad (a, b, c) \in \boldsymbol{R}^3$

ଏହିପ୍ରକାର T ହେଉଛି ଅନଟୁ ମ୍ୟାପ।

$\therefore$ ଯେହେତୁ T ଏକ-ଏକ ଏବଂ ଅନଟୁ ମ୍ୟାପ ତେବେ T ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ

ଏହିପ୍ରକାର $T(a, b, c) = (x, y, z)$

$$T^{-1}(x, y, z) = (a, b, c)$$

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, 2x - y, 7x - 3y - z\right).$$

ବିକଳ୍ପ ପଦ୍ଧତି: $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$

ମାନକ ଆଧାର ଆପେକ୍ଷିକ, T ସହିତ ଜଡିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହେଉଛି,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A, ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $|A| \neq 0$

$$|A| = 2(1 - 0) - 0 + 0 \qquad [R_1 \text{ ରେ ବିସ୍ତାର କଲେ}]$$

$$\Rightarrow \quad |A| = 2 \neq 0$$

ଆମେ ଜାଣୁ $A^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 14 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{\prime}$

ଏହିପ୍ରକାର $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 14 & -6 & -2 \end{bmatrix}$

କିମ୍ବା $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

ଏହିପରି, ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T^{-1} : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ ମାନକ ଆଧାର ଆପେକ୍ଷିକ, ହେଉଛି।

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, 2x - y, 7x - 3y - z\right)$$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା-4.7

1. ମନେକର ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T_1 : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ ଯେପରିକି $T_1(x, y, z) = (4x, 3y - 2z)$ ଏବଂ $T_2 : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ ଯେପରିକି $T_2(x, y) = (-2x, y)$ ତେବେ T_1T_2 ଏବଂ T_2T_1 ଗଣନା କର।

2. $T_1 : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$, $T_2 : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ ଏବଂ $T_3 : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଏହିପରି ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଛି $T_1(x, y, z) = (y, x+z)$,
   $T_2(x, y, z) = (2z, x - y)$, $T_3(x, y) = (y, 2x)$
   ନିମ୍ନଲିଖିତ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ପାଇଁ, ସୂତ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି ଏହାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି।
   i. T_1T_3 ii. T_2T_3 iii. T_3T_1 iv. T_3T_2
   v. $T_3T_1 + T_3T_2$
3. ମନେକର T_1 ଏବଂ T_2 , $\boldsymbol{R}^2$ ରେ ଅପରେଟର, ଏହିପରି ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଛି ଯେ, $T_1(x, y) = (0, x)$ ଏବଂ $T_2(x, y) = (y, x)$, ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତକୁ ଗଣନା କର।
   i. $T_1 + T_2$ ii. $2T_2 - 3T_1$ iii. T_2T_1 iv. T_1T_2
   v. T_2^2 vi. T_1^2
4. ମନେକର $T : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^2$, $T(x, y, z, t) = (x - y + 2z, y - t)$ ଦ୍ୱାରା ଦତ୍ତ ଏବଂ ମନେକର $S : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ $S(x, y) = (x + 3y, -x + y, 2y)$ ଦ୍ୱାରା ଦତ୍ତ ଅଛି ଦର୍ଶାଅ ଯେ S, T ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅଟେ।
5. ମନେକର T ଏବଂ S, $\boldsymbol{R}^3$ ରେ ରୈଖିକ ଅପରେଟର୍, ଯେଉଁଠି $T(x, y, z) = (x - 3y, -2z, y - 4z)$ ଏବଂ $S(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି ଦର୍ଶାଅ ଯେ $ST \neq TS$.
6. ମନେକର $T : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ ଯେଉଁଠି $T(x, y, z) = (0, x, y)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $T^2 \neq 0$ କିନ୍ତୁ $T^3 = 0$.
7. ମନେକର $T : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ ରୈଖିକ ଅପରେଟର ଯେଉଁଠି $T(x, y, z) = (0, 0, x)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $T \neq 0$ କିନ୍ତୁ $T^2 = 0$.
8. ଏକ ଉଦାହରଣ ସାହାଯ୍ୟରେ ବୁଝାଅ ଯେ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଏହିପରି ଅଛି, $T_1 : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ ଏବଂ $T_2 : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ ର ଯେପରିକି $T_2T_1 = 0$ କିନ୍ତୁ $T_1T_2 \neq 0$.
9. ଯଦି $T : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ ରୈଖିକ ଅପରେଟର୍ ଅଛି ଯେଉଁଠି $T(x, y, z) = (x + z, x - z, y)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି ଦର୍ଶାଅ କି T ଏକ ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ ଏବଂ T^{-1} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରନ୍ତୁ।
10. ଦର୍ଶାଅ କି R^3 ଉପରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅପରେଟର T ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ ଏବଂ T^{-1} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର:
    i. $T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$ ii. $T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$
11. ମନେକର $T : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ ରୈଖିକ ଅପରେଟର୍ ଯେଉଁଠି $T(x, y) = (y, 2x - y)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି ଦର୍ଶାଅ କି T ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ ଏବଂ T^{-1} ପାଇଁ ଏକ ସୂତ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ଉତ୍ତରମାଳା

1. T_1T_2 ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇନାହିଁ $T_2T_1(x, y, z) = (-8x, 3y - 2z)$
2. i. ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇନାହିଁ ii. ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇନାହିଁ

iii. $T_3T_1(x, y, z) = (x + z, 2y)$ iv. $T_3T_2(x, y, z) = (x - y, 4z)$

v. $T_3T_1 + T_3T_2(x, y, z) = (2x - y + z, 2y + 4z)$

3. i. $(T_1 + T_2)(x, y) = (y, 2x)$ ii. $(2T_2 - 3T_1)(x, y) = (2y, -x)$

iii. $(T_2T_1)(x, y) = (x, 0)$ iv. $(T_1T_2)(x, y) = (0, y)$

v. $(T_2^2)(x, y) = (x, y)$ vi. $(T_1^2)(x, y) = (0, 0)$

8. $T_1(x, y) = (0, x), T_2(x, y) = (x, 0)$ 9. $T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}, z, \frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$

10. i. $T^{-1}(x, y, z) = (x + 3y + 14z, y + 4z, z)$ ii. $T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{x}{3}-y, z-x+y\right)$

4.7 ଶୂନ୍ୟସ୍ପେଶ କିମ୍ବା ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର କର୍ଣ୍ଣେଲ:

ମନେକର $T : U \to V$ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T ର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ (କର୍ଣ୍ଣେଲ), U ର ଉପସେଟ୍ ଅଟେ ,ଯେଉଁଠି ସବୁ ଭେକ୍ଟର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଅଛି ଯାହାର ପ୍ରତିବିମ୍ବ T ରେ । ଏହାକୁ N(T) କିମ୍ବା ker(T)ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଏ।

$$\text{Ker}(T) = N(T) = \{u \in U : T(u) = 0\}.$$

4.8 ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ବ୍ୟାପ୍ତି କିମ୍ବା ପ୍ରତିବିମ୍ବ:

ମନେକର$T : U \to V$ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ। ତେବେ Tର ବ୍ୟାପ୍ତି ସ୍ପେଶ (ପ୍ରତିବିମ୍ବ) ସେହି ସବୁ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକର ସେଟ୍ ଅଟେ। ଯେଉଁଠିକି T ର ଅନ୍ତର୍ଗତ U ର ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକର ପ୍ରତିବିମ୍ବ ଅଛି।ଏହାକୁ R(T)ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଏ।।

$$R(T) = \{T(u), u \in U\}.$$

4.9 ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ରାଙ୍କ ଓ ନଲିଟି (ଶୂନ୍ୟତା)

ମନେକର $T:U\to V$ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ। Tର ରାଙ୍କ କୁ $\rho(T)$ ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଏ ଏବଂ R(T)ର ମାତ୍ରା ଭାବରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଏ। Tର ଶୂନ୍ୟତାକୁ $\mu(T)$ ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଏ ଏବଂ N(T) ର ମାତ୍ରା ଭାବରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଏ।

4.9.1 ସିଲଭେଷ୍ଟରଙ୍କ ନିୟମ ରାଙ୍କ-ଶୂନ୍ୟତା ଉପପାଦ୍ୟ:

ମନେକର $T : U(F) \to V(F)$, ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ତେବେ

ରାଙ୍କ T + ଶୂନ୍ୟତା T = ମାତ୍ରା U

ଅର୍ଥାତ୍ $\rho(T) + \mu(T) = \dim U$

କିମ୍ବା $\dim(R(T)) + \dim(N(T)) = \dim U$

ପ୍ରମାଣ:ମନେକର $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, N(T) ର ଆଧାର ତେଣୁ $\dim(N(T)) = \mu(T) = n$

S, N(T) ର ଆଧାର, ତେଣୁ S, N(T) ରେ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଏବଂ $N(T) \subseteq U$

$\Rightarrow$ S, U ରେ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଏବଂ ଏହାକୁ U ପାଇଁ $S' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_m\}$ ର ଆଧାରରେ ସଂପ୍ରସାରଣ କରାଯାଇପାରିବ।

ଏଣୁ: $\dim(N(T)) = \mu(T) = n$

$\therefore \quad \dim U = m$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିବା କି ସେଟ୍

$$P = \{T(u_{n+1}), T(u_{n+2}), \ldots, T(u_m)\}, R(T)$$

ଯେହେତୁ S′, U ର ଆଧାର ଏବଂ ଯେକୌଣସି ଭେକ୍ଟର $u \in U$ ପାଇଁ S ର ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ| A

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n + a_{n+1}u_{n+1} + \ldots + a_mu_m$$

T ଯେତେବେଳେ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ପ୍ରୟୋଗ କରିବାପରେ, ଆମେ ପାଉ,

$$T(u) = a_1 T(u_1) + a_2 T(u_2) + \ldots + a_n T(u_n) + a_{n+1} T(u_{n+1}) + \ldots + a_m T(u_m)$$

[∵ T ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅଟେ]

$$T(u) = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \ldots + \mathbf{0} + a_{n+1} T(u_{n+1}) + \ldots + a_m T(u_m) \qquad [\because \; u_i \in N(T), 1 \le i \le n]$$

$$T(u) = a_{n+1} T(u_{n+1}) + \ldots + a_m T(u_m)$$

∴ T(u), ସେଟ୍ P ର ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ଅଟେ ଏବଂ ଏହିପ୍ରକାର P,R(T)କୁ ବିସ୍ତାର କରେ,

ବର୍ତ୍ତମାନ, P ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଦର୍ଶାଇବା ପାଇଁ,

$$a_{n+1} T(u_{n+1}) + a_{n+2} T(u_{n+2}) + \ldots + a_m T(u_m) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad T(a_{n+1} u_{n+1} + a_{n+2} u_{n+2} + a_m u_m) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} u_{n+1} + a_{n+2} u_{n+2} + \ldots + a_m u_m \in N(T)$$

ଯେହେତୁ $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ N(T)ର ଆଧାର

$$\therefore \quad a_{n+1} u_{n+1} + a_{n+2} u_{n+2} + \ldots + a_m u_m = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_nu_n$$

$$\Rightarrow \quad (-b_1)u_1 + (-b_2)u_2 + \ldots + (-b_n)u_n + a_{n+1} u_{n+1} + a_{n+2} u_{n+2} + \ldots + a_m u_m = 0$$

ଯେହେତୁ $S' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_m\}$, U = S′ର ଆଧାର ଅଟେ ଏବଂ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର।

$$\therefore \; -b_1 = -b_2 = \ldots = -b_n = a_{n+1} = \ldots = a_m = 0$$

ବିଶେଷକରି] $\quad a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_m = 0.$

ତେଣୁ: P, ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଏବଂ R(T) କୁ ବିସ୍ତାର କରେ,

$\therefore \; P = \{T(u_{n+1}), T(u_{n+2}), \ldots, T(u_m)\}$, R(T) ର ଆଧାର

$$\dim (R(T)) = \rho(T) = m - n$$

$$\rho(T) = \dim U - \mu(T)$$

$$\rho(T) + \mu(T) = \dim U$$

ଯାହା ଉପପାଦ୍ୟକୁ ପ୍ରମାଣ କରେ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 4.32.ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ପାଇଁ $T : R^2 \to R^3$ ପାଇଁ ଯେପରି $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$, ବିସ୍ତାର ସ୍ପେଶ ଓ ଏହାର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶର ଆଧାର ଓ ମାତ୍ରା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ରାଙ୍କ-ଶୂନ୍ୟତା ଉପପାଦ୍ୟ ମଧ୍ୟ ପରୀକ୍ଷା କର।

ସମାଧାନ:1.T ର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ ଏବଂ ମାତ୍ରା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ

ସଂଜ୍ଞା ଅନସାରେ, ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ $= \{u \in R^2 : T(u) = 0 \in R\}$

ମନେକର $u = (x, y) \in R^2$ ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶର ଏକ ସ୍ୱେଚ୍ଛ ଉପାଦାନ ଅଟେ ।

$\Rightarrow T(u) = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \quad T(x, y) = \mathbf{0}$$

$$(x + y, x - y, y) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \quad x + y = 0$$

$$x - y = 0$$

$$y = 0$$

ଏହି ସମୀକରଣଗୁଡିକ ସମାଧାନ କରିବାପରେ, ଆମେ ପାଉ,

$$x = 0, y = 0$$

ଏହିପରି, ଶୂନ୍ୟସ୍ପେଶ ସେଠାରେଏକ ଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର ଅଟେ।

$$N(T) = \{\mathbf{0}\}$$

$\therefore$ T ର ଶୂନ୍ୟତା= ମାତ୍ରା $= \dim (N(T)) = 0.$

2. T ର ବ୍ୟାପ୍ତି ସ୍ପେଶ ଏବଂ ଏହାର ମାତ୍ରା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ,

ମନେକର $V \in R(T) \in \boldsymbol{R}^3$ ଏକ ସ୍ୱେଚ୍ଛ ଉପାଦାନ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଏହିପ୍ରକାର $(x, y) \in R^2$ ଯେପରିକି $V = T(x,y)$

ବର୍ତ୍ତମାନ , $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe_1 + ye_2$ ଯେଉଁଠାରେ, $e_1 = (1, 0)$ ଏବଂ $e_2 = (0, 1)$

T କୁ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ପ୍ରୟୋଗ କରିବାପରେ, ଆମେ ପାଉ,

$$T(x, y) = T(xe_1 + ye_2)$$

$$= x\,T(e_1) + y\,T(e_2) \qquad [\because \text{ T ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ}]$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $$T(e_1) = T(1, 0) = (1 + 0, 1 - 0, 0)$$

$$= (1, 1, 0)$$

$$T(e_2) = T(0, 1) = (0 + 1, 0 - 1, 1) = (1, -1, 1)$$

$$\therefore \quad T(x, y) = x(1, 1, 0) + y(1, -1, 1)$$

$$V = x(1, 1, 0) + y(1, -1, 1) \quad ...(1)$$

ଯେହେତୁ $V \in R(T)$ ସ୍ୱେଚ୍ଛ ଅଟେ, ତେଣୁ(1)

ଦର୍ଶାଉଛିକି R(T)] ଭେକ୍ଟର $S = \{(1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$ ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତୃତ ହୋଇଛି।

3.ପରୀକ୍ଷା କର କି S, ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟେ।

ମନେକର $a, b \in R$ ସ୍କେଲାର ପାଇଁ,

$$a(1, 1, 0) + b(1, -1, 1) = \mathbf{0}$$

$$(a + b, a - b, b) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \quad a + b = 0$$

$$a - b = 0$$

$$b = 0$$

ଏହି ସମୀକରଣଗୁଡିକ ସମାଧାନ କରିବାପରେ, ଆମେ ପାଉ,

$$a = 0, b = 0$$

ଏଣୁ: S, ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟେ, ତେଣୁ ଏହା R(T) ର ଏକ ଆଧାର ସେଟ୍ ଅଟେ।

$\therefore$ ମାତ୍ରା (R(T)) = 2

ଆଉ ମଧ୍ୟ, $\dim U = \dim \boldsymbol{R}^2 = 2$

$\therefore$ ରାଙ୍କ(T) + ଶୂନ୍ୟତା (T) = 2 + 0 = 2

$$= \dim \boldsymbol{R}^2$$

ଉଦାହରଣ 4.33.ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ ଏହିପ୍ରକାର କି $T(1, 2) = (3, -1, 5)$ ଏବଂ T(0, 1)=(2, 1, –1),T ପାଇଁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଥିବା ସୂତ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ବ୍ୟାପ୍ତି ସ୍ପେଶ, ରାଙ୍କ, ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ୍ ଓ ଶୂନ୍ୟତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: $u_1 = (1, 2)$ ଏବଂ $u_2 = (0, 1)$, ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଏବଂ $\boldsymbol{R}^2$ ର ଆଧାର ଅଙ୍କ।

ମନେକର $u = (x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ ସ୍ୱେଚ୍ଛ ଉପାଦାନ ଅଟେ।

ଏଣୁ U କୁ u1ଏବଂ u2ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇପାରିବ।

ସ୍କେଲାର $a, b \in R$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଏହାପ୍ରକାର ଅଛି, ଯେପରିକି

$$u = au_1 + bu_2$$

$$(x, y) = a(1, 2) + b(0, 1) \quad ...(1)$$

$$(x, y) = (a, 2a+b)$$

$$\Rightarrow \quad x = a$$

$$y = 2a + b \quad \Rightarrow \quad b = y - 2x$$

a,b ମୂଲ୍ୟକୁ ସମୀକରଣ (1) ରେ ରଖିଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$(x, y) = x(1, 2) + (y - 2x)(0, 1)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ T କୁ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$$T(x, y) = x\,T(1, 2) + (y - 2x)\,T(0, 1)$$ [∵ T ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ]

$$T(x, y) = x(3, -1, 5) + (y - 2x)(2, 1, -1)$$

$$= (-x + 2y, -3x + y, 7x - y)$$

ଯାହା T ପାଇଁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଥିବା ସୂତ୍ର।

ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ସହିତ ଜଡିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 3R_1$, $R_3 \to R_3 + 7R_1$, ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \textcircled{-1} & 2 \\ 0 & \textcircled{-5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ [ପ୍ରକ୍ରିୟା $R_3 \to R_3 + 13/5\ R_2$]

R(T) = ବ୍ୟାପ୍ତି ସ୍ପେଶ,

$$= <(-1, -3, 7), (2, 1, -1)> \subseteq \boldsymbol{R}^3.$$

= R(T) ର ଆଧାର

(R(T)) ର ମାତ୍ରା $= 2 = \rho(T)$

N(T) ର ମାତ୍ରା:

ମନେକର $u = (x, y) \in N(T) \subseteq \boldsymbol{R}^2$

$\therefore$ $T(u) = 0$

$(-x + 2y, -3x + y, 7x - y) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow$ $-x + 2y = 0$

$-3x + y = 0$

$7x - y = 0$

ଏହି ସମୀକରଣଗୁଡିକ ସମାଧାନ କରିବାପରେ, ଆମେ ପାଉ,

$x = 0, y = 0$

ଏହିପରି, $N(T) = \{0\}$

$$\dim(N(T)) = 0 = \mu(T)$$

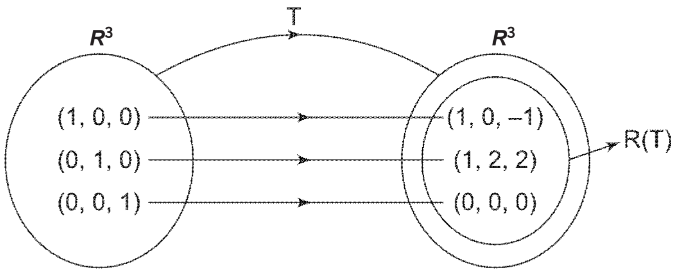
ଆଉ ମଧ୍ୟ, $\rho(T) + \mu(T) = 2 + 0 = 2$

$$= \dim \boldsymbol{R}^2$$

ଉଦାହରଣ 4.34. ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ, $T : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ବ୍ୟାପ୍ତି ସ୍ପେଶ (1, 0, –1) ଏବଂ(1, 2, 2) ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଛି,

ସମାଧାନ: R(T) ର ଆଧାର={(1, 0, –1), (1, 2, 2)}

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ R^3 (ପରିସର)ର ଆଧାର ={e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)}



ଚିତ୍ର = 4.1

ଯେହେତୁ R^3 ଏକ ତିନିମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ ଏବଂ {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} R^3ର ଆଧାର ତେଣୁ, ଏଠାରେ ଏକ ଅନନ୍ୟ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T ଅଛି ଯେପରି :

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, -1)$$

$$T(0, 1, 0) = (1, 2, 2)$$

$$T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

ମନେକର $u = (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3$ ର ସ୍ୱେଚ୍ଛ ଉପାଦାନ ତେଣୁ u କୁ e_1, e_2, e_3 ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇ ପାରିବ।

∴ ଏଠାରେ ଅବସ୍ଥିତ $a, b, c \in R$ ସ୍କେଲାର ଯେପରି କି,

$$u = ae_1 + be_2 + ce_3$$

$$(x, y, z) = a(1, 0, 0) + b(1, 0, 0) + c(0, 0, 1) \quad \text{...(1)}$$

$$(x, y, z) = (a, b, c)$$

$$\Rightarrow \quad a = x, b = y, c = z$$

a, b ଏବଂ c ର ମୂଲ୍ୟକୁ ସମୀକରଣ (1) ରେ ରଖିଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

T କୁ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ପ୍ରୟୋଗ କରିବାଉପରେ ଆମେ ପାଉ,

$T(x, y, z) = xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1)$ [∵ T ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ]

$$T(x, y, z) = x(1, 0, -1) + y(1, 2, 2) + z(0, 0, 0)$$

$$T(x, y, z) = (x + y, 2y, -x + 2y)$$

ଯାହାକି ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ।

ଉଦାହରଣ4.35.ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ କୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ (2, 3, 4, 1) ଏବଂ(1, 0, 1, 1) ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତୃତ ହୋଇଛି।

ସମାଧାନ: N(T) ର ଆଧାର = {(2, 3, 4, 1), (1, 0, 1, 1)}

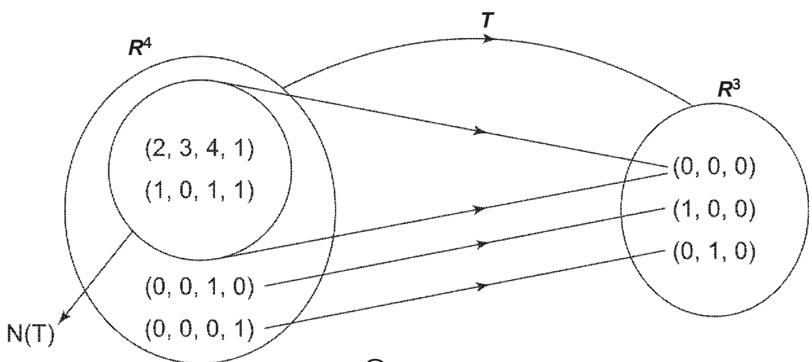
u(T) = (N(T) ର ମାତ୍ରା = 2

R^4ର ମାତ୍ରା = 4

ତେଣୁ ଆମେ N(T)ର ଆଧାରକୁ ବିସ୍ତାର କରିବାକୁ ପଡିବ ଯେପରିକି ସେଟ୍ R^4ର ଆଧାର ହେବ।

R^4 ର ମାନକ ଆଧାର = {(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)}

ମନେକର S = {(2, 3, 4, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)}



ଚିତ୍ର 4-2

ସ୍ତମ୍ଭ ଗୁଡିକରେ 4 ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକ ଲେଖିକରି ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ ରଚନାକର ଅର୍ଥାତ୍]

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା $R_1 \leftrightarrow R_4$ $$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 3R_1, R_3 \to R_3 - 4R_1, R_4 \to R_4 - 2R_1$ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2, R_4 \to R_4 - \left(\frac{R_2}{3}\right)$ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

$$\sim \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \textcircled{-3} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{-1} \end{bmatrix}$$

$\rho(A) = 4 =$ ସ୍ତମ୍ଭ ଗୁଡିକର ସଂଖ୍ୟା

ତେଣୁ {(2, 3, 4, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)}, R^4 ର ଆଧାର ଅଟେ

ବର୍ତ୍ତମାନ] $T(2, 3, 4, 1) = (0, 0, 0)$

$T(1, 0, 1, 1) = (0, 0, 0)$

ମନେକର $T(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 0)$

$T(0, 0, 0, 1) = (0, 1, 0)$

ଅନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକ ପ୍ରତିବିମ୍ବ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ହେବା ଦରକାର ଅନ୍ୟଥା ଏହି ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକ N(T)ର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ, ହେବ, ଯାହାକି ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ କାରଣ (N(T))ର ମାତ୍ରା =2

ମନେକର $u = (x, y, z, w) \in R^4$ ସ୍ୱେଚ୍ଛ ଏବଂ S ର ଭେକ୍ଟର ଦ୍ୱାରା ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ

ସେଠାରେ ଅବସ୍ଥିତ ସ୍କେଲାର $a, b, c, d \in R$ ଯେପରିକି,

$$u = a(2, 3, 4, 1) + b(1, 0, 1, 1) + c(0, 0, 1, 0) + d(0, 0, 0, 1) \quad ...(1)$$

$$\Rightarrow \quad (x, y, z, w) = (2a + b, 3a, 4a + b + c, a + b + d)$$

$$\Rightarrow \quad x = 2a + b$$

$$y = 3a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{3} = a$$

ଏବଂ $z = 4a + b + c$

ତଥା $w = a + b + d$

ସମାଧାନ କରିବା ପରେ, ଆମେ ପାଉ

$$a = \frac{y}{3}, b = x - \frac{2y}{3}, c = z - x - \frac{2y}{3}, d = w - x + \frac{y}{3}$$

ଏହି ମୂଲ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ସମୀକରଣ (1) ରେ ରଖିଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$(x, y, z, w) = \frac{y}{3}(2,3,4,1)+\left(x-\frac{2y}{3}\right)(1,0,1,1)+\left(z-x-\frac{2y}{3}\right)(0,0,1,0)+\left(w-x+\frac{y}{3}\right)(0,0,0,1)$$

T କୁ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$T(x, y, z, w) = \frac{y}{3}T(2,3,4,1)+\left(x-\frac{2y}{3}\right)T(1,0,1,1)+\left(z-x-\frac{2y}{3}\right)T(0,0,1,0)$$

$$+\left(w-x+\frac{y}{3}\right)T(0,0,0,1)$$

[∵ T ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ]

$$T(x, y, z, w) = \frac{y}{3}(0,0,0)+\left(x-\frac{2y}{3}\right)(0,0,0)+\left(z-x-\frac{2y}{3}\right)(1,0,0)+\left(w-x+\frac{y}{3}\right)(0,1,0)$$

$$T(x, y, z, w) = \left(z-x-\frac{2y}{3}, w-x+\frac{y}{3}, 0\right)$$

ଯାହା କି ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଥିବା ସୂତ୍ର।

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 4-8

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ପାଇଁ $R(T)$, (T), N(T)ର ରାଙ୍କ ଏବଂ ଶୂନ୍ୟତା (T) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ସିଲଭେଷ୍ଟରଙ୍କ ନିୟମ ଯାଞ୍ଚ କର:

   i. $T : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ T(x, y, z) = (x + y, y + z) ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

   ii. $T : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ T(x, y, z, w) = (x – y + z + w, x + 2z – w, x + y + 3z – 3w) ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

   iii. $T : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ T(x, y) = (x + y, x) ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

   iv. $T : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ T(x, y) = (x, x + y, y) ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

2. ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^4$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ବ୍ୟାପ୍ତି ସ୍ପେଶ (1, 2, 0, –4) ଏବଂ (2, 0, –1,–3) ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଛି।

3. ଏକ ରୈଖିକ $T : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ବ୍ୟାପ୍ତି ସ୍ପେଶ (1, 2, 3) ଏବଂ(4, 5, 6) ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଛି।

4. ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^4$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ (0, 1, –3) ଏବଂ (0, –3, 4) ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଛି।

5. ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ (1, 2, 3, 4) ଏବଂ (0, 1, 1, 1) ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଛି।
6. ଏକ ସସୀମ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ Vରେ, ଶୂନ୍ୟ ରୂପାନ୍ତରଣ ପାଇଁ ବ୍ୟାପ୍ତି, ରାଙ୍କ, ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ ଓ ଶୂନ୍ୟତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ରୂପାନ୍ତରଣକୁ ଚିହ୍ନଟ କର।
7. ମନେକର $T : V \to V$ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଯେପରିକି R(T) = N(T), ଯେଉଁଠାରେ V ସୀମିତ ମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ, ପ୍ରମାଣ କରଯେ Vର ମାତ୍ରା ଯୁଗ୍ମ ଅଟେ।
8. ମନେକର $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଯେପରିକି $\mu(T) = 2$, ତେବେ dim R(T) ର ମାତ୍ରା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
9. ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅଛି କି $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ଯେପରିକି $\rho(T) = 3, \mu(T) = 2$?
10. ଯଦି $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଯାହାକି $T(e_1) = (1, 1, 1)$, $T(e_2) = (1, -1, 1)$, $T(e_3) = (1, 0, 0)$, $T(e_4)=(1, 0, 1)$ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଛି, ତେବେ ଯାଞ୍ଚ କର ଯେ $\rho(T) + \mu(T) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$.

ଉତ୍ତରମାଳା

1. i. $R(T) = R^2, \rho(T) = 2, N(T) = \{(1, -1, 1)\}, \mu(T) = 1$

   ii. $R(T) = \{(1, 1, 1), (0, 1, 2)\}, \rho(T) = 2, N(T) = \{(2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}, \mu(T) = 2$

   iii. $R(T) = R^2, \rho(T) = 2, N(T) = \{0\}, \mu(T) = 0$

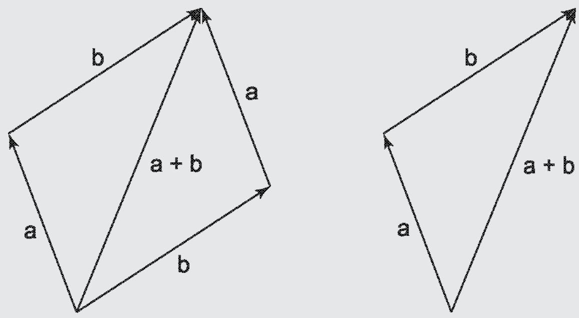
   iv. $R(T) = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}, \rho(T) = 2, N(T) = \{0\}, \mu(T) = 0$

2. $T(x, y, z) = (x + 2y, 2x, -y, -4x - 3y)$
3. $T(x, y, z) = (x + 4y, 2x + 5y, 3x + 6y)$
4. $T(x, y, z) = (x, 0, 0, 0)$
5. $T(x, y, z, t) = (z - y - x, t - 2x - y, 0)$
7. ଶୂନ୍ୟ ରୂପାନ୍ତରଣ: ବ୍ୟାପ୍ତି = {0}, ରାଙ୍କ୍ = 0, ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ = V, ଶୂନ୍ୟତା = dim (V)

   ଏକକ ରୂପାନ୍ତରଣ:ବ୍ୟାପ୍ତି = V, ରାଙ୍କ୍ = dim V, ର ମାତ୍ରା ,ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ, = {0}, ଶୂନ୍ୟତା = 0
8. 3
9. ନାହିଁ

ଆକର୍ଷଣୀୟ ତଥ୍ୟ;

- ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେସ୍ ହେଉଛି ,ଭେକ୍ଟର ନାମକ ଗାଣିତିକ ବସ୍ତୁର ସମାହାର



ଚିତ୍ର 4-3

- ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେସ୍‌ରେ ଦୁଇଟି ପ୍ରକ୍ରିୟା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି: ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରର ଯୋଗ ଏବଂ ସ୍କେଲାର ସହିତ ଏକ ଭେକ୍ଟରର ଗୁଣନ । ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାଗୁଡିକ ଏକ ଭେକ୍ଟରର ଆକାର ଏବଂ ଏହା ସୂଚାଉଥିବା ଦିଗକୁ ଏହା ପରିବର୍ତ୍ତନ କରିପାରିବ । କିନ୍ତୁ ଫଳାଫଳ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେସ୍‌ରେ ରହିବ।
- ଆମେ ଭେକ୍ଟରକୁ ଏପରି ଭାବରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରିପାରିବୁ ନାହିଁ, ଯାହା ଆଉ ତିଆରି ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ ।
- ଭେକ୍ଟର ସହିତ ସ୍କେଲାର ଯୋଗ କରିବା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ , କାରଣ ସେମାନେ ସ୍ପେସ୍‌ରେ ବିଭିନ୍ନ ମାତ୍ରାରେ ଆସନ୍ତି,

ଭିଡିଓ ସନ୍ଦର୍ଭ (ଉତ୍ସ: ଏନପିଟିଇଏଲ)

ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେସ୍ ଆଧାର ଓ ମାତ୍ରା

ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ

ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଏବଂ ମ୍ୟାଟ୍ରିସେସ୍

ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ: ରାଙ୍କ ବନାମ ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳତା ଓ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ରତା :

ମୋ ଅବସ୍ଥିତି ଠାରୁ A, 4କି.ମି ଉତ୍ତରରେ ଏବଂ 4କି.ମି ପୂର୍ବରେ, ଅବସ୍ଥିତ, ତା'ପରେ ଏହାକୁ ମୋର ବର୍ତ୍ତମାନର ଅବସ୍ଥାନରୁ ବିନ୍ଦୁ Aର ଅନନ୍ୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ କୁହାଯାଏ। ଯଦି ମୁଁ କୁହେ A ବିନ୍ଦୁ ଉତ୍ତର-ପୂର୍ବ ଦିଗରେ 5 କିଲୋମିଟର ଅଟେ, ତେବେ ଏହାର କୌଣସି ବ୍ୟବହାର ନାହିଁ । ଏହାର ଅର୍ଥ ଦୁଇଟି ସୂଚନା ଉଭୟ ଭିନ୍ନ ଦିଗ ସହିତ ଜଡିତ 2D ସମତଳରେ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ଖୋଜିବା ପାଇଁ ଯଥେଷ୍ଟ । ସମାନ ଧାରଣା ଉଚ୍ଚ ମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ ସମତଳ ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ। nxm ଆକାର A ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅନୁଯାୟୀ, ଯଦି ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଭେକ୍ଟର ସଂଖ୍ୟା r ହୁଏ , ଏହାର ଅର୍ଥ ହେଉଛି ଏହି r ଭେକ୍ଟର ସାହାର୍ଯ୍ୟରେ ଏହି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସହିତ ଜଡିତ ସମସ୍ତ ଦିଗକୁ ବର୍ଣ୍ଣନା କରିପାରିବ। ବର୍ତ୍ତମାନ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଭେକ୍ଟର ସଂଖ୍ୟା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କ ବ୍ୟତୀତ ଆଉ କିଛି ନୁହେଁ। ଏହାର ଅର୍ଥ ଯେକୌଣସି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ପାଇଁ, ଯେତେବେଳେ ତୁମକୁ ରାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା କୁକୁହାଯାଏ, ଏହାର ଅର୍ଥ ପରୋକ୍ଷରେ ତୁମେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସହିତ ଜଡିତ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ସଂଖ୍ୟକ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ଦେଉଛନ୍ତି,

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ:

ମୁଁ ଏକ କ୍ୟାମେରା ଓ ଏକ ଯନ୍ତ୍ରଚାଳିତ ହାତ ଦ୍ୱାରା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କକୁ ବୁଝାଇବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରୁଛି। ମନେକର ତୁମର ଏକ ଯନ୍ତ୍ରଚାଳିତ ହାତ ଅଛି, ଯାହାକି କ୍ୟାମେରାର ତଥ୍ୟ ଉପରେ ନିର୍ଭରଶୀଳ। ବର୍ତ୍ତମାନ କ୍ୟାମେରାଟି କଠୋରୀର ଏକ କୋଣରେ ଅଛି। ତେଣୁ କ୍ୟାମେରାର ତଳକୁ, ଉପରକୁ କିମ୍ବା ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରିବା ଦୃଷ୍ଟିକୋଣରୁ ଏହାର ଦୂରତା ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ହେବ। ଏହିସବୁ କାର୍ଯ୍ୟ ପାଇଁ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଆବଶ୍ୟକ, ତେଣୁ ତୁମେ ଏହି ସବୁ କାର୍ଯ୍ୟ କରିବାପାଇଁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସିକୁ ମୂଳ ରୂପରୁ ବିଭିନ୍ନ ରୂପକୁ ରୂପାନ୍ତରଣ କରିବାକୁ ହେବ।

ବିଷୟାତ୍ମକ ସମାହିତ କଠିନ ପ୍ରଶ୍ନ

ଉଦାହରଣ 1. ସୂଚିତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ ପାଇଁ ଏକ ଆଧାର ଦିଅ:

i. $R(\sqrt{2})$, R ରେ   ii. $Q(2^{1/4})$, Q ରେ

ଯେଉଁଠାରେ Q, R ଯଥାକ୍ରମେ ପରିମେୟ ଏବଂ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ଏକ କ୍ଷେତ୍ର,

ସମାଧାନ:i. ଆମର ଅଛି $R(\sqrt{2}) = (a+\sqrt{2}b : a, b \in R)$

ବର୍ତ୍ତମାନ $R(\sqrt{2})$ ର ଶୂନ୍ୟ ଉପାଦାନକୁ $0 = 0 + 0 . \sqrt{2}$ ରୂପରେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ।

ମନେକର $a, b \in R$, ଯେପରି କି

$$a.1 + \sqrt{2}b = 0$$

$$\Rightarrow \quad a + \sqrt{2}b = 0 + 0.\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad a = 0, b = 0$$

$\Rightarrow$ S ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର।

ମନେକର $x + \sqrt{2}y$] $R(\sqrt{2})$ ର କୌଣସି ଏକ ଉପାଦାନ ତେବେ $x + \sqrt{2}y = x . 1 + \sqrt{2} .y$

$R(\sqrt{2})$ ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ,S ର ଉପାଦାନର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବA

$\Rightarrow \qquad L(S) = R(\sqrt{2})$

ଏଣୁ $S = \{1, \sqrt{2}\}$ ଦୁଇଟି ଉପାଦାନ ବିଶିଷ୍ଟ $R(\sqrt{2})$ ର ଏକ ଆଧାର ଅଛି ତେଣୁ dim. $R(\sqrt{2}) = 2$

ii. ଆମର ଅଛି,

$Q(2^{1/4}) = \{a + (2^{1/4})b : a, b \in Q\}$

ବର୍ତ୍ତମାନ $Q(2^{1/4})$ର ଶୂନ୍ୟ ଉପାଦାନ $0 = 0 + (2^{1/4})$।

ମନେକର $S = \{1, 2^{1/4}\}$,ତେବେ $S \subseteq Q(2^{1/4})$.

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଦେଖିବାକି S, $Q(2^{1/4})$ର ଏକ ଆଧାର ସୃଷ୍ଟିକରେ।

ମନେକର $a, b \in Q$ ଯେପରି କି $a . 1 + b . (2^{1/4}) = 0$

$\Rightarrow \qquad a + b(2^{1/4}) = 0 + 0 . (2^{1/4})$

$\Rightarrow \qquad a = 0, b = 0$

$\Rightarrow$ S ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର।

ମନେକର $x + (2^{1/4})y$] $Q(2^{1/4})$ ର କୌଣସି ଏକ ଉପାଦାନ

ତେବେ, $x + (2^{1/4})y = x.1 + (2^{1/4}).y$

$\Rightarrow$ $Q(2^{1/4})$ ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ,S ର ଉପାଦାନରେ ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇପାରିବ।

$\Rightarrow \qquad L(S) = Q(2^{1/4})$

ଏଣୁ $S =\{1, 2^{1/4}\}$] $Q(2^{1/4})$ ର ଆଧାର ଏବଂ dim. $Q(2^{1/4}) = 2$

ଉଦାହରଣ 2.ସ୍ପେଶ $c[0, \pi]$ ରେ ମନେକର f, g, h ଏବଂ j ଭେକ୍ଟର, ଯେପରି $f(x) = 1, g(x) = x, h(x) = \cos x, j(x) = \cos^2 \frac{x}{2}, 0 \le x \le \pi$ ପାଇଁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଛି j କୁ f] g] hର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ଲେଖି ଦର୍ଶାଅ ଯେ f] g] h ଏବଂ j ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ।

ସମାଧାନ:ଆମେ ଜାଣୁକି, $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

x କୁ $\frac{x}{2}$ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \qquad \cos x + 1 = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\cos x + 1}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}.(\cos x)+\frac{1}{2}.(1)$$

$$j(x) = \frac{1}{2}h(x)+\frac{1}{2}.f(x)$$

କିମ୍ବା $$j(x) = \frac{1}{2}.h(x)+0.g(x)+\frac{1}{2}.f(x)$$

ଏକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର।

ଉଦାହରଣ 3.ମନେକର T, ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ V(F) ରେ ଯଦି $T^2=0$, ତେବେ Tର ବ୍ୟାପ୍ତି ଓ Tର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶର ସମ୍ପର୍କ ବିଷୟରେ କ'ଣ କହିପାରିବେ? V2(R)ରେ ଏକ ରୈଖିକ ଅପରେଟରର ଉଦାହରଣ ଦିଅ: ଯେପରିକି $T^2= 0$ କିନ୍ତୁ$T \neq 0$-

ସମାଧାନ: ଯହେତୁ $T^2 = 0$ ତେବେ $\alpha \in V$ ପାଇଁ

$$T^2(\alpha) = 0(\alpha) \quad \Rightarrow \quad T[T(\alpha)] = 0$$

$$T(\alpha) \in N(T)$$ [ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ ସଂଜ୍ଞା ଅନୁସାରେ]

କିନ୍ତୁ $$T(\alpha) \in R(T)\ \forall\ \alpha \in V$$

$$R(T) \subset N(T)$$

ତେଣୁ ଯେବେT2 = 0, T ର ବ୍ୟାପ୍ତି T ର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ ଧାରଣ କରେ।

ଉଦାହରଣ 4. ମନେକର V(R)] x ରେ ସମସ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲର ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ, ଯାହାର,ଗୁଣାଙ୍କ R କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅଛି । ମନେକର DଏବଂT, Vରେ ଦୁଇଟି ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ, ଯାହାକୁ ଏହିପ୍ରକାର ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

$$D(f(x)) = \frac{d}{dx} f(x)\ \forall\ f(x) \in V$$ ଏବଂ $$T(f(x)) = xf(x)\ \forall\ f(x) \in V$$

ତେବେ ଦର୍ଶାଅ କି $DT \neq TD$ ଏହା ମଧ୍ୟ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $DT - TD = I$-

ସମାଧାନ: ମନେକର $f(x) \in V$ ତେବେ

$$(DT)(f(x)) = D[T(f(x))] = D[xf(x)]$$

$$= \frac{d}{dx}[xf(x)] = f(x) + x\frac{d}{dx}f(x) \qquad ...(1)$$

ଏଠାରେ ମଧ୍ୟ, $$(TD)(f(x)) = T(D(f(x)))$$

$$= T\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = x.\frac{d}{dx}f(x) \qquad ...(2)$$

ଏଣୁ, ସମୀକରଣ (1) ଏବଂ(2) ରୁ, ଆମେ କହିପାରିବା $f(x) \in V$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଏହିପ୍ରକାର ଅଛି ଯେପରିକି

$$(DT)(f(x)) \neq (TD)(f(x))$$

ତେଣୁ, $$DT \neq TD.$$

ଆଉ ମଧ୍ୟ, $(DT)(f(x)) - (TD)(f(x)) = f(x) = I(f(x))$

$\therefore$ $DT - TD = I$

ଉଦାହରଣ 5. $T : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^4$, ଦ୍ୟାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଛି ଯେପରି $T(x) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2, x_3 - x_2, x_1 - 2x_2)$ ସମସ୍ତ $x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$, ପାଇଁ

a. $T(1, -2, 3)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

b. ଏକ ଭେକ୍ଟର $x \in \boldsymbol{R}^3$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି $T(x) = (8, 9, -5, 0)$A

ସମାଧାନ.$T : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^4$ ଯେପରିକି

$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2, x_3 - x_2, x_1 - 2x_2)$ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି।

a.$T(1, -2, 3) = (1 - 3, 1 + (-2), 3 - (-2), 1 - 2(-2))$

$= (-2, -1, 5, 5)$

b. ମନେକର $x = (u, v, w)$ ଯେପରିକି

$$T(u, v, w) = (8, 9, -5, 0)$$

$$(u - w, u + v, w - v, u - 2v) = (8, 9, -5, 0)$$

ତୁଳନା କରିବା ପରେ, ଆମେ ପାଉ,

$$u - w = 8 \qquad ...(1)$$

$$u + v = 9 \qquad ...(2)$$

$$w - v = -5 \qquad ...(3)$$

$$u - 2v = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 2v \qquad ...(4)$$

ସମୀକରଣ (2) ରୁ (1) କୁ ବିୟୋଗ କରେ, ଆମେ ପାଇ,

$$v + w = 1 \qquad ...(5)$$

ସମୀକରଣ (3) ଏବଂ(5)କୁ ଯୋଗ କରେ, ଆମେ ପାଉ,

$$w = -2$$

ସମୀକରଣ (5) ରୁ, $v - 2 = 1 \Rightarrow v = 3$

ସମୀକରଣ(4) ରୁ, $u = 6$

ଏହିପରି $(u, v, w) = (6, 3, -2)$] $\boldsymbol{R}^3$ ରେ ଆବଶ୍ୟକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ ଯାହାର ପ୍ରତିବିମ୍ବ T ରେ $(8, 9, -5, 0)$ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ 6. ମନେକର $v_1 = (-1, 2, 0)$, $v_2 = (3, 2, -1)$ ଏବଂ $v_3 = (1, 6, -1)$] $\boldsymbol{R}^3$(R) ର ତିନି ଭେକ୍ଟର ତେବେ ଦର୍ଶାଅ କି $[v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_3]$.

ସମାଧାନ: ସ୍ପଷ୍ଟ ରୂପରେ , $[v_1, v_2] = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in R)$

ଏବଂ, $[v_1, v_2, v_3] = \{\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 : \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in R\}$

ମନେକର $v_3 = (1, 6, -1) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.. ତେବେ,

$$(1, 6, -1) = (-\alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 2\alpha_2, -\alpha_2)$$

$\Rightarrow$ $-\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1,\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 6, -\alpha_2 = -1.$

$\Rightarrow$ $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$

$\therefore$ $(1, 6, -1) = 2(-1, 2, 0) + 1(3, 2, -1)$

$\Rightarrow$ $\mu_3(1, 6, -1) = 2\mu_3(-1, 2, 0) + \mu_3(3, 2, -1)$

$\Rightarrow$ $\mu_3 v_3 = 2\mu_3 v_1 + \mu_3 v_2$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $[v_1, v_2, v_3] = \{\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + 2\mu_3 v_1 + \mu_3 v_2 : \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in R\}$

$\Rightarrow$ $[v_1, v_2, v_3] = \{(\mu_1 + 2\mu_3)v_1 + (\mu_2 + \mu_3)v_2 : \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in R\}$

$\Rightarrow$ $[v_1, v_2, v_3] = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in R\}$

$\Rightarrow$ $[v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2]$

ଉଦାହରଣ 7.ମନେକର V, Rରେ 2 ×2 ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, dimV = 3-

ସମାଧାନ: ଏକ ସ୍ୱେଚ୍ଛ2 × 2 ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରୂପ $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ ଅଟେ ଯେଉଁଠାରେ a, b, c $\in$ R

i. a = 1, b = 0, c = 0, ii. a = 0, b = 1, c = 0, iii. a = 0, b = 0, c = 1, ଏହିପରି ଆମେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ପାଉ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ଆମେ ଦର୍ଶାଇବା କି ସେଟ୍ S = {A, B, C}] *V*ର ଏକ ଆଧାର ଅଟେ। ପ୍ରଥମେ ଆମକୁ ଦର୍ଶାଇବାକୁ ହେବ ଯେ S ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର

ମନେକର x, y, z $\in$ R ଯେପରି କି $xA + yB + zC = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \quad x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $x = 0, y = 0, z = 0$

$\therefore$ S = {A, B, C} ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର।

ବର୍ତ୍ତମାନ, ଆମକୁ ଦର୍ଶାଇବାକୁ ହେବ କି L(S) = V-

ମନେକର $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$] V ର କୌଣସି ଉପାଦାନ, ତେବେ ଆମେ ପାଉ,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = aA + bB + cC$$

$\Rightarrow$ V ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ S ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ 8. ମନେକର V ଏକ ସସୀମ ମାତ୍ରିକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ ଓ T, Vରେ ଏକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର, ମନେକର ରାଙ୍କ (T^2)= ରାଙ୍କ(T)ପ୍ରମାଣ କର ଯେ Tର ବ୍ୟାପ୍ତି ଓ ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ ବ୍ୟବହିତ, ଅର୍ଥାତ୍ ସାଧାରଣରେ କେବଳ ଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର ଅଛି।

ସମାଧାନ: ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, V ର ମାତ୍ରା= T ର ରାଙ୍କ+Tର ଶୂନ୍ୟତା ...(1)

ବର୍ତ୍ତମାନ, T^2 ମଧ୍ୟ V ଉପରେ ଏକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର,

ତେବେ, Vର ମାତ୍ରା=(T^2)ର ରାଙ୍କ+(T^2)ର ଶୂନ୍ୟତା ...(2)

ସମୀକରଣ (1) ଓ (2), ଆମେ ପାଉ,

(T)ର ରାଙ୍କ + (T)ର ଶୂନ୍ୟତା = (T^2)ର ରାଙ୍କ + (T^2)ର ଶୂନ୍ୟତା

$\Rightarrow$Tର ଶୂନ୍ୟତା = T^2ର ଶୂନ୍ୟତା [1]$\because$ (T)ର ରାଙ୍କ = (T^2)ର ରାଙ୍କଂ

$\Rightarrow$Tର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶର ମାତ୍ରା= (T^2)ର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶର ମାତ୍ରା

$\Rightarrow$ ଯଦି $\alpha \in T$ ର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ, ତେବେ,

$$T(\alpha) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad T[T(\alpha)] = T(0)$$

$$\Rightarrow \quad T^2(\alpha) = 0 \qquad [\because \quad T(0) = 0]$$

$\therefore \quad \alpha \in T^2$ର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ।

$\therefore$ Tର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ $\subseteq T^2$ ର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ। କିନ୍ତୁ Tର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ ଓ T^2 ର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ ଉଭୟ Vର ସବ-ସ୍ପେଶ ଏବଂ ସମାନ ମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ,

ତେବେ Tର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ = T^2ର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ

$\Rightarrow T^2$ ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ $\subseteq$ Tର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ

$$\Rightarrow \quad T^2(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T(\alpha) = 0$$

ମନେକର $\beta \neq 0$ ଓ $\beta \in R(T) \cap N(T)$,

ତେବେ, $\beta \in R(T)$ ଓ $\beta \in N(T)$.

ବର୍ତ୍ତମାନ] $\beta \in N(T) \Rightarrow T(\beta) = \mathbf{0}$

ଆଉ ମଧ୍ୟ] $\beta = R(T) \Rightarrow \exists\, \alpha \in V$ ଯେପରିକି $T(\alpha) = \beta$

ବର୍ତ୍ତମାନ] $T(\alpha) = \beta$

$\Rightarrow$ $T[T(\alpha)] = T(\beta) = 0$

ଏହିପରି, ଏଠାରେ $\alpha \in V$ ଅବସ୍ଥିତ ଯେପରି କି $T[T(\alpha)] = 0$ କିନ୍ତୁ $T(\alpha) = \beta \neq 0$ ଯାହାକି ସମୀକରଣ (1)ର ବିରୋଧୋକ୍ତି ଅଟେ, ତେଣୁ ଏଠାରେ କୌଣସି $\beta \in R(T) \cap N(T)$ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ ଯେପରିକି $\beta \neq 0$- ତେଣୁ $R(T) \cap N(T) = \{0\}$-

ସାରାଂଶ

1. ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ Vପାଇଁ, (F) ସର୍ବଦା Vର ଏକ ସବ୍ ଫିଲ୍ଡ ଅର୍ଥାତ V କେବଳ ଏହାର ସବ୍ ଫିଲ୍ଡରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇ ପାରିବ।
2. ଯଦି $\rho(A) =$ ସ୍ତମ୍ଭ ଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା, ତେବେ 'A' ରେ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡ଼ିକ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅନ୍ୟଥା ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ।
3. ଯଦି Vର ମାତ୍ରା =n(ସସୀମ ମାତ୍ରିକ) ଓ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ Vର ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଉପସେଟ୍, ତେବେ S, Vର ଆଧାର।
4. V(F)ର କୌଣସି ଆଧାରରେ ଭେକ୍ଟର ସଂଖ୍ୟାକୁ Vର ମାତ୍ରା କୁହାଯାଏ।
5. ବ୍ୟାପ୍ତି ସ୍ପେଶର ମାତ୍ରା=ରାଙ୍କ

   ଅର୍ଥାତ୍ R(T)ର ମାତ୍ରା = $\rho(T)$

   ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶର ମାତ୍ରା=ଶୂନ୍ୟତା

   ଅର୍ଥାତ୍, N(T)ର ମାତ୍ରା = μ (T)
6. ରାଙ୍କ-ଶୂନ୍ୟତା ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ,

   $\rho(T) + \mu(T) =$ Uର ମାତ୍ରା,

   ଯେଉଁଠାରେ 'U' ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ।
7. ରୈଖିକ ମ୍ୟାପ $T : U(F) \to V(F)$କୁ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ କୁହାଯାଏ ଯଦି

   $T(au + v) = aT(u) + T(v)\ \forall\, a \in F,\ u, v \in U$
8. ଦୁଇଟି ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ସଂଯୋଗ ବାଖ୍ୟା ହୋଇପାରିବ, କେବଳ ଯେତେବେଳେ

   ପରବର୍ତ୍ତୀ ଉତ୍ପାଦକ ରୂପାନ୍ତରଣର ବ୍ୟାପ୍ତି $\subseteq$ ପୂର୍ବ ଉତ୍ପାଦକ ରୂପାନ୍ତରଣର ପରିସର।

ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନ

1. [0, 1]ରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥିବା ସମସ୍ତ ଫଳନ ଗୁଡିକର ସେଟ୍‌କୁ ଧ୍ୟାନ ଦିଅ ଯପରିକି,
   I. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ II. $f\left(\frac{3}{4}\right) = 1$ III. f(x) = xf(x) IV. f(0) = f(1)
   ତେବେ ସଠିକ ଉତ୍ତର ହେଉଛି
   a-କେବଳ(I) ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶଅଟେ b-କେବଳ(I) ଏବଂ(4) ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ ଗୁଡିକଅଟେ
   c-କେବଳ(i), (iii), ଏବଂ(iv) ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ ଗୁଡିକଅଟେ! d-ସମସ୍ତ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶଅଟେ
2. ସେଟ୍ S = {(0, 1, 0, 0),(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0)} ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତାରିତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡିକର କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭକ୍ଟର ସ୍ପେଶ Vକୁ ବିଚାର କର। Vର ମାତ୍ରା କଣ?
   a. 1 b. 2 c. 3 d. 4
3. ମନେକର X = (3, 2, –1), Y = (2, 4, 1), Z = (4, 0, –3 ଏବଂ W = (10, 4, –5)] R^3 ରେ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକ ଏକ ବାସ୍ତବ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ, ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସଠିକ୍ ଅଟେ ?
   a. 2X + Z = W.Y + Z = W b.2X – Y = Z.Y + 2Z = W
   c. X + Z = W.2X + Y = Z d.Y + 2Z = W.X – Y = Z
4. ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = (3, 1, 0)$, $\gamma = (2, 1, 3)$ ଏବଂ $\delta = (-1, 3, 6)$.
   ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତି ଗୁଡିକୁ ବିଚାର କର
   I. γ, α ଏବଂβ ର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ଅଟେ
   II. δ] α ଏବଂ βର ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ଅଟେ, ତେବେ' ଉପରୋକ୍ତ ନିମ୍ନ ଲିଖିତ କଥନ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସଠିକ ଅଟେ?
   a- କେବଳ I b- କେବଳ II c- I ଏବଂ 2 ଉଭୟ d- I କିମ୍ବା 2 ନୁହେଁ
5. ନିମ୍ନ ଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି R^3 ର ଆଧାର ନୁହିଁ?
   a. (3, 0, 0), (0, –1, 0), (0, 0, 1/2) b. (0, 0, –3), (1, 2, 3), (1, 2, 1)
   c. (1, 2, –1), (1, 1, 1), (1, 3, 5) d. (1, 1, 0), (1, 2, 3), (0, 0, 1)
6. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ରୈଖିକ ନୁହେଁ?
   a. $F : R^2 \to R^2$ ଯେପରିକି F(x, y) = (2x – y, x)
   b. $F : R^3 \to R^2$ ଯେପରିକି F(x, y, z) = (z, x + y)
   c. $F : R \to R^2$ ଯେପରିକି F(x) = (2x, 3x)
   d. $F : R^3 \to R^2$ ଯେପରିକି F(x, y, z) = (x + 1, y + z)
7. ଦୁଇଟି ରୂପାନ୍ତରଣ $T : R^3 \to R^2$ ଏବଂ $S : R^3 \to R^2$ ଯେପରି T(x, y, z) = (x + 1, y + z) ଏବଂ S(x, y, z) = (| x |, 0), ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି, ତେବେ

a-T.ଏବଂ S ଉଭୟ ରୈଖିକ b- .T ଏବଂ S ଉଭୟ ରୈଖିକ ନୁହଁନ୍ତି

c- T ରୈଖିକ ଅଟେ କିନ୍ତୁ S ରୈଖିକ ନୁହେଁ d- T ରୈଖିକ ନୁହେଁ କିନ୍ତୁ S ରୈଖିକ

8. ଅନନ୍ୟ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T : $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$ ଯେପରିକି T(1, 2) = (2, 3) ଏବଂT(0, 1) = (1, 4)] ତେବେ T ପାଇଁ, ନିୟମ ହେଉଛି]

a. T(x, y) = (y, –5x + 4y) b. T(x, y) = (–5x + 4y, y)

c. T(x, y) = (x, –5x + 4y) d. T(x, y) = (–4x + 5y, y)

9. ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T : $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$ ଯେପରି T(3, 1) = (2, –4) ଏବଂ T(1, 1) = (0, 2) ତେବେ] T(7, 8)ର ମୂଲ୍ୟ

a. (–1, 3) b. (–1, 19) c. (2, –3) d. (–3, 2)

10. ମନେକର F କୌଣସି କ୍ଷେତ୍ର ଏବଂ ମନେକର *T*] F^2 ରେ ଏକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର ଯେପରିକି T(a,b)=(a+b,a)ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି ତେବେT^{-1}(a,b) ର ମୂଲ୍ୟ%

a. (b, a – b) b. (a – b, b) c. (a, a + b) d. (a + b, a – b)

11. ଆଧାର B = {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)}ଭିତ୍ତିକ] $\mathbf{R^3}$ ରେ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ Tର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯେପରିକି T(x, y, z) = (2y + z, x – 4y, 3x)] ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି, *T* ର ମୂଲ୍ୟ%

a. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 3 & -6 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -6 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 6 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

12. ମନେକର *T*: $\mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଯେପରି T(x, y, z) = (x + y, y – z)- ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି, ତେବେ କ୍ରମିତ ଆଧାର {(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0,1,0)} ଏବଂ {(1,1) (1,0)} ଭିତ୍ତିକ T ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହେଉଛି

a. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

13. ଧରାଯାଉ T_1 ଏବଂ T_2] $\mathbf{R^3}$ରେ ଦୁଇଟି ରୈଖିକୁ ଅପରେଟ୍ ତାହା
T_1(x, y, z) = (x, x + y, x – y – z), T_2(x, y, z) = (x + 2z, y – z, x + y + z) ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି] ତେବେ

a- T_1 ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ କିନ୍ତୁ T_2 ନୁହେଁ b-T_2 ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ କିନ୍ତୁ T_1 ନୁହେଁ

c- T_1 ଓ T_2 ଉଭୟ ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ d- T1 କିମ୍ବା T2 ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ ନୁହେଁ

14.ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T : $R^{10} \to R^6$ ପାଇଁ କର୍ଣ୍ଣେଲର ମାତ୍ରା 5 ତେବେT ର ବ୍ୟାପ୍ତି ମାତ୍ରା ?

a. 5 b. 6 c. 4 d. 2

15. ଯଦି T : $V_2(\mathbf{R}) \to V_3(\mathbf{R})$] T(a, b) = (a + b, a – b, b) ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥିବା ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅଟେ ତେବେ T ର ଶୂନ୍ୟତା ହେଉଛି

a.0 b. 1 c. 2 d. 3

16. ନିମ୍ନଲିଖିତ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T(x, y) = (–x – y, 3x + 8y, 9x – 11y), ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ R^2 ରେ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ R^3ରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଛି, ତେବେ, T ର ରାଙ୍କ ଓ ଶୂନ୍ୟତା ଯଥାକ୍ରମେ:

a. 2 ଏବଂ 0 b. 1 ଏବଂ 0 c. 1 ଏବଂ 1 d. –1 ଏବଂ 2

17. ମନେକରT : $\boldsymbol{R^3} \to \boldsymbol{R^3}$] T(x, y, z) = (x + 2y – z, y + z, x – 2z)] }ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥିବା ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଅଟେ ତେବେ କର୍ଣ୍ଣେଲTର ମାତ୍ରା ହେଉଛି।

a. 0 b. 1 c. 2 d. 3

18. ରୂପାନ୍ତରଣ T_1,T_2 ପାଇଁ T_3 ପାଇଁ a,b,c ଏବଂd ମଧ୍ୟରୁ ସଠିକ୍ ମେଳକ ଗ୍ରୁପ 2ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା କଥନ ସହିତ ଗ୍ରୁପ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି (ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ R2→R3)ରେ ଚୟନ କର:

ଗ୍ରୁପ-1	ଗ୍ରୁପ-2
P. $T_1(x, y) = (x, x, 0)$	1. ରାଙ୍କ 2ର ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ
Q. $T_2(x, y) = (x, x + y, y)$	2. ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ନୁହେଁ
R. $T_3(x, y) = (x, x + 1, y)$	3. ରାଙ୍କ 1ର ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ

a. P–3, Q–1, R–2 b. P–1, Q–2, R–3 c. P–3, Q–2, R–1 d. P–1, Q–3, R–2

19. ଯଦି T : $\boldsymbol{R^4} \to \boldsymbol{R^3}$] T(x, y, z, w) = (x – y + z + w, x + 2z – w, x + y + 3z – 3w)] ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥିବା ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ, ତେବେ ଏହାର ବ୍ୟାପ୍ତିର ମାତ୍ରା ହେଉଛି

a. 3 b. 2 c. 1 d. 0

20. ଯଦି T : $\boldsymbol{R^3} \to \boldsymbol{R^3}$] T($x_1$, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 – x_3) ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥିବା ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ, ତେବେT ର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶର ମାତ୍ରା ହେଉଛି

a. 0 b. 1 c. 2 d. 3

ଉତ୍ତରମାଳା

1. c	2. c	3. b	4. b
5. b	6. d	7. b	8. a
9. b	10. a	11. a	12. b
13. a	14. a	15. a	16. a
17. a	18. a	19. b	20. b

ଅସମାହିତ କଠିନ ପ୍ରଶ୍ନ

1. Q ରେ Q($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$) ର ମାତ୍ରା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

2. (–1, 1)ରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥିବା ଅବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ଗୁଡିକର ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶରେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ {x, | x |}] ଫଳନ ଗୁଡିକର ସେଟ୍ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟେ।

3. ମନେକର R ରେ {α_1, α_2, ,..., α_{r-1}, α_r, α_{r+1}, ..., α_k}, k ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକରେ ଏକ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସେଟ୍

ଏବଂ ମନେକର $\beta_r = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \alpha_j$ ଯେଉଁଠାରେ $\alpha_r \neq 0$ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{r-1}, \beta_r, \beta_{r+1}, ..., \alpha_k\}$ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର।

4. ମନେକର V(F), xରେ ସମସ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ ଗୁଡିକର ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ ଏବଂ Vରେ D ଓ T, ଦୁଇଟି ରୈଖିକ ଅପରେଟ୍‌ର ଏହିପରି ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଛି $D[f(x)] = \frac{df(x)}{dx}$, $T[f(x)] = xf(x)$ ପ୍ରତ୍ୟେକ $f(x) \in V$ ପାଇଁ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଏହି ଅପରେଟର ଗୁଡିକର ଗୁଣଫଳ କ୍ରମବିନିମୟୀ ନୁହେଁ, ଅର୍ଥାତ $DT \neq TD$ ଏବଂ $(TD)^2 = TD + T^2D^2$.

5. ମନେକର $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ ଓ $f_3(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$] $0 \leq x \leq 2\pi$ ପାଇଁ, ଧ୍ରୁବକ αଓβ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି $\alpha f_1 - 2f_2 - \beta f_3 = 0$] ଏବଂ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\{f_1, f_2, f_3\}$ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ ହେବ।

6- ମନେକର T, $\mathbf{R}^3$ ରୁ $\mathbf{R}^3$କୁ ଏକ ରୈଖିକ ମ୍ୟାପ $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 3y + z, 4x + 7y - z)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି,

Tର କର୍ଣ୍ଣେଲ୍ (ଜ୍ୟାମିତିକ ଭାବରେ) ହେଉଛି..........

ଯାହାର ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକ ହେଉଛି..........

Tର ବ୍ୟାପ୍ତି (ଜ୍ୟାମିତିକ ଭାବରେ)...

ଯାହାର ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକ ହେଉଛି..........

7- P_n, Rରେ ସମସ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ ଫଳନ ଗୁଡିକର ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ। P_n ର ସାଧାରଣ ଆଧାର ହେଉଛି ପଲିନୋମିଆଲ୍ $1, t, t^2, t^3, ..., t^{n-1}$- ର ସେଟ୍, ଯାହାର $P_3 \to P_5$ କୁ $T(f(x)) = \int_0^x \int_0^u P(t)\,dt \ \forall x, u \in R$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି

a- ସାଧାରଣ ଆଧାର ଭିତ୍ତିକ P_3 ରୁ P_5, T ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

b- T ର କର୍ଣ୍ଣେଲ କ'ଣ?

c- T ର ବ୍ୟାପ୍ତ ସ୍ପେଶ କେଉଁ ଭେକ୍ଟର ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତୃତ କରାଯାଇଛି।

8. ମନେକର $\mathbf{R}^2$ ରେ T] ରେଖା $y = x$ରେ ପ୍ରତିଫଳନ।

a- T ର ମାନକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଲେଖ।

b- ମାନକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ବ୍ୟବହାର କରି $T(3, 4)$କୁ ଗଣନା କର।

9. ମନେକର $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$] $T(x, y, z) = (x + y + z, y - 2z, y - 3z)$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଥିବା ରୈଖିକ ମ୍ୟାପ ଏବଂ $\mathbf{R}^3$ରେ $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$] ଏକକ ଗୋଲକ; ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

i. $T(S)$ ii. $T^{-1}(S)$

10. ମନେକର $T : V \to V$ ଏକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର୍, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

i. $N(T) \subseteq N(T^2)$ ii. $R(T^2) \subseteq R(T)$

11. ମନେକର $T : V \to V$ ଏକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର, ଯେପରିକିକି ରାଙ୍କ (T^2) = ରାଙ୍କ (T)] ଯେଉଁଠାରେ V

ହେଉଛି ସସୀମ ମାତ୍ରିକ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

i. $N(T) = N(T^2)$ ii. $R(T) = R(T^2)$ iii. $R(T^2) \cap N(T^2) = \{0\}$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. 4 5. $\alpha = \sqrt{3} - 1, \beta = \sqrt{6}$ 6. ରେଖା, $\frac{-x}{5} = \frac{y}{3} = z$; ସମତଳ, $2x + y - z = 0$

7. a. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 \end{bmatrix}$ b. $\{0\}$ c. $\{x, x^2, x^3\}$

8. a. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b. (4, 3)

9. i. $x^2 - 8xy + 26y^2 + 6xz - 38yz + 14z^2 = 1$

   ii. $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2xz - 8yz + 14z^2 = 1$

ଅଧିକ ଜାଣନ୍ତୁ

1. ନିମ୍ନୋକ୍ତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ବାସ୍ତବ ଗୁଣାଙ୍କ ସହିତ ପଲିନୋମିଆଲର ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶର ସବ-ସ୍ପେଶ ନୁହେଁ।

   a- w, x ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜିତ ସମସ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲକୁ ନେଇ ଗଠିତ

   b $w = \{p(x) \in V : p(3) = 0\}$

   c. $w = \{p(x) \in V : p(a) = p(1 - a), a \in R\}$

   d. w, ପୂର୍ଣ୍ଣାଙ୍ଗ ଗୁଣାଙ୍କ ସହିତ ସମସ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲକୁ ନେଇ ଗଠିତ।

2. ମନେକର କ୍ଷେତ୍ର Fରେ 'n' ମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ Vଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ। ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକୁ ବିଚାର କର।

   I- 'n' ଉପାଦାନ ଧାରଣ କରିଥିବା Vର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପସେଟ୍ ହେଉଛି Vର ଆଧାର।

   II- V ର କୌଣସି ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଉପସେଟ୍ 'n' ଉପାଦାନରୁ ଅଧିକ ଧାରଣ କରେ ନାହିଁ,

   a. (I) କେବଳ b. (II) କେବଳ

   c. ଉଭୟ (I) ଏବଂ (II) d. (I) କିମ୍ବା (II)ନୁହେଁ

3. ମନେକର V ବାସ୍ତବ ପଲିନୋମିଆଲ ଗୁଡିକର ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ ଯାହାର ଘାତ 2 ରୁ ଅତିକ୍ରମ କରିବ ନାହିଁ।

   ମନେକର $f(x) = x - 1,$ $g(x) = x + 1$

   $h(x) = x^2 - 1,$ $j(x) = x^2 + 1$

   ତେବେ ସେଟ୍ {f, g, h, j} ହେଉଛି

a. ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର b- ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ $fg = h$

c- ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ କାରଣ $f + g - h = 0$ d- ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ କାରଣ $f - g - h - j = 0$

4. ମନେକର ସମସ୍ତ 10 x 10 ବାସ୍ତବ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସବ-ସ୍ପେଶ $w = \{[a_{ij}], a_{ij} = 0]$ ଯଦି i ଯୁଗ୍ମ$\}$, ତେବେ w ର ମାତ୍ରା ହେଉଛି,

a. 25 b. 50 c. 75 d. 100

5. ଯଦି $T : \boldsymbol{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{R}^3$ ଏହି ପ୍ରକାର ଦତ୍ତ ଛି ଯେ $T(x, y, z) = (x - y, y + 3z, x + 2y)$ ତେବେ T^{-1} ହେଉଛି

a. $\frac{1}{3}\left(2x + z, -x + z, \frac{x}{3} + y - \frac{z}{3}\right)$ b. $\frac{1}{3}\left(2x + y, -x + y, \frac{1}{3}x - \frac{x}{3y} + z\right)$

c. $\frac{1}{3}\left(x + 2y, x - y, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - z\right)$ d. $\frac{x + y + z}{3}$

6. T କୁ $\boldsymbol{R}^2$ ଉପରେ $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$, ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି ତେବେ $\boldsymbol{R}^2$ ପାଇଁ ମାନକ ଆଧାର ଭିତ୍ତିକ T^{-1} ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହେଉଛି

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

7. ମନେକର N] ସର୍ବାଧିକ 3] ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ପଲିନୋମିଆଲ ଗୁଡିକର ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ। S : N $\rightarrow$ N] $(Sp)(x) = p(x + 1)$, $p \in$ N. ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି ତେବେ ସ୍ତମ୍ଭ ଭେକ୍ଟରକୁ ବିଚାରକୁ ନେଇ $\{1, x, x^2, x^3\}$ର ଆଧାରରେ Sର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହେଉଛି

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ b $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

8. ସମସ୍ତ $x \in R^3$ ର ସେଟ୍ ଯାହା ପାଇଁ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକ $(1, x, 0)$, $(0, x^2, 1)$ ଏବଂ $(0, 1, x)]$ R^3 ରେ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟେ ତାହା

a. $\{x \in R^3 : x = 0\}$ b $\{x \in R^3 : x \neq 0\}$ c. $\{x \in R^3 : x \neq 1\}$ d. $\{x \in R^3 : x \neq -1\}$

9. କୌଣସି $n \in$ N] ପାଇଁ, ମନେକର $n \in N$, P_n ହେଉଛି ସର୍ବାଧିକ n ଘାତ ଥିବା ବାସ୍ତବ ଗୁଣାଙ୍କ ସହିତ ସମସ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ $T : P_n \rightarrow P_{n+1}$ ଯେପରିକି $T(p)(x) = p'(x) - \int_0^x p(t)\,dt$ ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି, ତେବେ T ର ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶର ମାତ୍ରା ହେଉଛି

a. 0 b 1 c. n d. $n + 1$

10. ମନେକର V ହେଉଛି ସମସ୍ତ 2×2 ବାସ୍ତବ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ବାସ୍ତବ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ। $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ ପାଇଁ Vରେ ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ T କୁ T(P) = QP ରୂପରେ ବାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି, ତେବେ T ର ରାଙ୍କ ହେଉଛି।

a. 1 b 2 c. 3 d. 4

ଉତ୍ତରମାଳା

1. d 2. b 3. d 4. b 5. a
6. c 7. b 8. c 9. a 10. b

ସହାୟକ ଓ ପରାମର୍ଶ ମୂଳକ ପଠନ

1. Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.
2. Dettman, J.W.(1974). Introduction to Linear Algebra and Differential Equations, McGraw Hill, Kogakusha.
3. Garg, Reena (2019). Engineering Mathematics-I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P)Ltd.
4. Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers.
5. Halmos, P.R. (1958). Finite Dimensional Vector Space, D. Van Nostrand Company.
6. Herstein, I.N. (1993). Topics in Algebra, Wiley Eastern.
7. Hohn, E.Franz. (1964). Elementary Matrix Algebra, Macmillan Company, NewYork.
8. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition, Narosa.
9. Lang, S. (1987). Linear Algebra, Springer, New York.
10. Philip, Franklin (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. NewYork.
11. Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.
12. Ram, Babu. Engineering Mathematics, Pearson.
13. Thomas, G.B. and Finney, R.L.(1992). Calculus and Analytic Geometry, Addision-Wesley, Reading, MA.

5 ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍-II

ଅଧ୍ୟାୟ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ:

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ ଓ ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଧର୍ମ, ଆଇଗନ୍ ଆଧାର, ଆଇଗନ୍ ସ୍ପେଶ୍, ସମମିତ (Symmetric), ବିଷମ-ସମମିତ (Skew-symmetric) ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ,ଏହାର ଆଧାରରେ ଉପପାଦ୍ୟ ଓ ଲମ୍ବୀୟ (Orthogonal) ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ (Diagonalization), ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ (Inner-product) ସ୍ପେଶ୍, ଗ୍ରାମ-ସ୍କିମିଡ ଲାମ୍ବିକୀକରଣ (Orthogonalization) ଇତ୍ୟାଦି ବିସ୍ତୃତ ଭାବରେ ବାଖ୍ୟା କରାଯାଇଛି। ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ସଂଖ୍ୟକ ଉଦାହରଣ ସହିତ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ମାନଙ୍କର ଆବଶ୍ୟକତା ଅନୁଯାୟୀ ଏହି ସମସ୍ତ ବିଷୟ ରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି।

ଯୁକ୍ତିଯୁକ୍ତତା:

ଆଜିକାଲି, ଅନେକ କାରଣରୁ ସାଧାରଣତଃ ପରିସଂଖ୍ୟାନ ବିଶ୍ଳେଷଣରେ, ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂରେ ଏକ ଆଲଗୋରିଦମ୍ ତିଆରି ପାଇଁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏକ ଡାଟାବେସ୍ ଭାବରେ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ । କିନ୍ତୁ ଅର୍ଥନୀତି ଓ ଗଣିତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପରିସଂଖ୍ୟାନ ପାଇଁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଧିକ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ । ସେତୁ ନିର୍ମାଣର ଡିଜାଇନରେ, କାର ଷ୍ଟେରିଓ ସିଷ୍ଟମର ଡିଜାଇନରେ ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟର ବ୍ୟବହାର ହୁଏ । ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ ଓ ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ପ୍ରୟୋଗ ସମମିତ ଉପାଦାନ ରୂପାନ୍ତରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ତିନୋଟି ପର୍ଯ୍ୟାୟ ସିଷ୍ଟମକୁ ଅଲଗା କରିବା ପାଇଁ ଉପଯୋଗୀ । ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ ଓ ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ସମସ୍ୟାକୁ ସରଳୀକରଣ କରିବା ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ । ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟଗୁଡିକ କେବଳ ପ୍ରାକୃତିକ ଘଟଣା ଗୁଡିକୁ ବାଖ୍ୟା କରିବା ପାଇଁ ନୂତନ ଏବଂ ଉନ୍ନତ ଡିଜାଇନ୍ ଆବିଷ୍କାର କରିବାକୁ ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ । କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ ଦ୍ୱାରା, ଆମେ କମ୍ପନର ପ୍ରାକୃତିକ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରିପାରିବା ।

ପ୍ରାକ୍-ଆବଶ୍ୟକତା

1. ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍, ଆଧାର, ମାତ୍ରା ବିଷୟରେ ଉତ୍ତମ ଜ୍ଞାନ ।
2. ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ରତା ଓ ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳତାର ଗଭୀର ଜ୍ଞାନ ।
3. ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ମାନେ ରୈଖିକ ସ୍ୱାଧୀନତାକୁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସରେ ପରିଣତ କରିବା ପାଇଁ ସମସ୍ତ କୌଶଳ ଜାଣିବା ଉଚିତ୍ |
4. ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ବିଷୟରେ ଅବଗତ ।

ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟ ସମାପ୍ତି ହେବା ପରେ, ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ସକ୍ଷମ ହେବେ:

U5-01: ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ସହିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସମ୍ପର୍କ; ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ ଗଣନା କରିବା, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ କରିବା ପାଇଁ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ।

U5-02: ଅନ୍ତର୍ଗୁଣ ଫଳ ସ୍ପେଶ୍ର ଗୁଣଧର୍ମ ବିଷୟରେ ଜ୍ଞାନ ଆହାରଣ କରିପାରିବେ ଏବଂ ଏହି ସ୍ପେଶ୍ ଭିତ୍ତିକ ଲମ୍ବ କୋଣୀୟତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବେ। ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ ସଂପୃକ୍ତ ଆଦର୍ଶ ସହିତ ପରିଚିତ

U5-03: ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ଆଡଜଏଣ୍ଟ ଏବଂ ଏହାର କାନନିକାଲ ରୂପର ଗୁରୁତ୍ୱ କୁ ବୁଝିପାରିବେ ଓ ବାଖ୍ୟା କରିପାରିବେ।

U5-04: ଅନ୍ତର୍ଗୁଣ ଫଳ ସ୍ପେଶ୍ରେ କୋଶୀ-ସ୍ୱାଜ ଅସମତା ଓ ତ୍ରିଭୁଜୀୟ ଅସମତା ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିପାରିବେ; ଗ୍ରାମ-ସ୍କିମିଡ ଲାମ୍ବିକୀକରଣ ବ୍ୟବହାର କରି ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ଆଧାର ପାଇପାରିବେ।

ଅଧ୍ୟାୟ ଫଳାଫଳ ସହ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳର ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ

ଅଧ୍ୟାୟ -5 ଫଳାଫଳ	ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳ ସହିତ ଆଶା କରାଯାଉଥିବା ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ (1- ଦୁର୍ବଳ ସହସମ୍ବନ୍ଧ ; 2- ମଧମ ସହସମ୍ବନ୍ଧ; 3- ଦୃଢ ସହସମ୍ବନ୍ଧ				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U5-01	-	-	1	3	3
U5-02	-	-	2	1	3
U5-03	-	-	1	3	2
U5-04	-	-	2	3	1

ଇତିହାସ:

µଅଗଷ୍ଟିନ ଲୁଇ କୋଶୀ

ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ଧୀରେ ଧୀରେ ଅଷ୍ଟାଦଶ ଶତାବ୍ଦୀରେ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ସମାଧାନ କରିବାରେ ଦେଖାଗଲା। ଏହା ଅଜବ ଲାଗୁଥାଇପାରେ କିନ୍ତୁ ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର (ଆଇଗନ୍ ଫଳନ) ରୈଖିକ ବୀଜଗଣିତର ବହୁ ପୂର୍ବରୁ ଏବଂ "ଭେକ୍ଟର" ଶବ୍ଦ ସାଧାରଣ ବ୍ୟବହାରରେ ଆସିବା ପୂର୍ବରୁ ଦେଖାଗଲା। ଛୋଟ ଦୋଳନ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ସେମାନେ ମୁଖ୍ୟ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଥିଲେ। ପରେ, ଲିଓନାର୍ଡ ଅଏଲର ଏକ ଘନବସ୍ତୁର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଗତି ଅଧ୍ୟୟନ କରିଥିଲେ, ଏବଂ ମୁଖ୍ୟ ଅକ୍ଷର ଗୁରୁତ୍ୱ ଆବିଷ୍କାର କରିଥିଲେ। ଜୋସେଫଂ-ଲୁଇ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜ ହୃଦୟଙ୍ଗମ କଲେ ଯେ ମୁଖ୍ୟ ଅକ୍ଷଗୁଡିକ ହେଉଛି ନିଷ୍କ୍ରିୟତା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର। କୋଶୀ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ମୂଳ ଶବ୍ଦକୁ ମଧ୍ୟ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିଥିଲେ, ଯାହାକୁ ବର୍ତ୍ତମାନ "ଆଇଗନ୍" ମୂଲ୍ୟ କୁହାଯାଏ; ତାଙ୍କ ଶବ୍ଦ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣରେ ଅଛି। ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ଶବ୍ଦ 1920 ମସିହା ପ୍ରଥମ ସଂସ୍କରଣ ହିଲବଟ-କୋରାଣ୍ଟଙ୍କ ପୁସ୍ତକ ପ୍ରଭାବରେ ଜର୍ମାନୀରୁ ଆସିଛି।

5.1 ରୈଖିକ ଅପରେଟରର. ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ ଏବଂ ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର

ମନେକର T ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ V(F) ରେଏକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର ଅଟେ। ଯଦି କୌଣସି ଅଣ-ଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର $v \in V$ ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଏହିପରି ଯେ ତାହା କିଛି $\lambda \in F$ ପାଇଁ $T(v) = \lambda v$ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ v କୁ λ ଅନୁରୂପ T ର ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର କୁହାଯାଏ ଏବଂ λ କୁ v ଅନୁରୂପ T ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟରକୁ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ଭେକ୍ଟର କିମ୍ବା ଅବ୍ୟକ୍ତ ଭେକ୍ଟର କୁହାୟାଏ ଏବଂ ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟକୁ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ମୂଲ୍ୟ (ମୂଳ) ବା ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ମୂଳ ଅଥବା ଅବ୍ୟକ୍ତ ମୂଳ କୁହାଯାଏ ।

5.2 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ ଓ ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର

ମନେକର A ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ X ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ ଭେକ୍ଟର, ତେବେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସମୀକରଣ $AX = \lambda X$

ଯାହାକି ନିମ୍ନୋକ୍ତ: n ସମୀକରଣକୁ ସୂଚାଏ ।

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\vdots \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots(1)$$

ଉପୋରକ୍ତ ରୈଖିକ ସଜାତୀୟ ସମୀକରଣ ସମୂହ (1) (ଯାହାର 'n' ଅଜ୍ଞାତ ମୂଲ୍ୟ ଅଛି) ର ସର୍ବଦା ତୁଚ୍ଛ ସମାଧାନ x1 = x2 = ... = xn = 0 ଅଛି ।

ଏକ ଅଣ-ତୁଚ୍ଛ ସମାଧାନ ପାଇବା ପାଇଁ, ଏହା ଆବଶ୍ୟକ ହୋଇଥାଏ ଯେ ସମୀକରଣ (1) ର ଗୁଣାଙ୍କ ମାନଙ୍କ

ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ମୂଲ୍ୟ ଲୁପ୍ତ ହେବ ଅର୍ଥାତ୍ ; ।

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad ...(2)$$

ଏହା ସ୍ୱଷ୍ଟ ଯେ ସମୀକରଣ(2) ରେ λ ର ଘାତ n ଅଟେ । ଏହାକୁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ (Characteristic Equation) କୁହାଯାଏ | ଆମେ ଏହାକୁ ନିମ୍ନୋକ୍ତ ପ୍ରକାରରେ ଲେଖିପାରିବା

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \qquad ...(3)$$

ବିଶେଷ ପରିସ୍ଥିତିରେ, $p_1 = -(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}) = -\text{(trace A)}$ ...(4)

ଏବଂ $p_n = (-1)^n |a_{ij}| = (-1)^n \text{(det. A)}$ ...(5)

ସମୀକରଣ (3) ର ବାମ ପଟ ସମ୍ପ୍ରସାରଣ କୁ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ପଲିନୋମିଆଲ୍

କୁହାଯାଏ । ସମୀକରଣ (3) ର n ଗୋଟି ମୂଲ୍ୟ ରହିଥାଏ । ଏହାକୁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ (କିମ୍ବା ଅବ୍ୟକ୍ତ) କିମ୍ବା ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ କୁହାଯାଏ । ପ୍ରତ୍ୟେକଟି ମୂଲ୍ୟ ଅନୁସାରେ ସମୀକରଣ (1) ର ଏକ ଅଣ-ଶୂନ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିଥାଏ ।

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ଯାହାକୁ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ଭେକ୍ଟର କିମ୍ବା ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର କୁହାଯାଏ ।

ଯଦି A ର ଆଇଗେନ୍ ମୂଲ୍ୟ $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n$, ହୋଇଥାଏ ତେବେ, ଆମେ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣକୁ ନିମ୍ନୋକ୍ତ ପ୍ରକାରରେ ଲେଖିପାରିବା

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) ...... (\lambda - \lambda_n) = 0,$$

କିମ୍ବା $\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)\lambda^{n-1} + ... + (-1)^n \lambda_1\lambda_2 ... \lambda_n = 0$

ସମୀକରଣ (3) ସହ ତୁଳନା କରି ଆମେ ଦେଖିଥାଉ କି

$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = -p_1 = \text{trace A}$, [ସମୀକରଣ (4)ରୁ]

ଏବଂ $\lambda_1\lambda_2 ... \lambda_n = (-1)^n p_n = \text{det. (A)}$,[ସମୀକରଣ(5)ରୁ]

ମନ୍ତବ୍ୟ:

1. ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟକୁ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ମୂଲ୍ୟ,ଉଚିତ୍ ମୂଲ୍ୟ, ଅବ୍ୟକ୍ତ ମୂଲ୍ୟ କିମ୍ବା ସ୍ପେକ୍ଟ୍ରାଲ୍ ମୂଲ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।
2. ସେହିଭଳି, ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟରକୁ, ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ଭେକ୍ଟର, ଉଚିତ୍ ଭେକ୍ଟର, ଅବ୍ୟକ୍ତ ଭେକ୍ଟର ବା ସ୍ପେକ୍ଟ୍ରାଲ୍ ଭେକ୍ଟର କୁହାଯାଏ ।

5.2.1 ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟର ଗୁଣଧର୍ମ

a.ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଏବଂ ତା'ର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ୍ A′ ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ସମାନ ଅଟେ।

b. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ତାର ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣ ରେ ଥିବା ଉପାଦାନ ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ଅଟେ।

c.ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ତାର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ det (A), ଅର୍ଥାତ୍ $|A|$ ସହ ସମାନ ଅଟେ।

d.ଯଦି λ ଏକ ଅଣସିଂଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ 1/ λ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A^{-1} ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ହେବ ।

e. ଯଦି λ ଏକ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ 1/ λ ମଧ୍ଯ ତାର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଅଟେ ।

f. ଯଦି λ1, λ2, ..., λn ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ହୋଇଥାନ୍ତି , ତେବେ $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots \lambda_n^m$, ମାଟ୍ରିକ୍ସ A^mର ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ (m ଏକ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣାଙ୍କ ଅଟନ୍ତି)

g.ଏକ ଆଇଡିପୋଟେଣ୍ଟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଶୁନ ଅଥବା ଏକ ହୋଇଥାଏ ।

h. ତ୍ରିଭୁଜୀୟ ଏବଂ କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟଗୁଡିକ ତାହାର କର୍ଣ୍ଣ ଉପାଦାନମାନଙ୍କ ସହ ସମାନ ଅଟେ।

ପ୍ରମାଣ d:, ଯଦି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ λ ଅନୁରୂପରେ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର x ହୋଇଥାଏ ତେବେ A–1 ର ପ୍ରାକ୍ ଗୁଣନ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ କରିବା ଦ୍ୱାରା

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(\lambda X)$$

$$\Rightarrow \quad (A^{-1}A)X = \lambda A^{-1}X$$

$$\Rightarrow \quad IX = \lambda A^{-1}X$$

$$= \frac{1}{\lambda}X = A^{-1}X \qquad [\because \quad IX = X]$$

$\frac{1}{\lambda}$ A^{-1} ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଅଟେ ।

ପ୍ରମାଣ : f.ଯଦି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ λ ଅନୁରୂପରେ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର x ହୋଇଥାଏ ତେବେ $AX = \lambda X$

A ର ପ୍ରାକଗୁଣନ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ କରିବା ଦ୍ୱାରା

$$A(AX) = A(\lambda X) \quad \Rightarrow \quad (AA)X = \lambda(AX)$$

$$\Rightarrow \quad A^2X = \lambda AX$$

$$\Rightarrow \quad A^2X = \lambda^2X \qquad (\text{ଯେହେତୁ } AX = \lambda X)$$

ପୁନର୍ବାର Aର ପ୍ରାକଗୁଣନ ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱରେ କରିବା ଦ୍ୱାରା,

$$A^3X = \lambda^3X$$

ଏହି ପ୍ରକାର କରିବା ଦ୍ୱାରା ଆମେ ପାଇବା

$$A^m . X = \lambda^m X$$

ଏହା ଦର୍ଶାଏ ଯେ A^m ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ λ^m ଅଟେ । (m>0)

ଏହିପ୍ରକାର, ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ ,ଯଦି $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ A ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots \lambda_n^m$] A^m ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ହେବେ ।

5.2.2 ଆଇଗନ ସ୍ପେଶ୍

ମନେକର V(F) ରେ T ଏକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର ଓ λ ରୈଖିକ ଅପରେଟର T ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ହୁଏ, ତେବେ λ ଅନୁରୂପ ଆଇଗନ ସ୍ପେଶ୍‌କୁ Eλ ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଇଥାଏ ଏବଂ ଏହାର ବ୍ୟାଖ୍ୟା

$E_\lambda = \{v : T(v) = \lambda v\}$ ଦ୍ୱାରା ହୋଇଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୁପ ; ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ଏଠାରେ $\lambda = 1, 1$ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଅଟେ (ଯେହେତୁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ତ୍ରିଭୁଜୀୟ ରୂପରେ ଅଛି) ଏବଂ ତଦନୁସାରେ (1, 0) ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଅଟେ(ଆଗାମୀ ଉଦାହରଣରେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ଶିଖିବେ ଯେ, କିପରି ଏକ ଦତ୍ତ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟାନୁଯାୟୀ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ପ୍ରାପ୍ତ କରାଯାଇଥାଏ), ଏବଂ Eλ =1 (ଆଇଗନ ସ୍ପେଶ୍) = {(1, 0)}

5.2.3 ଆଇଗନ ଆଧାର

ମନେକର 'A' ଏକ $n \times n$ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ (ବା ରୈଖିକ ଅପରେଟର T) ଓ S = {v1, v2, ..., vn} ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 'A' ର ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ମାନଙ୍କର ସମାହାର । ତେବେ S କୁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଆଇଗନ ଆଧାର କୁହାଯିବ, ଯଦି S, R^n ର ଏକ ଆଧାର ସୃଷ୍ଟି କରୁଥାଏ ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 5.1 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ର ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ପଲିନୋମିଆଲ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ,

ସମାଧାନ: A ର ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ,

$$[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ପଲିନୋମିଆଲ $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 15$

(ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ 5.2 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ ର ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଏବଂ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ $(8 - \lambda)((7 - \lambda)(3 - \lambda) - 16) + 6(-6(3 - \lambda) + 8) + 2(24 - 2(7 - \lambda)) = 0$

$\Rightarrow$ $(8 - \lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 5) + 6(-10 + 6\lambda) + 2(10 + 2\lambda) = 0$

$\Rightarrow$ $8\lambda^2 - 80\lambda + 40 - \lambda^3 + 10\lambda^2 - 5\lambda - 60 + 36\lambda + 20 + 4\lambda = 0$

$\Rightarrow$ $-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 45\lambda = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 45\lambda = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda(\lambda^2 - 18\lambda + 45] = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda = 0, \lambda^2 - 18\lambda + 45 = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda^2 - 15\lambda - 3\lambda + 45 = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda(\lambda - 15) - 3(\lambda - 15) = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda - 3 = 0; \lambda - 15 = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda = 3; \lambda = 15; \lambda = 0$

ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଗୁଡିକ $\lambda = 0, 3, 15$

ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ପାଇବା ପାଇଁ: $[A-\lambda I]\mathbf{X} = 0$

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda = 0$ ପାଇଁ $$\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ $8x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$ ...(1)

$\Rightarrow$ $-6x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 0$ ...(2)

$\Rightarrow$ $2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$ ...(3)

ସମୀକରଣ (1) x 2 + ସମୀକରଣ (2) କରିବା ଦ୍ଵାରା,ଆମେ ପାଉ

$10x_1 - 5x_2 = 0$

$\Rightarrow$ $10x_1 = 5x_2$

$\Rightarrow$ $x_2 = 2x_1$ ...(4)

ସମୀକରଣ (3) x 3 + ସମୀକରଣ (2) କରିବା ଦ୍ଵାରା, ଆମେ ପାଉ

$-5x_2 + 5x_3 = 0$

$\Rightarrow$ $-5x_2 = -5x_3$

$\Rightarrow$ $x_2 = x_3$ ...(5)

ସମୀକରଣ (4) ଏବଂ (5) ରୁ, ଆମେ ପାଇବା

$$2x_1 = x_2 = x_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{2}$$

ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ $\lambda = 0$ ଅନୁରୂପରେ, ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ଅଟେ]

$\lambda = 3$ ପାଇଁ:

$$\begin{bmatrix} 8-3 & -6 & 2 \\ -6 & 7-3 & -4 \\ 2 & -4 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad 5x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$ ...(6)

$\Rightarrow \quad -6x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0$ ...(7)

$\Rightarrow \quad 2x_1 - 4x_2 + 0.x_3 = 0$ ...(8)

ସମୀକରଣ (8) ରୁ, $2x_1 = 4x_2$

$\Rightarrow \quad x_1 = 2x_2$

ସମୀକରଣ (7)ରେ $x_1 = 2x_2$ ରଖିଲେ,

$\Rightarrow \; x_3 = -2x_2$

$$x_1 = 2x_2 = -x_3$$

$$\therefore \quad \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{-2}$$

$\lambda = 3$ ପାଇଁ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\lambda = 15$ ପାଇଁ:

$$\begin{bmatrix} 8-15 & -6 & 2 \\ -6 & 7-15 & -4 \\ 2 & -4 & 3-15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -7 & -6 & 2 \\ -6 & -8 & -4 \\ 2 & -4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad -7x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$ ...(9)

$-6x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0$ ...(10)

$2x_1 - 4x_2 - 12x_3 = 0$ ...(11)

ସମୀକରଣ (11) x 3 + ସମୀକରଣ (10) କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଉ $x_2 = -2x_3$

ସମୀକରଣ (9) x 2 + ସମୀକରଣ (10) କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଉ,

$$x_1 = -x_2$$

$$x_1 = -x_2 = 2x_3$$

$$\therefore \quad \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3}{1}$$

ଏହିପରି $\lambda = 15$ ପାଇଁ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟରଙ୍କ $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ଉଦାହରଣ 5.3 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ର ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ, ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ଆଇଗନ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ମନେକର $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

ଏହାର ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ $|A - \lambda I| = 0$ ଅଟେ

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-2-\lambda)(-(1-\lambda)\lambda - 12) - 2(-2\lambda - 6) - 3(-4 + 1 - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-2-\lambda)(-\lambda + \lambda^2 - 12) - 2(-2\lambda - 6) - 3(-3 - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3 + \lambda^2 - 21\lambda - 45 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda + 3)(\lambda + 3)(\lambda - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -3, -3, 5$$

ଏଣୁ, ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଗୁଡିକ $\lambda = -3, -3, 5$

ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ପାଇବା ପାଇଁ: $\lambda = -3$ ପାଇଁ

$$[A - \lambda I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2+3 & 2 & -3 \\ 2 & 1+3 & -6 \\ -1 & -2 & 0+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x + 2y - 3z = 0$$

$$2x + 4y - 6z = 0$$

$$-x - 2y + 3z = 0$$

ଉପରୋକ୍ତ ସମୀକରଣରୁ ଏହା ମିଳିଥାଏ ଯେ, $x + 2y - 3z = 0$ କେବଳ ଏକମାତ୍ର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମୀକରଣ ଅଟେ ।

ତେଣୁ, ମନେକର z = 0, ଆମେ ପାଉ $x + 2y = 0$

$$\Rightarrow x = -2y$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-1}, z = 0$$

ଏଥିପାଇଁ: $\lambda = -3$ ପାଇଁ (2, –1, 0) ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଅଟେ ।

ଆଉମଧ୍ୟ $\lambda = -3$ ପାଇଁ ଅନ୍ୟ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ପାଇବାକୁ, ମନେକର $y = 0$ ଆମେ ପାଉ $x - 3z = 0$

$$\Rightarrow x = 3z$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{z}{1}, y = 0$$

ଏଥିପାଇଁ: $\lambda = -3$ ପାଇଁ (3, 0, 1) ଅନ୍ୟ ଗୋଟେ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଅଟେ।

$\lambda = 5$ ପାଇଁ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର:

$$[A - \lambda I]X = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2-5 & 2 & -3 \\ 2 & 1-5 & -6 \\ -1 & -2 & 0-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-7x + 2y - 3z = 0 \quad ...(1)$$

$$\Rightarrow 2x - 4y - 6z = 0 \quad ...(2)$$

$$-x - 2y - 5z = 0 \quad ...(3)$$

ସମୀକରଣ (1) x 2 + ସମୀକରଣ (2) କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଉ

$$-12x - 12z = 0$$

କିମ୍ବା

$$-12x = 12z$$

$$\Rightarrow x = -z$$

ସମୀକରଣ (3) x 2 + ସମୀକରଣ (2) କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଉ

$$y = -2z$$

$$\therefore \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$$

ତେଣୁ: $\lambda = -5$ ପାଇଁ (1, 2, –1) ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଅଟେ।

ଯେହେତୁ ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ରୈଖିକ ଭାବେ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଏବଂ R^3 ର ଆଧାର ସୃଷ୍ଟିକରନ୍ତି ।

$\therefore$ ଆଇଗନ ଆଧାର {(2, –1, 0), (3, 0, 1) (1, 2, –1)} ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ **5.4** ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ର ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ, ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ଆଇଗନ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟକର

ସମାଧାନ: ମନେକର $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

ଏବଂ $|A - \lambda I| = 0$ (ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ)

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (6-\lambda)((3-\lambda)^2-1) + 2(-2(3-\lambda)+2) + 2(2-2(3-\lambda)) = 0$$

$$\Rightarrow (6-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8) + 2(2\lambda-4) + 2(2\lambda-4) = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda - 32 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda^2-10\lambda+16) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-8) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2, 2, 8$$

ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ $\lambda = 2, 2, 8$ ଅଟେ

λ = 2 ପାଇଁ:

$$[A - \lambda I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6-2 & -2 & 2 \\ -2 & 3-2 & -1 \\ 2 & -1 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4x - 2y + 2z = 0$$

$$\Rightarrow -2x + y - z = 0$$

$$2x - y + z = 0$$

ଏଠାରେ 2x-Y=Z=0 ହିଁ ଏକମାତ୍ର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମୀକରଣ ଅଟେ ।

ତେଣୁ, ମନେକର Z = 0,

$$2x - y = 0$$

$$\Rightarrow 2x = y$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{2}, z = 0$$

ତେଣୁ: λ = 2 ପାଇଁ (1, 2,0) ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଅଟେ।

ପୁନଃ, λ = 2 ପାଇଁ

ମନେକର, y = 0, ଏଠାରେ $2x + z = 0$

$$\Rightarrow z = -2x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{z}{-2}$$, y = 0 ହୋଇଥାଏ

ତେଣୁ: λ = 2 ପାଇଁ ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର (1, 0, -2) ଅଟେ।

$\lambda = 8$ ପାଇଁ:

$$[A - \lambda I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6-8 & -2 & 2 \\ -2 & 3-8 & -1 \\ 2 & -1 & 3-8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad -2x - 2y + 2z = 0$ ...(1)

$\Rightarrow \quad -2x - 5y - z = 0$ ...(2)

$2x - y - 5z = 0$ ...(3)

ସମୀକରଣ (2) x 2 + ସମୀକରଣ (1) କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଉ

$$-6x - 12y = 0$$

କିମ୍ବା $\quad x = \quad -2y$

ସମୀକରଣ (2) ଓ (3) କୁ ଯୋଗ କଲେ ଆମେ ପାଇବା $y = -z$

$$\therefore \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

$\lambda = 8$ ଅନୁରୂପରେ (2, –1, 1) ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଅଟେ।

ଏହାପରେ,ଯେହେତୁ ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ରୈଖିକ ଭାବେ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟନ୍ତି, ତେଣୁ R^3 ର ଆଧାର ସୃଷ୍ଟି କରନ୍ତି ।

$\therefore$ ଆଇଗନ ଆଧାର {(1, 2, 0), (1, 0, –2), (2, –1, 1)}.ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ **5.5** ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ର ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ଆଇଗନ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ, $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad (1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda) - 2) - 0 - 1(2 - 4 + 2\lambda) = 0$

କିମ୍ବା $\quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda - 2\lambda + 2 = 0$

କିମ୍ବା $\quad \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

କିମ୍ବା $\quad (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$

କିମ୍ବା $\quad (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ $\lambda = 1, 2, 3$ ଅଟେ

$\lambda = 1$ ପାଇଁ : $[A - \lambda I]X = 0$

ଅଥବା $\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 2 & 2 & 3-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;k $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-x_3 = 0$ ...(1)

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ...(2)

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ ...(3)

ସମୀକରଣ (1) କୁ ସମୀକରଣ (2) ଓ (3)ରେ ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ପାଉ

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{0}$$

ଏହିପରି ଭାବେ $\lambda = 1$ ପାଇଁ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ଅଟେ

$\lambda = 2$ ପାଇଁ:

$$[A - \lambda I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 0 & -1 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ 2 & 2 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

କିମ୍ବା $$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

କିମ୍ବା $-x_1 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_3$ ...(4)

$x_1 + x_3 = 0$ ...(5)

$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2x_2 = 0$ ...(6)

ସମୀକରଣ (4) ଏବଂ (6) ଠାରୁ, $\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-1}; X_3 = -X_1$

ତେଣୁ $\lambda = 2$ ପାଇଁ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ହେବ]

$\lambda = 3$ ପାଇଁ: $[A - \lambda I]X = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 0 & -1 \\ 1 & 2-3 & 1 \\ 2 & 2 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ କିମ୍ବା } \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

କିମ୍ବା $-2x_1 + 0.x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x_1 = x_3$ ...(7)

$x_1 - x_2 + x_3 = 0$ ...(8)

$2x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2$ ...(9)

ସମୀକରଣ 7 ରୁ , $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{-2}$

ତେଣୁ $\lambda = 3$ ପାଇଁ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ଅଟେ

ଯେହେତୁ ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ରୈଖିକଭାବେ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟନ୍ତି,ତେଣୁ

{(1, –1, 0), (2, –1, –2), (1, –1, –2)} ଆଇଗନ ଆଧାର ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 5.6 $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ର ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ, ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ଆଇଗନ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ସମାଧାନ: ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ $|A - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 7\lambda + 10 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -6, -1$$

ଏଣୁ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ $\lambda = -6$ ଏବଂ -1 ଅଟେ

$\lambda = -1$ ପାଇଁ :

$$[A - \lambda I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} -5+1 & 2 \\ 2 & -2+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

କିମ୍ବା $$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

କିମ୍ବା $$-4x_1 + 2x_2 = 0$$
$$2x_1 - x_2 = 0$$

ଯେହେତୁ $2x_1 - x_2 = 0$ ହିଁ ଏକମାତ୍ର ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ଅଟେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $2x_1 - x_2 = 0$

$$2x_1 = x_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2}$$

ତେବେ $\lambda = -1$ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ଅଟେ

$\lambda = -6$ ପାଇଁ:

$$[A - \lambda I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} -5+6 & 2 \\ 2 & -2+6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

କିମ୍ବା $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

କିମ୍ବା $x_1 + 2x_2 = 0$

$2x_1 + 4x_2 = 0$

ଯେହେତୁ $x_1 + 2x_2 = 0$ ହିଁ ଏକମାତ୍ର ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ଅଟେ ,ବର୍ତ୍ତମାନ

$x_1 + 2x_2 = 0$

$x_1 = -2x_2$

$\Rightarrow \quad \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-1}$

ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ଅଟେ ।

ଯେହେତୁ ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ।

ତେଣୁ, {(1, 2), (2, –1)} ଆଇଗନ ଆଧାର ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ **5.7** ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ର ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ, ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ଆଇଗନ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ]$|A - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

କିମ୍ବା $(3 - \lambda)((2 - \lambda)(5 - \lambda) - 0) - 1(0) + 4(0) = 0$

କିମ୍ବା $\lambda = 2, 3, 5$

ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ $\lambda = 2, 3, 5$ ଅଟେ

$\boldsymbol{\lambda} = 2$ ପାଇଁ

$$[A - \lambda I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3-2 & 1 & 4 \\ 0 & 2-2 & 6 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

କିମ୍ବା $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$

କିମ୍ବା $x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$ ...(1)

$6x_3 = 0$ ...(2)

$3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$ ...(3)

ସମୀକରଣ (2) କୁ ସମୀକରଣ (1) ରେ ବ୍ୟବହାର କଲେ

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$\frac{x_1}{1} = \frac{-x_2}{1}$$

$$\therefore \quad \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-1}$$

ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ଅଟେ

$\lambda = 3$ ପାଇଁ:

$[A - 3I]X = 0$

କିମ୍ବା $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

କିମ୍ବା $0x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$ ...(4)

$-x_2 + 6x_3 = 0$ ...(5)

$2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ ...(6)

ଏହିପରି ଆମେ ପାଇବା, $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{0} = \frac{x_3}{0}$

ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ଅଟେ

$\lambda = 5$ ପାଇଁ $[A - 5I]X = 0$

$$\begin{bmatrix} 3-5 & 1 & 4 \\ 0 & 2-5 & 6 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

କିମ୍ବା $$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

କିମ୍ବା $2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0$ ...(7)

$3x_2 - 6x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3$ ...(8)

$2x_1 - 6x_3 = 0$ ...(9)

ସମୀକରଣ (1) ଏବଂ (2) ବ୍ୟବହାର କରି $\frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{1}$

ତେଣୁ $\lambda = 5$ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ଅଟେ

ଯେହେତୁ ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟେ,ତେଣୁ {(1, –1, 0), (1, 0, 0), (3, 2, 1)} ଆଇଗନ ଆଧାର ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 5-8 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ ର ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ, ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ଆଇଗନ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ସମାଧାନ: ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ, $|A - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(-1-\lambda) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+3)(\lambda-4) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda + 3 = 0, \quad \lambda - 4 = 0$$

$$\lambda = -3, \quad \lambda = 4$$

ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ λ = –3, ଏବଂ 4 ଅଟେ

λ = –3 ପାଇଁ: $[A + 3I]X = 0$

$$\begin{bmatrix} 2+3 & 2 \\ 5 & -1+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$5x + 2y = 0$$

$$5x + 2y = 0$$

ଯେହେତୁ କେବଳ ଏକ ମାତ୍ର ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ଅଛି $5x + 2y = 0$

$$5x = -2y$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y}{5}$$

ତେଣୁ $\lambda = -3$ ରେ ପାଇଁ ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ହେବ]

λ = 4 ପାଇଁ:

$$[A - 4I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2-4 & 2 \\ 5 & -1-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

କିମ୍ବା $$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

କିମ୍ବା $$-2x + 2y = 0$$

$$5x - 5y = 0$$

ପୁନଃ, ଉଭୟ ରୈଖିକ ନୀର୍ଭରଶୀଳ,ଆମେ ପାଉ $x - y = 0$

$$x = y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{1}$$

ତେଣୁ $\lambda = 4$ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ଅଟେ ।

ଯେହେତୁ ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ।

ତେଣୁ, $\{(-2, 5), (1, 1)\}$ ଆଇଗନ ଆଧାର ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 5-9- $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ ର ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ, ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ଆଇଗନ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରେ ।

ସମାଧାନ: (ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ଏହାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରିପାରିବେ)ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ 1, –2, –2 ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ଅଟେ କୌଣସି ଆଇଗନ ଆଧାର ନାହିଁ

ଉଦାହରଣ 5-10 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ର ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ, ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ଆଇଗନ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ 1, 1, 5 ଅଟେ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ଅଟେ$\{(-2, 1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$ ଆଇଗନ ଆଧାର ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ 5.11 A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ ର ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ତେଣୁ A^{25} ଏବଂ $A + 2I$ ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1, \lambda = 3.$$

A^{25} ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ :

ଅର୍ଥାତ $(-1)^{25} = -1$

ଏବଂ $(3)^{25} = 3^{25}$

$A + 2I$ ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ

$$A + 2I = 3 + 2(1) = 3 + 2 = 5$$

$$A + 2I = -1 + 2(1) = -1 + 2 = 1$$

ସମ୍ମିଶ୍ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ:

ଉଦାହରଣ 5.12 ଯଦି $0 < \theta < \pi$] ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ A = $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ର କୌଣସି ବାସ୍ତବ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ କିମ୍ବା ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ନାହିଁ।

ସମାଧାନ: ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ]

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 0$$

$$\cos^2\theta - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2 + \sin^2\theta = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2\cos\theta + \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2}$$

$$= \frac{2\cos\theta + 2i\sqrt{1 - \cos^2\theta}}{2}$$

$$= \cos\theta \pm i\sin\theta$$

ତେଣୁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର କୌଣସି ବାସ୍ତବ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଏବଂ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ନାହିଁ ।

ଉଦାହରଣ 5.13 ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ପାଇଁ ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଏବଂ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର A ର କୌଣସି ଆଇଗନ ଆଧାର ଅଛିକି ?

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ, ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ [A ->] = 0

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda = 1, 1$$

λ = 1 ପାଇଁ:

$$AX = \lambda X$$

$$[A - \lambda I]X = 0$$

$$[A - I]X = 0, (\lambda = 1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ଯଦି $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\lambda = 1$ (ପାଇଁ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର) $\Rightarrow y = 0$

x = 1 ନିଆଗଲେ, $\lambda = 1$ ଅନୁରୂପରେ $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$]

ଏଠାରେ, ଆମେ ଦେଖିପାରିବା ଯେ, R^2 ପାଇଁ X କୌଣସି ଆଧାର ପ୍ରସ୍ତୁତ କରେ ନାହିଁ, ତେଣୁ, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ପାଇଁ କୌଣସି ଆଇଗନ ଆଧାର ନାହିଁ ।

ଉଦାହରଣ 5.14 ରୈଖିକ ଅପରେଟର T : R2 → R2 ପାଇଁ ଯେତେବେଳେ T (X,Y)=(3X+5Y,2X+3Y) ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ,

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ, T(X,Y)=(3X+2Y,2X+3Y)

R^2 ମାନକ ଆଧାରର ସାପେକ୍ଷ T ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏପରି ହୋଇଥାଏ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ଅନୁରୂପ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ ହେଉଛି,

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)^2 - 10 = 0$$

$$\lambda = 3 \pm \sqrt{10}$$

ତେଣୁ $3 + \sqrt{10}$ ଏବଂ $3 - \sqrt{10}$] T ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଅଟନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ 5.15 ରୈଖିକ ଅପରେଟର T : R2 → R2 ପାଇଁ, ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ, ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ଆଇଗନ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେତେବେଳେ, କି T (x, y) = (y, x)

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ T(x, y) = (y, x)

ମାନକ ଆଧାର R^2 ସଂପର୍କିତ T ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ଅନୁରୂପ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ, $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ଅଥବା $\lambda = \pm 1$, Tର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଅଟନ୍ତି । $\lambda = 1$ ପାଇଁ, ମନେକର ଅନୁରୂପ $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଅଟେ | ତେବେ

$AX_1 = \lambda X_1$

$[A - \lambda I]X_1 = 0$

$[A - I]X_1 = 0, \ (\lambda = 1)$

$-x_1 + y_1 = 0$

$x_1 - y_1 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = y_1$

$\Rightarrow$ y1 = 1, ନେବାଦ୍ୱାରା, ଆମେପାଉ x1 = 1

$\therefore \lambda = 1$ ଅନୁସାରେ ଏକ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ଅଟେ ।

$\lambda = -1$ ପାଇଁ, ମନେକର $X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ଅନୁରୂପ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର

$AX_2 = \lambda X_2$

$\Rightarrow \quad [A - \lambda I]X_2 = 0$

$[A + I]X_2 = 0, (\lambda = -1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad x_2 + y_2 = 0$

$x_2 = -y_2$

$y_2 = 1, \ x_2 = -1$ ନେବା ଦ୍ୱାରା,

$\therefore \quad \lambda = -1$ ଅନୁରୂପ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$] ଅଟେ ।

ଏଠାରେ, ଆମେ ଦେଖୁଯେ ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର R^2 ର ଆଧାର ସୃଷ୍ଟି କରନ୍ତି |

T ର ଆଇଗନ ଆଧାର = {(1, 1), (−1, 1)}

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 5-1

ନିମ୍ନୋକ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ମାନଙ୍କର ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କର:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} a & h & g \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

ନିମ୍ନୋକ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ମାନଙ୍କର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଏବଂ ଅନୁରୂପ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କର:

4. $\begin{bmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

10. ନିମ୍ନୋକ୍ତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର $T : R^2 \to R^2$ ପାଇଁ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ, ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ଆଇଗନ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର
    i. $T(x, y) = (y, -x)$
    ii. $T(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$

11. ନିମ୍ନୋକ୍ତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର $T : R^3 \to R^3$ ପାଇଁ ପ୍ରତିଟି ଆଇଗନ ସ୍ପେଶ ପାଇଁ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଏବଂ ଆଇଗନ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
    i. $T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$
    ii. $T(x, y, z) = (x + y, y + z, -2y - z)$
    iii. $T(x, y, z) = (x - y, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z)$
    iv. $T(x, y, z) = (3x + y + 4z, 2y + 6z, 5z)$

12 ମନେକର $T : R^3 \to R^3$ ଏକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର ଯେପରିକି କ୍ରମିତ ଆଧାର {(1, 2, 3), (1, 2, 0), (1, 0, 0)} ଅନୁରୂପ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$,T ର ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ। T ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ, ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ଆଇଗନ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଉତ୍ତର ମାଳା

1. –1, 1, 2
2. 2, 3, –2
3. a, b, c
4. 0, (–3, 1, 0); 1, (12, –4, –1); 0, (–3, 1, 0)
5. 1, (1, 1, –1); 2, (2, 1, 0); 0, (–3, 1, 0)

6. (2, 2, 2); (1, 0, 0) 7. (1, 1, 1); (0, 0, 1) 8. –1, (–3, –1, 3); 2, (0, 1, 0); 3, (1, 1, 1)

9. 2, (1, 0, 0); –2, (0, 1, 1); –4, (0, 1, –1)

10. i. ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ନାହିଁ ; ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ନାହିଁ ; ଆଇଗନ ଆଧାର ନାହିଁ

ii. ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ (–1, 4); ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର (–1, 1) ଏବଂ (2, 3); ଆଇଗନ ଆଧାର {(–1, 1), (2, 3)}

11. i. ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ (2, 3); ଆଇଗନ ଆଧାର {(1, 0, 0)}, {(1, 1, –2)}

ii. ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ (1); ଆଇଗନ ଆଧାର {(1, 0, 0)}

iii. ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ (1, 2, 3); ଆଇଗନ ଆଧାର {(1, 0, –1)}, {(2, –2, –1)} ଏବଂ {(1, –2, –1)}

vi. ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ (2, 3, 5); ଆଇଗନ ଆଧାର {(–1, 1, 0)}, {(1, 0, 0)} ଏବଂ {(3, 2, 1)}

12. ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ (2, 3, 5); ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର (-1, 1, 0), (1, 0, 0) ଏବଂ (3, 2, 1) ଆଇଗନ ଆଧାର {(–1, 1, 0), (1, 0, 0), (3, 2, 1)}

ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଗୁଣଧର୍ମ):

ଏଠାରେ ଆମେ ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜର କେତେକ ଫଳାଫଳ ଆଲୋଚନା କରିବା ଯାହକି ବିଭିନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ଗଣିତର ସମାଧାନ ଏବଂ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ ପାଇଁ ବିଶେଷଭାବେ ଦରକାରୀ ଅଟେ, ଯଦି A′ ଏବଂ B′ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଏବଂ B ର ଯଥାକ୍ରମେ ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜକୁ ସୂଚୀତ କରୁଥାନ୍ତି, ତେବେ ନିମ୍ନୋକ୍ତ ଫଳାଫଳ ମିଳିଥାଏ:

i. $(A')' = A$

ii. $(kA)' = kA'$, k, ଏକ ସ୍କେଲାର

iii. $(A + B)' = A' + B'$,ଏଠାରେ A ଏବଂ B ଗୁଣନ ଯୋଗ୍ୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ।

5.3 ସମମିତ ଏବଂ ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପପାଦ୍ୟ :

ଆମେ ଅଧ୍ୟାୟ 3 ରେ, ସମମିତ ଏବଂ ବିଷମ ସମମିତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ର ସଂଜ୍ଞା ଆଲୋଚନା କରିସାରିଅଛୁ |

ଏଠାରେ ଆମେ ତତ୍ ସମ୍ବନ୍ଧିତ କେତେକ ଉପପାଦ୍ୟ ଆଲୋଚନା କରିବା:

ଉପପାଦ୍ୟ 1: ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ସମମିତ ହେବାପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ଓ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ହେଉଛି $A = A'$।

ପ୍ରମାଣ : ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତ ।

ମନେକର $A = [a_{ij}]$ ଏକ n-ଧାଡି ବର୍ଗୀୟ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

ଏହାର ଅର୍ଥ $a_{ij} = a_{ji}$ ଓ A′ ଅର୍ଥାତ୍ *A* ର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ ମଧ୍ୟ *n*- ଧାଡି ବର୍ଗୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ A′ର (i, j) ଉପାଦାନ ¾ *A* ର (j, i) ଉପାଦାନ

$\because$ A ଏକ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \; \forall \; i, j$

$= A$ ର (j, i) ଉପାଦାନ

$\therefore \quad A = A'$

ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ସର୍ତ୍ତ:

ଏଠାରେ $A = A'$

ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ: A ଏକ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ।

ଯଦି $A = A'$, A ନିଶ୍ଚିତ n-ଧାଡି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହେବା ଉଚିତ୍ ।

ଆଉ ମଧ୍ୟ Aର (i, j) ଉପାଦାନ = A′ ର (i, j) ଉପାଦାନ [$\because$ $A = A'$]

= A ର (j, i) ଉପାଦାନ

$\therefore$ A ଏକ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ।

ଉପପାଦ୍ୟ 2: ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ବିଷମ-ସମମିତ ହେବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ଏବଂ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ହେଉଛି $A' = -A$

ପ୍ରମାଣ :

ମନେକର $A = [a_{ij}]$ ଏକ n-ଧାଡି ବର୍ଗୀୟ ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

ତେଣୁ $a_{ij} = -a_{ji}$.

ଯେହେତୁ 'A' ଏକ n-ଧାଡି ବର୍ଗୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ତେଣୁ A′ $-A$ ମଧ୍ୟ n-ଧାଡି ବର୍ଗୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ A′ ର (i, j) ଉପାଦାନ = A ର (j, i) ଉପାଦାନ

ଯେହେତୁ A ଏକ ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $a_{ij} = -a_{ji}\ \forall i, j$

$\Rightarrow = -$ Aର $(i, j)^{th}$ ଉପାଦାନ $\Rightarrow A' = -A$,

ବିପରୀତକ୍ରମେ ; ଯଦି $A' = -A$, ତେବେ A ନିଶ୍ଚିତ ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହେବ।

ଆଉ ମଧ୍ୟ Aର $(i, j)^{th}$ ଉପାଦାନ = A′ର ବିଯୁକ୍ତାତ୍ମକ (i, j) th ଉପାଦାନ [$-A' = A$]

= A ର ବିଯୁକ୍ତାତ୍ମକ $(j, i)^{th}$ ଉପାଦାନ

ତେଣୁ: A ଏକ ବିଷମ-ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ।

ଉପପାଦ୍ୟ 3: ଯଦି A ଏକ ବିଷମ-ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ X ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅଯେ X′ A X ଏକ ଶୂନ୍ୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

ପ୍ରମାଣ : ଯେହେତୁ A ଏକ ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ତେଣୁ $A' = -A$ । ମନେକର A, ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହାର ଅର୍ଡର n ଅଟେ ଏବଂ X ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହାର ଅର୍ଡର $n \times 1$. ବର୍ତ୍ତମାନ ଏଠାରେ X′ ଏକ ଧାଡି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହାର ଅର୍ଡର $1 \times n$ ଅଟେ । ତେଣୁ: X′ AX, ଏକ 1×1 ଅର୍ଡର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହେବ ।

ମନେକର $X'AX = B$ ---(1)

ଯେହେତୁ B ର ଅର୍ଡର 1×1 ତେବେ $B' = B$, ଏବଂ B ଏକ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହେବ ।

ଏବେ ମନେକର $(X'AX)' = B'$

$\therefore$ $X' A'(X')' = B' \Rightarrow X'A'X'' = B'$

କିନ୍ତୁ X'' ¾ $X]$ $A' = -A$ ଏବଂ $B' = B$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ଅଛି $X' (-A) X = B$

$= -(X' AX) = B$

$= -B = B$ [ସମୀକରଣ (1) ରୁ]

$\Rightarrow \quad 2B = 0$

$\Rightarrow \quad B = 0$

X'AX ଏକ ଶୂନ୍ୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ।

ଉପପାଦ୍ୟ 4: ଦର୍ଶାଅ ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅନନ୍ୟ ଭାବରେ ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସମଷ୍ଟି ଭାବେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ । , ଯେଉଁଠାରେ ଗୋଟିଏ ସମମିତ ଏବଂ ଅନ୍ୟଟି ବିଷମ ସମମିତ

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର A ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ଏଣୁ A କୁ ନିମ୍ନୋକ୍ତ ପ୍ରକାରେ ଲେଖାଯାଇପାରେ

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

$$= P + Q \text{ (ମନେକର)}$$

ଯେଉଁଠାରେ $\quad P = \frac{1}{2}(A + A'), Q = \frac{1}{2}(A - A')$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଦର୍ଶାଇବା ଯେ P ଏକ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ Q ଏକ ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ।

ମନେକର $\quad P' = \frac{1}{2}(A + A')' = \frac{1}{2}[(A') + (A')']$

$$= \frac{1}{2}[A' + A]$$

$$= \frac{1}{2}[A + A'] = P$$

$\therefore$ P ଏକ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

ଆଉମଧ୍ୟ $\quad Q' = \frac{1}{2}[A - A']'$

$$= \frac{1}{2}[A' - (A')']$$

$$= \frac{1}{2}(A' - A) = -\frac{1}{2}[A - A'] = -Q$$

$\therefore$ Q ଏକ ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

ଏହିପରି ଭାବେ, ଆମେ A କୁ ଏକ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ ଏକ ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସମଷ୍ଟି ଭାବେ ପ୍ରକାଶ କଲେ ।

ଏହି ଅଭିବ୍ୟକ୍ତିର ଅନନ୍ୟତା ପ୍ରମାଣ ନିମ୍ନରେ କରାଗଲା :

ମନେକର $A = R + S$ ଯାହାକି A ର ଅନ୍ୟ ଏକ ପରିପ୍ରକାଶ, ଯେଉଁଠାରେ R ଏକ ସମମିତ ଏବଂ S ଏକ ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $\quad A' = (R + S)' = R' + S'$

$$= R - S \qquad \{\because \quad R' = R, S' = -S]$$

$$\frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}[(R + S) + (R - S)] = R$$

$\therefore \quad R = P$

ଏବଂ $\frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{2}[(R + S) - (R - S)] = S$

$\therefore \quad S = Q$

ତେଣୁ, ଏହି ପରିପ୍ରକାଶ A = P + Q ଅନନ୍ୟ ଅଟେ

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 5.16 ଯଦି $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, ତେବେ ଏହାକୁ ଏଭଳି ପ୍ରକାଶ କର ଯେପରିକି A = B + C ଯେଉଁଠାରେ B ଏକ ସମମିତ ଓ C ଏକ ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

ସମାଧାନ: ଆମର ଅଛି $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

ଏହାକୁ ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ କଲେ ଆମେ ପାଉ $A' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

A ଏବଂ A′ ଯୋଗକରି, ଆମେ ପାଉ,

$$A + A' = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

A ରୁ A′ କୁ ବିୟୋଗ କରି ଆମେ ପାଇବା

$$A - A' = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

(1) ଏବଂ (2) କୁ ଯୋଗକରି ଆମେ ପାଇବା

$$2A = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{କିମ୍ବା } A = \begin{bmatrix} -1 & 9/2 & 3 \\ 9/2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5/2 & -2 \\ -5/2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

= ସମମିତ + ବିଷମ ସମମିତ

ଉଦାହରଣ 5.17 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ କୁ ଏକ ସମମିତ ଏବଂ ଏକ ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସମଷ୍ଟି ଭାବେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସମାଧାନ: ମନେକର $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$

ଏହାକୁ ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ କଲେ ଆମେ ପାଇବା

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A ଏବଂ A′ ଯୋଗ କଲେ $A + A' = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 14 & 10 \\ 5 & 10 & 6 \end{bmatrix}$ ...(1)

A ରୁ A′ ବିୟୋଗ କଲେ,ଆମେ ପାଇବା $A - A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -8 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ ...(2)

(1) ଓ (2) କୁ ଯୋଗକରି ଆମେ ପାଇବା

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 14 & 10 \\ 5 & 10 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -8 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

କିମ୍ବା $A = \begin{bmatrix} 1 & 5/2 & 5/2 \\ 5/2 & 7 & 5 \\ 5/2 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -5/2 \\ 1/2 & 0 & -4 \\ 5/2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

= ସମମିତ + ବିଷମ-ସମମିତ

ଉଦାହରଣ 5.18 ଯଦି A ଏକ-ଅଯୁଗ୍ମ କିମ୍ବା ଯୁଗ୍ମ ଅର୍ଡରର ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ଏକ ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରମାଣକର ଯେ A ର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ସର୍ବଦା ଯଥାକ୍ରମେ ଶୁନ୍ : (0) କିମ୍ବା ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ।

ସମାଧାନ: (1) ମନେକର $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$] ' A 'ଏକ ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହାର ଅର୍ଡର ଅଯୁଗ୍ମ ଅଟେ ।

ତେବେ $|A| = 0(0 + 16) - 2(0 + 12) + 3(8 + 0)$

$= 0 - 24 + 24 = 0$

(2) ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ଅର୍ଥାତ୍ A ଏକ ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହାର ଅର୍ଡର ଯୁଗ୍ମ ଅଟେ ।

ତେବେ, $|A| = 0 + 1 = 1$ ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା

ଇତିହାସ :

ଅନ୍ତର୍ଗୁଣ ଫଳ, ଲମ୍ବ କୋଣୀୟ ଫଳନ ବିସ୍ତାରର ଧାରଣାରୁ ଉତ୍ପତ୍ତି ହୋଇଥିଲା, ଯେପରିକି ଫୋରିଅର ଶ୍ରେଣୀ। ଉଚ୍ଚକୋଟୀର ଫୋରିଅର ଶ୍ରେଣୀ ସହିତ, ଫଳନର ଲମ୍ବ କୋଣୀୟତାର ସମ୍ପର୍କ ପ୍ରଥମେ ଅନୁଭବ କରାଯାଇଥିଲା। ତେଣୁ, ଅନ୍ତର୍ଗୁଣ ଫଳ ଏକମାତ୍ର ସ୍କେଶ୍ର ଏକ ରୂପ ଥିଲା। ଦ୍ୱୈତର ଧାରଣା ଦଶନ୍ଧି ପରେ ଆସିଲା, କେବଳ ଥରେ ଲୋକମାନେ ଜାଣିଲେ ଯେ ସେମାନେ ଦ୍ୱୈତ କୁ ସ୍କେଶ୍ ଅଲଗା କରିବାକୁ ବାଧ ହେଲେ, 1878 ମସିହାରେ, ଫ୍ରୋବେନିୟସ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କକୁ ପରିଚୟ କରାଇଥିଲେ ଏବଂ ଏହାକୁ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସଂଜ୍ଞାରେ ବ୍ୟବହାର କରିଥିଲେ। ସେହି ବିକାଶ ପରଠାରୁ ଏହି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୁଡିକ ଅଗ୍ରଣୀ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମେରୁଦଣ୍ଡ ପାଲଟିଛି ଯେପରିକି, କ୍ରିପ୍ଟୋଗ୍ରାଫି, କମ୍ପ୍ୟୁଟର ସାଇନ୍ସ, ଇଞ୍ଜିନିୟରିଂ ଇତ୍ୟାଦି।

5.4 ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

ଏକ ବାସ୍ତବ ବର୍ଗୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ ଲମ୍ବୀୟ କୁହାଯାଏ , ଯଦି $AA' = A'A = I$

5.4.1 ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଗୁଣଧର୍ମ

a. ଯଦି A ଏକ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହୁଏ, ତେବେ $|A| = \pm 1$-

ପ୍ରମାଣ:ଯେହେତୁ ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଧାଡି ଏବଂ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ଅଦଳବଦଳ ଦ୍ୱାରା ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ବଦଳିନଥାଏ। $|A'| = |A|$

ପୁନଶ୍ଚ ସଂଜ୍ଞା ଅନୁସାରେ ଯଦି A ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ,ତେବେ $AA' = I$

$$|AA'| = |I|$$
$$|A||A'| = |I|$$
$$|A|^2 = 1$$
$$|A| = \pm 1$$

ମନ୍ତବ୍ୟ: ଯଦି A ଏକ n ଅର୍ଡରର ଲମ୍ବୀୟ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ହୋଇଥାଏ, ଯେହେତୁ $|A| = \pm 1$] ତେବେ Aର ରାଙ୍କ $= n$

b. ଯଦି A ଏକ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ତେବେ A^{-1} ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି ଏବଂ ଏହା A' ସହ ସମାନ ଅଟେ।

ପ୍ରମାଣ: ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଯଦି A ଏବଂ B ଦୁଇଟି ଏପରି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ପାଇଁ $AB = BA = I$ ତେବେ B କୁ A ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ କୁହାଯାଏ । ଏବଂ A ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ପାଇଁ $|A| \neq 0$ ଏକ ଆବଶ୍ୟକ ଏବଂ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ଅଟେ । (a) ଅନୁସାରେ ଯଦି A ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହୋଇଥାଏ, ତେବେs $|A| = \pm 1 \neq 0$,

$\therefore A^{-1}$ ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି ।

ଅଧିକନ୍ତୁ $AA' = I$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ A^{-1} କୁ ଗୁଣନ କଲେ

$$A^{-1}(AA') = A^{-1}.I$$
$$(A^{-1}A).A' = A^{-1}$$
$$IA' = A^{-1}$$
$$A' = A^{-1}$$

c- ଯଦି A ଏବଂ B ଦୁଇଟି n-ଅର୍ଡରର ଲମ୍ବୀୟ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ତେବେ AB ଏବଂ BA ମଧ୍ୟ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ।

ପ୍ରମାଣ: ଯେହେତୁ A ଏବଂ B n ଅର୍ଡରର ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟନ୍ତି | ତେବେ AB ଏବଂ BA, ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଏବଂ ସେମାନେ n ଅର୍ଡର ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟନ୍ତି ।

ଯେହେତୁ A,ଏବଂ B ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

$|A| \neq 0, |B| \neq 0$ ଏବଂ $A^{-1}B^{-1}$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି ।

ପୁନର୍ବାର $|AB| = |A||B| \neq 0$

$\therefore$ $(AB)^{-1}$ ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $(AB)' = B'A'$

$\Rightarrow$ ଅଧିକନ୍ତୁ
$$(AB)'(AB) = B'A'AB$$
$$= B'(A'A)B$$
$$= B'IB = B'B = I \qquad [\because \ A'A = I]$$

ତେବେ $(AB)'AB$ ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ହେବ

$\therefore AB$ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

ଟିପ୍ପଣୀ : ଯଦି A ଏକ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ତେବେ $|A| = \pm 1$

ଯଦି$[|A| = 1]$ ତେବେ A କୁ ସଂଗତ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯିବ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ: ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ରୈଖିକ ବୀଜଗଣିତ ପାଇଁ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରହିଥିବା ଅନେକ ଗୁଣ ଧର୍ମରୁ । ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ବିଶ୍ଳେଷଣ, ଅନେକ ଲାଭ ପାଇଥାଏ। ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ,ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେସ ବା ଆଧାରର ଲମ୍ବିକ ପରିବର୍ତ୍ତନ ପାଇଁ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ଆଧାରର ଗଣନା ଆବଶ୍ୟକ ହୋଇଥାଏ; ଉଭୟ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ରୂପ ଗ୍ରହଣ କରନ୍ତି ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 5.19 ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ଯେ $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore \qquad A' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

ଏବଂ $\qquad AA' = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ତେଣୁ A ଏକ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ A

ଉଦାହରଣ 5.20 α, β, γ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେତେବେଳେ $\begin{bmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{bmatrix}$ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ।

ସମାଧାନ: ମନେକର $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{bmatrix}$

A ର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ କରି ଆମେ ପାଉ, $\quad A' = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 2\beta & \beta & -\beta \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{bmatrix}$

ଯଦି A ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ହୋଇଥାଏ ,ତେବେ $\quad AA' = I$

$\therefore \qquad AA' = \begin{bmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 2\beta & \beta & -\beta \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0+4\beta^2+\gamma^2 & 0+2\beta^2-\gamma^2 & 0-2\beta^2+\gamma^2 \\ 0+2\beta^2-\gamma^2 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2 \\ 0-2\beta^2+\gamma^2 & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$4\beta^2 + \gamma^2 = 1$ ...(1)

ଏବଂ $\quad -2\beta^2 + \gamma^2 = 0 \Rightarrow \beta^2 = \frac{\gamma^2}{2}$ ...(2)

(1)ରୁ $4.\frac{\gamma^2}{2} + \gamma^2 = 1 \qquad [\because \beta^2 = \frac{\gamma^2}{2}]$

$$2\gamma^2 + \gamma^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 3\gamma^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ଆଉମଧ୍ୟ $\beta^2 = \frac{1}{6}$ (2)ରୁ $\Rightarrow \beta = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ $[\because \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1]$

ଆଉମଧ୍ୟ ଆମର ଅଛି $\alpha^2 = 1 - \beta^2 - \gamma^2$

$$= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}$$

$$\alpha^2 = \frac{6-1-2}{6} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

ଉଦାହରଣ 5.21 ଯଦି $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ ପ୍ରମାଣ କରେ ଯେ $A^{-1} = A'$] A' ର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ A ଅଟେ ।

ସମାଧାନ: ଆମର ଅଛି $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$, ଏବଂ $A' = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad AA' = \frac{1}{81}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 64+1+16 & -32+4+28 & -8-8+16 \\ -32+4+28 & 16+16+49 & 4-32+28 \\ -8-8+16 & 4-32+28 & 1+64+16 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AA' = I \quad \Rightarrow \quad A' = A^{-1}$$

ଉଦାହରଣ 5.22 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ ଲମ୍ବୀୟ ଅଟେ କି ?

ସମାଧାନ:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ $A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

$$\therefore \qquad A'A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+16+9 & -6+12-3 & 2+4-27 \\ -6+12-3 & 9+9+1 & -3+3+9 \\ 2+4-27 & -3+3+9 & 1+1+81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 3 & -21 \\ 3 & 19 & 9 \\ -21 & 9 & 83 \end{bmatrix} \neq I$$

ତେଣୁ A ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ନୁହେଁ।

ଉଦାହରଣ 5.23 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$ ଲମ୍ବୀୟ ଅଟେ କି ?

ସମାଧାନ: ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

$$A' = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad A'A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta+0+\sin^2\theta & 0+0+0 & \cos\theta\sin\theta-\cos\theta\sin\theta \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ \cos\theta\sin\theta-\cos\theta\sin\theta & 0+0+0 & \sin^2\theta+0+\cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ତେଣୁ ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଲମ୍ବୀୟ ଅଟେ ।

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 5.2

1. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ ତେବେ (AB)′ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଓ ଏହାର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ଯେ (AB)′ = B′A′

2. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ AA′ ଏବଂ A′A ଉଭୟ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟନ୍ତି ।

3. ଯଦି A ଏବଂ B ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ AB-BA ଏକ ବିଷମ-ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ।

4.ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ ସମମିତ ଏବଂ ଏକ ବିଷମ-ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ସମଷ୍ଟି ଭାବେ ପ୍ରକାଶ କର ।

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ -2 & 5 & 3\\ -1 & 6 & 3\end{bmatrix}$$

5.ପ୍ରମାଣ କରଯେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଲମ୍ବୀୟ ଏବଂ A^{-1} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

$$A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

6. ଯଦି $A=\begin{bmatrix}1/3 & 2/3 & a\\ 2/3 & 1/3 & b\\ 2/3 & -2/3 & c\end{bmatrix}$ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ତେବେ a, b, ଏବଂ c ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

7.ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଯାଞ୍ଚ କରନ୍ତୁ ଲମ୍ବୀୟ କି ନୁହେଁ?

$$A=\begin{bmatrix}-8 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 7\\ 1 & -8 & 4\end{bmatrix}$$

8. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଲମ୍ବୀୟ ଅଟେ କି ?

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

9. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଲମ୍ବୀୟ ତେଣୁ A^{-1} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

i. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -2 & 0\\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$ ii. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 2 & 1 & -1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$ iii. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1 & 0\\ 1 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

10. **ଯଦି** $3A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$ ଏବଂ ଯଦି A ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ତେବେ a, b, c ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

11. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ ଏକ ସମମିତ ଓ ଏକ ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସମଷ୍ଟି ଭାବରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 6\\ 2 & 7 & -1\\ 5 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

12. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୁଡିକ ପ୍ରକୃତ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କିମ୍ବା ଅସଂଗତ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାଞ୍ଚ କର :

i. $\begin{bmatrix}3/5 & 4/5\\ 4/5 & -3/5\end{bmatrix}$ ii. $\begin{bmatrix}12/13 & 5/13\\ -5/13 & 12/13\end{bmatrix}$ iii. $\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

ଉତ୍ତର ମାଳା

1. $\begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

4. ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 5 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 3 \end{bmatrix}$; ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ = $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5/2 \\ -2 & 0 & -3/2 \\ -5/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$

5. A′ A ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ

6. $a = +\frac{2}{3}, b = +\frac{2}{3}, c = +\frac{1}{3}$

7. ନୁହେଁ

8. ନୁହେଁ 9.

i. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$

ii. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$

iii. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

10. a = 2, b = 2, c = 1

11. ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 11/2 \\ 0 & 7 & 3/2 \\ 11/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$; ବିଷମ-ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ = $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1/2 \\ 2 & 0 & 5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 0 \end{bmatrix}$

12. ଅସଂଯୁକ୍ତ   ii. . ପ୍ରକୃତ   iii. ଲାମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ନୁହେଁ

5.5 ରୈଖିକ ଅପରେଟରର କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ

ଏକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର T: V → V ନିଆଯାଉ । ତେବେT କୁ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ କରାଯାଇ ପାରିବ ଯଦି ଏହା ଏକ କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ D ଭାବେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ। ଏହିପରିଭାବେ T କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ ଅଟେ ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି V ର ଏକ ଆଧାର ମିଳିଥାଏ ଯେପରିକି B ଭିତ୍ତିକ T ର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏକ କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ D

5.5.1 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ

ମନେକର ଏକ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ$\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ ଓ ସେମାନଙ୍କର ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ଯଥାକ୍ରମେ $x_1, x_2, \ldots, xn$ ।

ତେବେ$Ax_i = \lambda_i x_i$,

$x_1, x_2, \ldots, x_n$] ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ B ର ସ୍ତମ୍ଭ । ଆମେ P କୁ $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, ରୂପରେ ଲେଖିପାରିବା

$$AP = A[x_1\ x_2 \ldots x_n] = [Ax_1\ Ax_2 \ldots Ax_n]$$

$$=[\lambda_1 x_1\ \lambda_2 x_2 \ldots \lambda_n x_n]$$ [ସଂଜ୍ଞା ହେତୁ] = PD

[P ଏବଂ D କୁ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଭାବେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣନ ଦ୍ୱାରା ଆମେ ଏହି ସୋପାନକୁ ପରୀକ୍ଷା କରି ପାରିବା]

ଯେଉଁଠାରେ $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$

⇒ ଏହା ଦର୍ଶାଇଥାଏ $P^{-1}AP = D$

ଏହି ପଦ୍ଧତି ଅସଫଳ ହୁଏ ଯେତେବେଳେ A ପାଇଁ n ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଇଛ ହୁଏନାହିଁ ଏହି ପ୍ରକାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ ହେବନାହିଁ । ଯେତେବେଳେ n ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ନ ମିଳେ, ସେତେବେଳେ P ଅଣସିଂଗୁଲାର ହୋଇଥାଏ ଏବଂ $P^{-1}AP$ ଏକ କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣ ଉପାଦାନ। ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ P ଯାହା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Aକୁ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ କରିବା ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ , ଏହାକୁ Aର ମୋଡାଲ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହିପରି ପ୍ରାପ୍ତ ହୋଇଥିବା କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Aର ସ୍ପେକ୍ଟ୍ରାଲ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ।

ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଏବଂ C କୁ ସଦୃଶ ହେବେ, ଯଦି ଏକ ଅଣସିଂଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ B ମିଳେ ଯେପରିକି

$C = B^{-1}AB$

ସ୍ପଷ୍ଟ ଭାବରେ, ଏକ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ଏକ କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ D ର ସଦୃଶ ଅଟେ ।

ଟିପ୍ପଣୀ: ସଦୃଶ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ମାନଙ୍କର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ସମାନ ।

ଆକର୍ଷଣୀୟ ତଥ୍ୟ

1. ଏହା କେତେକ ଗଣନାକୁ ମହତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଭାବେ ସରଳିକୃତ କରିଥାଏ | ଯାହାବି ହେଉ, କର୍ଣ୍ଣୀକରଣର ପ୍ରଥମ ବ୍ୟବହାର ମାର୍କୋଭ ପ୍ରସେସ ରେ ଦେଖାଯାଇଥିଲା,ଯେଉଁଠାରେ କି (ବର୍ଗ)ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟବହାର ଅଧିକରୁ ଅଧିକ କରାଯାଇଥିଲା ଏବଂ ମାର୍କୋଭ ପ୍ରଣାଳୀର ବହୁଳ ଭାବରେ ପ୍ରୟୋଗ ହୋଇଥାଏ ଯେପରିକି • ବଜାର • ପାଣିପାଗ ଭବିଷ୍ୟବାଣୀ • ଜେନେଟିକସ • ଗ୍ୟାସର ବିସ୍ତାର
   • ସବୁଠାରୁ ପ୍ରସିଦ୍ଧ ହେଉଛି ଗୁଗୁଲର ପେଜ୍ ରାଙ୍କିଙ୍ଗ ଆଲଗୋରିଦମ୍ ।
2- ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ ମେକାନିକ୍ସରେ ମଧ କରାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୁପ, ଜଡ଼ତ୍ୱର ମୁଖ୍ୟ ଅକ୍ଷ ପାଇବାର ଏକ ଉପାୟ (ଜଡତ୍ୱର ଟେନ୍ସର ଏକ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀକୃତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ)
3. ଅନ୍ୟ ଏକ ପ୍ରୟୋଗ ହେଉଛି ଦୋଳନ ସିଷ୍ଟମର ନର୍ମାଲ ମୋଡରେ (ଯାହା ଏକକାଳୀନ ଭାବେ କାଇନେଟିକ୍ ଶକ୍ତି ଏବଂ ପୋଟେନ୍ସିଆଲ ଶକ୍ତି ଭଳି ଦୁଇଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ ଆବଶ୍ୟକ କରିଥାଏ) ।

ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ:

- କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ ର ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ବ୍ୟବହାର ହେଉଛି, ଉଚ୍ଚ ଘାତ ଥିବା ମାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଦକ୍ଷତା ସହିତ ଗଣନା କରିବ ।ଯଦି$A=M^{-1}DM$, $A^n=M^{-1}D^nm$ ଉପରୋକ୍ତ ଗୁଣ ଧର୍ମ ଉଚ୍ଚ ଘାତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଗଣନା କରିବା ସହଜ କରିଥାଏ, ଯେହେତୁ A^n ର ଗଣନା ତୁଳନାରେ D^n ର ଗଣନା ଅଧିକ ସହଜ ଅଟେ ।

- **ଭିଡିଓ ସଂଯୋଗ (ଉତ୍ସ: NPTEL)**

ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଓ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର

ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପଦ୍ଧତି ଏବଂ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 5.24 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ କୁ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ କର ଏବଂ ମୋଡାଲ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ସମାଧାନ: A ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ, $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-1 - \lambda)[-\lambda(2 - \lambda) + 1] - 2[-\lambda + 1] - 2[-1 + 2 - \lambda] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-1 - \lambda)[\lambda^2 - 2\lambda + 1] - 2[-\lambda + 1] - 2[-\lambda + 1] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-1 - \lambda)(1 - \lambda)^2 - 4(1 - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1 - \lambda)[(-1 - \lambda)(1 - \lambda) - 4] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1 - \lambda)(\lambda^2 - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 1, \pm\sqrt{5}$$

ଏଠାରେ ଆମେ ମିଳିଥିବା ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଅନୁରୂପରେ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

$\lambda = 1$ ପାଇଁ ମନେକର $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$]

ଏକ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର, ଯେପରିକି

$$AX_1 = \lambda X_1$$

$$\Rightarrow \quad (A - \lambda I)X_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1 + 2y_1 - 2z_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -x_1 + y_1 - z_1 = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$x_1 + y_1 + z_1 = 0 \qquad \ldots(2)$$

$$-x_1 - y_1 - z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + y_1 + z_1 = 0$$

$$2y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0$$

ସମୀକରଣ (1) ଏବଂ (2) ଯୋଗ କଲାପରେ $-x_1 - z_1 = 0 \Rightarrow -x_1 = z_1$

$$z_1 = -1, \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$$

$$\therefore \qquad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = \sqrt{5}$ ପାଇଁ, ମନେକର $X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$, ଏକ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଅଟେ ଯେପରିକି ।

$$AX_2 = \lambda X_2$$

$$[A - \sqrt{5}I]\, X_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{5} & 2 & -2 \\ 1 & 2-\sqrt{5} & 1 \\ -1 & -1 & 0-\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(-1-\sqrt{5})\, x_2 + 2y_2 - 2z_2 = 0 \qquad \text{...(3)}$$

$$x_2 + (2-\sqrt{5})\, y_2 + z_2 = 0 \qquad \text{...(4)}$$

$$-x_2 - y_2 - \sqrt{5}\, z_2 = 0 \qquad \text{...(5)}$$

ସମୀକରଣ (4) ଏବଂ (5) ଯୋଗ କରିବା ପରେ $(1-\sqrt{5})y_2 + (1-\sqrt{5})z_2 = 0$

$$y_2 = -z_2$$

$z_2 = 1$ ନିଆଯାଉ,ତେବେ $y_2 = -1$

ସମୀକରଣ 5ରୁ $-x_2 = y_2 + \sqrt{5}z_2 = -1 + \sqrt{5}$

$$x_2 = 1 - \sqrt{5}$$

$$\therefore \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -\sqrt{5}$ ପାଇଁ, ମନେକର $X_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$, ଏକ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଯେପରିକି,

$$AX_3 = \lambda X_3$$

$$[A - \sqrt{5}I]\, X_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1+\sqrt{5} & 2 & -2 \\ 1 & 2+\sqrt{5} & 1 \\ -1 & -1 & 0+\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(-1+\sqrt{5})\, x_3 + 2y_3 - 2z_3 = 0 \qquad ...(6)$$

$$x_3 + (2+\sqrt{5})\, y_3 + z_3 = 0 \qquad ...(7)$$

$$-x_3 - y_3 + \sqrt{5}\, z_3 = 0 \qquad ...(8)$$

ସମୀକରଣ (7(ଏବଂ (8) ଯୋଗ କରିବା ପରେ, $(1+\sqrt{5})\, y_3 + (1+\sqrt{5})\, z_3 = 0$

$$y_3 = -z_3$$

$$z_3 = 1 \Rightarrow y_3 = -1$$

8ରୁ , $-x_3 = y_3 - \sqrt{5}\, z_3 = -1 - \sqrt{5}$

$$x_3 = 1 + \sqrt{5}$$

$\therefore$ $X_3 = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ମୋଡାଲ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $P = \begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $|P| = -2\sqrt{5} \neq 0$

$\therefore$ $P^{-1} = \frac{1}{(-2\sqrt{5})}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2\sqrt{5} & 2+\sqrt{5} & -2+\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{(-2\sqrt{5})}\begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 1 & 2+\sqrt{5} & 1 \\ -1 & -2+\sqrt{5} & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

ଉଦାହରଣ 5.25 ଦର୍ଶାଅ ଯେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ କ୍ଷେତ୍ର C ଉପରେ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ ନୁହେଁ।

ସମାଧାନ: ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବୈଶିଷ୍ଟ ସମମୀକରଣ

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = 2, 2$$

$\therefore$ ଏକମାତ୍ର ଭିନ୍ନ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ 2

ଯଦି $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ଅନୁରୂପ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ହୁଏ,ତେବେ

$$AX = \lambda X$$

$$[A - \lambda I]X = 0$$

$$[A - 2I]X = 0$$

$\lambda = 2$ ପାଇଁ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$0x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$x = 1, y = 0$ ନେଲେ $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ହିଁ $\lambda = 2$ ଅନୁରୂପ ଏକମାତ୍ର ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଅଟେ ।

ଏଣୁ ଦତ୍ତ (ବର୍ଗ) ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଏକମାତ୍ର ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଅଛି ।

ତେଣୁ ଦତ୍ତ ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ ନୁହେଁ ।

[ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ, ହେବାପାଇଁ ଏହାର ନିଶ୍ଚିତ ଭାବେ 2ଟି ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ରହିବା ଆବଶ୍ୟକ]

ଉଦାହରଣ 5.26 ଦର୍ଶାଅଯେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ ଅଟେ ।

ସମାଧାନ: ଆମେ ଯେଉଁଭଳି ଉଦାହରଣ 5.4 ପୃଷ୍ଠାରେ କରିଥିଲେ ସେହି ଉପାୟରେ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଏବଂ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ପ୍ରଥମେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ଏହା ପରେ, କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ ପରୀକ୍ଷା କରିବା ।

ଯେହେତୁ A ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର 3ଟି ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଅଛି, ତେଣୁ ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 5.27 ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ର କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ କ୍ଷମତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

ସମାଧାନ: ଉଦାହରଣ 5.5 ସଦୃଶ ସମାଧାନ କରିବା ଏହାପରେ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ ପରୀକ୍ଷା କରିବ ।

ଯେହେତୁ, A ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର 3ଟି ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଅଛି,ତେଣୁ ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 5.28 ରୈଖିକ ଅପରେଟର $T : R^2 \to R^2$ ପାଇଁ $T(x, y) = (-5x + 2y, 2x - 2y)$ T ର କର୍ଣ୍ଣୀକରଣକ୍ଷମତା ପରୀକ୍ଷା କର।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ $T(x, y) = (-5x + 2y, 2x - 2y)$

R^2 ର ମାନକ ଆଧାର ସହ ଥିବା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ଅଟେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଉଦାହରଣ 5.6 ସଦୃଶ ଆମେ ସମାଧାନ କରିବା,

ଏହାପରେ, ଯେହେତୁ T ର 2ଟି ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଅଛି, ତେଣୁ T କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ ଅଟେ ।

[ଏହିପରି ଭାବରେ , ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ ଅବଧାରଣ ଉପରେ ଆଧାରିତ ଅଧିକ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ ଅଭ୍ୟାସ କରିପାରିବେ]

ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ 5.3

1. ଦର୍ଶାଅଯେ ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୁଡିକ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ i. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ii. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ ନୁହେଁ ।

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ ର କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ କ୍ଷମତା ପରୀକ୍ଷାକର ।

4. ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ କି ନୁହେଁ । ଉପଯୁକ୍ତ କାରଣ ଦର୍ଶାଇ ନିଜ ଉତ୍ତରକୁ ସମର୍ଥନ କର

ଉତ୍ତର ମାଳା

3. କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ

4. .ହଁ, କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ,ଯେହେତୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟର, A.M = ପ୍ରତ୍ୟେକ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ G.M ।

5.6 ଅନ୍ତର୍ଗୁଣ ଫଳ ସ୍ପେଶ୍

ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ଏବଂ ଏହାର ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣ ଫଳ କୁ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ୍ କୁହାଯାଇଥାଏ ।

ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର $\vec{u}$ ଏବଂ $\vec{v}$ ର ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ କୁ <u, v> କିମ୍ବା(u, v) ଭାବରେ ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର $\vec{u}$ ଏବଂ $\vec{v}$ ସ୍କାଲାର ଗୁଣନ ଆମକୁ ଜଣାଅଛି । ସେହିପରି ଆମେମଧ୍ଯ ଦୁଇଟି ସ୍ତମ୍ଭ ଭେକ୍ଟରର ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳକୁ ନିମ୍ନୋକ୍ତ ଭାବେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିପାରିବା $\langle u, v\rangle = u^T . v$

ଏହାକୁ ଆମେ $\vec{u}$ $\vec{v}$ ରମୌଳିକ ଧର୍ମକୁ ଆଧାର କରି ସାଧାରଣ ବାସ୍ତବ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ଉପରେ ପ୍ରୟୋଗ କରିପାରିବା ।

ମନେକର, ବାସ୍ତବ ଫିଲ୍ଡ R ଉପରେ u ଏବଂ v ଦୁଇଟି ସ୍ତମ୍ଭ ଭେକ୍ଟର ,

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ଏବଂ } v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

ତେଣୁ
$$\langle u, v\rangle = u^T v$$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$= (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)$$

ଏହାକୁ R^n ପାଇଁ ମାନକ (Standard) ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ କୁହାଯାଏ |

ସଂଜ୍ଞା: ମନେକର ପିଲ୍ଡ F ଉପରେ V ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ଅଟେ । ମନେକର a, b ∈ F ଦ୍ୱୟ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ସ୍କେଲାର ଅଟନ୍ତି ଏବଂ u, v, w ∈ V ତ୍ରୟ ସ୍ୱଚ୍ଛ ଭେକ୍ଟର ଅଟନ୍ତି | ଯଦି ନିମ୍ନୋକ୍ତ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟକୁ ସିଦ୍ଧ କରୁଥିବା ଏକ ଫଳନ <, > V × V → F ହୁଏ ତେବେ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ V କୁ ଏକ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ୍ କୁହାଯାଏ

1. $<u, v> = \overline{<v, u>}$, ଅର୍ଥାତ୍ (v] u) ର ସମ୍ମିଶ୍ର ସଯୁଗ୍ମୀ
2. $<u, u> \geq 0$ ଏବଂ $<u, u> = 0$ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $u = 0$
3. $<au + bv, w> = a < u, w > + b < v, w >$

ଗୁଣଧର୍ମ (1), (2), (3) କୁ ସିଦ୍ଧ କରୁଥିବା ଫଳନ $<, >$ କୁ V ରେ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ କୁହାଯାଏ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ:

1. ଏକ ବାସ୍ତବ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶକୁ ୟୁକ୍ଲିଡୀୟ ସ୍ପେଶ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏକ ସମ୍ମିଶ୍ର ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶକୁ ୟୁନିଟାରି ସ୍ପେଶ୍ କୁହାଯାଏ ।

2-ଯଦି F = R (ଫିଲ୍ଡ ବାସ୍ତବ ହୋଇଯାଏ), ତେବେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (1) ଏହା ପ୍ରକାଶ କରେଯେ $<u, v> = <v, u>$

3. ଯେହେତୁ $<u, v> = \overline{<v, u>} \Rightarrow <u, u> = \overline{<u, u>}$

ଯାହା ପ୍ରକାଶ କରେ କି $<u, u>$ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଏଥିପାଇଁ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (2) ବୁଝାଇଥାଏ ।

5.6.1 ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ୍‌ର ଗୁଣଧର୍ମ

ମନେକର V ଏକ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ। ଯଦି $a, b, c \in F$ ତ୍ରୟ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ସ୍କେଲାର ଏବଂ $u, v, w \in V$ ତ୍ରୟ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଭେକ୍ଟର ହୋଇଥାଏ ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନୋକ୍ତ ଫଳ ସତ୍ୟ ଅଟେ :,

i. $<au, v> = a <u, v>$ ii. $<u, av> = \bar{a} <u, v>$

iii. $<u, bv + cw> = \bar{b} < u, v > + \bar{c} <u, w>$ iv. $<o, v> = 0$

v. $<u, v> = 0 \; \forall \; v \in V \Rightarrow u = 0$

ସମାଧାନ: i. ଏକ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ୍ ପାଇଁ ଆମେ ଜାଣିଛୁ ଯେ,

$$<au + bv, w> = a <u, w> + b <v, w> \quad ...(1)$$

(1)ରେ b = 0 ନେଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$<au, w> = a <u, w> + 0 <v, w>$$ [ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (3) ଦ୍ୱାରା]

$$= a <u, w>$$

$$\therefore \quad <au, v> = a <u, v>$$

ii. $$<v, au> = \overline{<au, v>}$$

$$= \overline{a <u, v>} = \bar{a}\,\overline{<u, v>}$$

$$= \bar{a} <v, u>$$ [ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (1) ଦ୍ୱାରା]

u ଏବଂ v କୁ ଅଦଳବଦଳ କଲେ, ଆମେ ପାଉ,

$$<u, av> = \bar{a} <u, v>$$

iii. $$<u, bv + cw> = \overline{<bv + cw, u>}$$

$$= \overline{b <v, u> + c <w, u>} = \bar{b}\,\overline{<v, u>} + \bar{c}\,\overline{<w, u>}$$

$$= \bar{b} <u, v> + \bar{c} <u, w>$$ [ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (1) ଦ୍ୱାରା]

iv. $<0, v > = 0$ (ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ଏହାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରିପାରିବେ)

v. $<u, v> = 0 \ \forall \ v \in V$

କିମ୍ବା $<u, u> = 0$ [v = u ନେବା ଦ୍ୱାରା]

$\Rightarrow$ $u = 0$ [ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (2) ବ୍ୟବହାର କରି]

5.6.2 ଭେକ୍ଟରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (ନର୍ମ)

ମନେକର V ଏକ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ ଯେକୌଣସି ଭେକ୍ଟର $v \in V$ ପାଇଁ, ଏହାର ନର୍ମ $\sqrt{<v, v>}$ ରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ, ଏବଂ ଏହାକୁ $\|v\|$ ଭାବରେ ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\|v\| = \sqrt{<v, v>}$

ମନ୍ତବ୍ୟ:

1. ନର୍ମ 1 ଭେକ୍ଟରକୁ ଏକକ ଭେକ୍ଟର କୁହାଯାଏ

2. ଭେକ୍ଟର u ଏବଂ v ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଦୂରତ୍ୱକୁ d(u, v) ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ଏବଂ ଏହା ଏପରି ଭାବରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଥାଏ ଅର୍ଥାତ୍ $d(u, v) = \| u - v \|$

$$d(u, v) = \| u - v \|$$

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 5.29 ମନେକର $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ଏବଂ $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ଦ୍ୱୟ ସ୍ତମ୍ଭ ଭେକ୍ଟର ସେମାନଙ୍କର ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭେକ୍ଟରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ଏବଂ $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$<u, v> = u^T v$$

$$= [1 \ \ 2 \ \ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1)(2) + (2)(-1) + (3)(1)$$

$= 3$ (u ଏବଂ v ର ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ)

ଏବଂ $\| u \| = \sqrt{<u, u>}$

$\Rightarrow$ $\| u \|^2 = <u, u> = u^T . u$

$$= [1 \ \ 2 \ \ 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= (1)(1) + (2)(2) + (3)(3) = 14$$

$\Rightarrow$ $\|u\| = \sqrt{14}$

ଏବଂ $\|v\| = \sqrt{<v, v>}$

$\Rightarrow$ $\|v\|^2 = <v, v> = v^T v$

କିମ୍ବା $$= [2\ \ -1\ \ 1]\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= (2)(2) + (-1)(-1) + (1)(1) = 4 + 1 + 1 = 6$$

$\Rightarrow$ $\|v\| = \sqrt{6}$

ଉଦାହରଣ 5.30 ମନେକର V(R) ଏକକ ଅନ୍ତରାଳ $0 \le t \le 1$ ଉପରେ ସମସ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ମାଙ୍କର ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ ଅଟେ । ଯଦି $f(t), g(t) \in V$ ଏବଂ V ରେ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳର ସଂଜ୍ଞା ଏପରି ଯେ $<f(t), g(t)> = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$ ତେବେ $<f, g>$ ଏବଂ $\|g\|$, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି $f(t) = t^2 + t - 4$ ଏବଂ $g(t) = t - 1$.

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ : $<f(t), g(t)> = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$

$$= \ = \int_0^1 (t^2 + t - 4)(t - 1)dt$$

$$= \ = \int_0^1 (t^3 - 5t + 4)dt$$

$$= \ = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2} + 4t\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 4 = \frac{7}{4}$$

ଆଉମଧ୍ୟ $\|g\|^2 = <g, g>$

$$= \ = \int_0^1 g(t) \cdot g(t)\, dt$$

$$= \ = \int_0^1 (t-1)^2\, dt$$

$$= \left|\frac{(t-1)^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

ଏପରିଭାବେ $\|g\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ଉଦାହରଣ 5.31 ମନେକର V, $[\alpha, \beta]$ ଅନ୍ତରାଳ ଉପରସ୍ଥ ସମ୍ମିଶ୍ର ମୂଲ୍ୟାଙ୍କିତ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ C ରେ ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ ଅଟେ । V ରେ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ଏଭଳି ବାଖ୍ୟାକର ଯେ $<f(t), g(t)> = \int_a^b f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dt$ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ V ଏକ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ ଅଟେ ।

ସମାଧାନ : i.ଦତ୍ତ

$$< f(t), g(t) > = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

ଆମେ ଏହାକୁ ଏପରି ଲେଖିପାରିବା

$$\overline{<f(t), f(t)>} = \left[\overline{\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\overline{f(t)}\,dt}\right]$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \overline{g(t)} . f(t)\,dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(t) . \overline{g(t)}\,dt$$

ଏହିପରି ଭାବେ $<f(t), g(t)> = \overline{<g(t) . f(t)>}$

ii. ଆଉ ମଧ୍ୟ $<f(t), f(t)> = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) . \overline{f(t)}\,dt$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [f(t)]^2\,dt$$

ଏବଂ $<f(t), f(t)> = 0$ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $| f(t)|^2 = 0$

ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $| f(t) | = 0$

iii. ବର୍ତ୍ତମାନ $< a f(t) + bg(t), h(t)>$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [af(t) + bg(t)]\,\overline{h(t)}\,dt$$

$$= a\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\overline{h(t)}\,dt + b\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,\overline{h(t)}\,dt$$

$$= a <f(t), h(t)> + b <g(t), h(t)>$$

ଏହିପରି,ଭାବେ V ଏକ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ

ମନ୍ତବ୍ୟ:ଯଦି V ସମସ୍ତ ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନ ବାସ୍ତବ ମୂଲ୍ୟାଙ୍କିତ ଫଳନମାନଙ୍କର ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍, ତେବେ ଉପରୋକ୍ତ ସଂଜ୍ଞା ଏପରି ହେବ $<f(t), g(t)> = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,g(t)\,dt$

କେତେକ ଉପପାଦ୍ୟ ପାଇଁ ପ୍ରୟୋଗ ବହୁ ସ୍ଥାନରେ କରାଯାଇଥାଏ । ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ୍ ବିଷୟ ପଢ଼ିବା ସମୟରେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀମାନେ ଏସବୁକୁ ଜାଣିବା ବିଧେୟ ।

1. କୋଶୀ-ସ୍ୱାଜ ଅସମତା

କଥନ : ମନେକର V ଏକ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ୍ । ତେବେ $| <u, v> | \leq || u || \, || v || \; \forall \; u, v \in V$

ପ୍ରମାଣ: ଯଦି $u = 0$ ତେବେ$<u, v> = <0, v> = 0$

ଏବଂ $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{\langle 0, 0\rangle} = 0$

ସେହିଭଳି, ଏହି ଅସମତା $v = 0$ ପାଇଁ ଫଳପ୍ରଦ ଅଟେ

ମନେକର $u \neq 0$, ତେବେ$\|u\| \neq 0$] ଯେହେତୁ

$\|u\| = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\langle 0, 0\rangle} = 0$

$\Rightarrow \quad \langle u, u\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$

ମନେକର $w = v - \dfrac{\langle v, u\rangle u}{\|u\|^2}$ ...(1)

$$\langle w, u\rangle = \left\langle \left(v - \frac{\langle v, u\rangle u}{\|u\|^2}, u \right) \right\rangle$$

$$= \langle v, u\rangle - \left\langle \left(\frac{\langle v, u\rangle u}{\|u\|^2} \right), u \right\rangle$$

$$= \langle v, u\rangle - \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} \langle u, u\rangle$$ [ଯେହେତୁ $\langle au, v\rangle = a \langle u, v\rangle$]

$$= \langle v, u\rangle - \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} \|u\|^2$$

$$= \langle v, u\rangle - \langle v, u\rangle$$

$\langle w, u\rangle = 0$ ...(2)

ବର୍ତ୍ତମାନ $\|w\|^2 = \quad \langle w, w\rangle = \left\langle \left(v - \dfrac{\langle v, u\rangle u}{\|u\|^2}, w \right) \right\rangle$

$$= \langle v, w\rangle - \frac{\langle v, u\rangle \langle u, w\rangle}{\|u\|^2}$$

$$= \langle v, w\rangle - \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} \overline{\langle w, u\rangle}$$

$$= \langle v, w\rangle - \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} . \bar{0}$$ [(2) ଦ୍ୱାରା]

$$= \langle v, w\rangle - 0 = \langle v, w\rangle$$

$$= \left\langle v, v - \frac{\langle v, u\rangle u}{\|u\|^2} \right\rangle$$ [(1) ଦ୍ୱାରା]

$$= \langle v, v\rangle - \frac{\overline{\langle v, u\rangle}}{\|u\|^2} . \langle v, u\rangle$$

$= ||v||^2 - \frac{|<v, u>|^2}{||u||^2}$ [ଯେହେତୁ $\bar{z}.z = |z|^2$]

ବର୍ତ୍ତମାନ $||w||^2 \geq 0$

$\Rightarrow \frac{||v||^2\,||u||^2 - |<v, u>|^2}{||u||^2} \geq 0$

$\Rightarrow ||u||^2\,||v||^2 - |<u, v>|^2 \geq 0$

$\Rightarrow ||u||\,||v|| \geq |<u, v>|$ [ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ବର୍ଗଫଳ ନେବାଦ୍ୱାରା]

ଅଥବା $|<u, v>| \leq ||u||\,||v||$

> ମନ୍ତବ୍ୟ: ମନେକର $u = (a_1, a_2)$ଏବଂ $v = (b_1, b_2)$, ଦ୍ୱୟ C^2 ର ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ସଦସ୍ୟ ଅଟନ୍ତି ।
> ବ୍ୟାଖ୍ୟାକର $<u, v> = u\,.\,v = a_1\bar{b_1} + a_2\bar{b_2}$ aA
> ଏହା C^2 ରେ ଏକ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ୍ ଅଟେ ।

2. ତ୍ରିଭୁଜୀୟ ଅସମତା

କଥନ: ମନେକର V ଏକ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ୍ । ତେବେ $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

ପ୍ରମାଣ: ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $||u + v||^2 = <u + v, u + v>$

$= <u, u + v> + <v, u + v>$

$= <u, u> + <u, v> + <v, u> + <v, v>$

$= ||u||^2 + <u, v> + \overline{<u, v>} + ||v||^2$

$= ||u||^2 + ||v||^2 + 2Re<u, v>$ ଯେଉଁଠାରେ ବାସ୍ତବ $<u, v> = <u, v>$

ପ୍ରକୃତ ଅଂଶ $\leq ||u||^2 + ||v||^2 + 2\,||u||\,||v||$ [ଯେହେତୁ ବାସ୍ତବ $<u, v> \leq |<u, v>|$ ଏବଂ $|<u, v>| \leq ||u||\,||v||$]

$\leq [\,||u|| + ||v||\,]^2$

କିମ୍ବା $||u + v||^2 \leq [||u|| + ||v||^2$

ତେଣୁ $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

5.6.3 ଲମ୍ବୀୟ ଭେକ୍ଟର

ମନେକର V ଏକ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ୍ । ଏକ ଭେକ୍ଟର $u \in V$ କୁ $v \in V$ ପ୍ରତି ଲାମ୍ବୀୟ କରାଯାଇପାରିବ, ଯଦି

ଯଦି $<u, v> = 0$

5.6.4 ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ୍ ଭେକ୍ଟର

ଏକ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ଗୁଣନ ସ୍ପେଶ୍ ର ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର u ଏବଂ v କୁ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ କରାଯାଇପାରିବ, ଯଦି

i. $<u, v> = 0$

ii. u ଏବଂ v ପ୍ରତ୍ୟେକଙ୍କର ନର୍ମ 1 ହେବ

ମନ୍ତବ୍ୟ:

i. $0 \perp u \ \forall\ u \in V$

ii. $u \perp u$, ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି $u = 0$, ଯେଉଁଠାରେ $u \in V$

iii. $u \perp v \ \Rightarrow\ v \perp u$ ପାଇଁ $u, v \in V$

iv. $u \perp v \ \Rightarrow\ \alpha u \perp v$, ଯେକୌଣସି ଏକ ସ୍କାଲାର $\alpha \in F$ ଏବଂ $u, v \in V$. ପାଇଁ

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 5.32 ଯଦି ଭେକ୍ଟର $u_1 = (1, 2i, i), u_2 = (0, 1 + i, 1), u_3 = (2, 1 - i, i) \in C^3$,ତେବେ

i.ସମମସ୍ତ ଭେକ୍ଟର u_i ର ନର୍ମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ii. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଭେକ୍ଟର $v = (1 - i, -1, 1 - i)$, u_1 ଉଭୟ u_1 ଏବଂ u_2 ପ୍ରତି ଲାମ୍ବୀୟ ଅଟେ।

iii. ଏଭଳି ଏକ ଭେକ୍ଟର ପ୍ରାପ୍ତି କର ଯାହା ଉଭୟ u_i ଏବଂ ପ୍ରତି ଲାମ୍ବୀୟ ହେବ ।

ସମାଧାନ : i. u_i ର ନର୍ମ

$$\|u_1\| = \sqrt{<u_1, u_1>} = \sqrt{(1)(1) + (2i)(-2i) + (i)(-i)} = \sqrt{6}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{<u_2, u_2>} = \sqrt{0 + (1+i)(1-i) + (1)(1)} = \sqrt{3}$$

$$\|u_3\| = \sqrt{<u_3, u_3>} = \sqrt{(2)(2) + (1-i)(1+i) + (i)(-i)} = \sqrt{7}$$

[∵ C^3 ରେ ଯଦି $u = (a, b, c)$ ତେବେ $<u, u> = a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c}$]

ii. , u1 ଏବଂ u2 ଭେକ୍ଟର v ପ୍ରତି ଲାମ୍ବୀୟ ହେବ ଯଦି $<v, u_1> = 0$ ଏବଂ $<v, u_2> = 0$.

ବର୍ତ୍ତମାନ $<v, u_1> = (1 - i)(1) + (-1)(-2i) + (1 - i)(-i)$
$= 1 - i + 2i - i - 1 = 0$

ଆଉମଧ୍ଯ $<v, u_2> = 0$ (ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ପରୀକ୍ଷା କରି ପାରିବେ)

iii. ମନେକର$u = (a, b, c)$ ଏକ ଭେକ୍ଟର ଯାହା u_1 ଏବଂ u_3 ପ୍ରତି ଲାମ୍ବୀୟ ହେବ ।

$\therefore$ $<u, u_1> = 0$ ଏବଂ $<u, u_3> = 0$

ବର୍ତ୍ତମାନ $<u, u_1> = 0 \Rightarrow$ $a(1) + b(-2i) + c(-i) = 0$

$a - 2ib - ic = 0$ ...(1)

ଏବଂ $<u, u_3> = 0 \Rightarrow$ $a(2) + b(1 + i) + c(-i) = 0$

$2a + (1 + i)b - ic = 0$ ...(2)

(1) ଏବଂ (2), କୁ ସମାଧାନ କରି ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{a}{-3+i} = \frac{b}{-i} = \frac{c}{1+5i}$$

ଏହିପରି ଭାବେ u_1 ଏବଂ u_3 ଉଭୟଙ୍କ ପାଇଁ ଲାମ୍ବୀୟ ଭେକ୍ଟର $u = (-3 + i, -i, 1 + 5i)$

ଉଦାହରଣ 5.33 ମନେକର $u = (1, 2, -1)$, $v = (2, 1, 4)$ ଏବଂ $w = (3, -2, -1)$ତ୍ରୟ, R^3 ରେ ଅଛନ୍ତି । ତେବେ i.ଦର୍ଶାଅ ଯେ ସେମାନେ R^3 ପାଇଁ ମାନକ ୟୁକ୍ଲିଡୀୟ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳରେ ସ୍ପେଶ ଗଠନ କରନ୍ତି, କିନ୍ତୁ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ସେଟ୍ ଗଠନ କରନ୍ତି ନାହିଁ ।

ii.ସେମାନଙ୍କୁ ଭେକ୍ଟର ସେଟକୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ କର ଯାହାକି R^3 ପାଇଁ ମାନକ ୟୁକ୍ଲିଡୀୟ ଲାମ୍ବୀୟ ଅନ୍ତଗୁର୍ଣ ଫଳ ସ୍ପେଶରେ ଭେକ୍ଟରମାନଙ୍କର ଏକ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ସେଟ୍ ଗଠନ କରିବେ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ $u = (1, 2, -1)$, $v = (2, 1, 4)$, $w = (3, -2, -1)$

i. $$\langle u, v\rangle = (1)(2) + (2)(1) + (-1)(4) = 0$$

ଏବଂ $$\langle v, w\rangle = (2)(3) + (1)(-2) + (4)(-1) = 0$$

$\therefore$ $$\|u\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \neq 0$$

ତେଣୁ ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ସେଟ ଗଠନ କରନ୍ତି ନାହିଁ

ii. $$\frac{u}{\|u\|} = \frac{(1, 2, -1)}{\sqrt{1+4+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\frac{v}{\|v\|} = \frac{(2, 1, 4)}{\sqrt{4+1+16}} = \left(\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right)$$

ଏବଂ $$\frac{w}{\|w\|} = \frac{(3, -2, -1)}{\sqrt{9+4+1}} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$$

$\therefore$ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ଭେକ୍ଟରର ସେଟ ହେଉଛି।

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right) \text{ ଏବଂ } \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right).$$

5.7 ଗ୍ରାମ-ସ୍କିମିଡ ଲାମ୍ବିକୀ କରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା

କଥନ: ପ୍ରତ୍ୟେକ ସସୀମ ମାତ୍ରା ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ ର ଏକ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ଆଧାର ଅଛି ।

ପ୍ରମାଣ: ମନେକର V(F) ଏକ n ମାତ୍ରିକ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ ।

ମନେକର $S = \{u_1, u_2, \ldots u_n\}$, V ର ଏକ ଆଧାର ।

ଯେହେତୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ସେଟ୍ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ହୋଇଥାନ୍ତି ଏବଂ [V]ର ମାତ୍ର = n ତେଣୁ V ର ଏକ ଲାମ୍ବୀୟ ଆଧାର ତିଆରି କରିବାପାଇଁ ଏହା ଯଥେଷ୍ଟ ଅଟେ |

ବର୍ତ୍ତମାନ, S ଏକ ଆଧାର ହୋଇଥିବାରୁ, ଏହା ରୈଖିକଭାବେ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟେ |

$\therefore$ $u_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ପାଇଁ

ମନେକର $v_1 = u_1$ ତେବେ v_2 ଏହିଭଳିଭାବେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କର

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle v_1}{\|v_1\|^2}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $v_2 = 0$

$\Rightarrow$ $u_2 = \frac{<u_2, v_1> v_1}{\|v_1\|^2}$ = v_1 ର ସ୍କାଲାର ଗୁଣିତକ

କିନ୍ତୁ $u_2 = u_1$ ର ସ୍କାଲାର ଗୁଣିତକ [$\because$ $v_1 = u_1$]

$\Rightarrow$ (u_1, u_2) ରୈଖିକ ଭାବେ ନିର୍ଭରଶୀଳ ଅଟନ୍ତି

ଯାହାକି ଏକ ବିରୋଧାଭାଷା ଯେହେତୁ $\{u_1, u_2\}$ ଏକ ରୈଖିକ ଭାବେ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସେଟ୍ ର ଉପସେଟ୍ ଅଟେ ।

ଏହିପରି ଭାବେ $v_2 \neq 0$

ତାପରେ $<v_2, v_1> = <u_2 - \frac{<u_2, v_1> v_1}{\|v_1\|^2}, v_1>$

$= <u_2 - \frac{<u_2, u_1> u_1}{\|u_1\|^2}, u_1>$ [$\because$ $v_1 = u_1$]

$= <u_2, u_1> - \frac{<u_2, u_1>}{\|u_1\|^2} <u_1, u_1>$ [$\because$ $<u_1, u_1> = \|u_1\|^2$]

$\Rightarrow$ $<v_2, v_1> = <u_2, u_1> - <u_2, u_1> = 0$

$\Rightarrow$ v_2, ପ୍ରତି v_1 ଲାମ୍ବୀୟ ଅଟେ ଏବଂ (v_1, v_2) ଏକ ଲାମ୍ବୀୟ ସେଟ୍ ଅଟେ ।

ସଂଜ୍ଞାଯୁକ୍ତ କର $v_3 = u_3 - \frac{<u_3, v_1> v_1}{\|v_1\|^2} - \frac{<u_3, v_2> v_2}{\|v_2\|^2} = u_3 - \sum_{i=1}^{2} \frac{<u_3, v_i> v_i}{\|v_i\|^2}$

ପୁନର୍ବାର $v_3 \neq 0$ ଯେହେତୁ $v_3 = 0 \Rightarrow \{u_1, u_2, u_3\}$ ରୈଖିକଭାବେ ନିର୍ଭରଶୀଳ ।

କିନ୍ତୁ $\{u_1, u_2, u_3\}$ରୈଖିକ ଭାବେ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସେଟ୍ S ର ଉପସେଟ୍ ହୋଇଥିବା ହେତୁ ।ରୈଖିକଭାବେ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ହେବ

ତେବେ $<v_3, v_1> = <u_3 - \frac{<u_3, v_1> v_1}{\|v_1\|^2} - \frac{<u_3, v_2> v_2}{\|v_2\|^2}, v_1>$

$= <u_3, v_1> - \frac{<u_3, v_1><v_1, v_1>}{\|v_1\|^2} - \frac{<u_3, v_2><v_2, v_1>}{\|v_2\|^2}$

$= <u_3, v_1> - <u_3, v_1> - 0 = 0$ [$\because$ $<v_1, v_1> = \|v_1\|^2$ ଏବଂ $<v_2, v_1> = 0$]

ଏହିପରିଭାବେ $<v_3, v_2> = 0 = <v_3, v_1>$ ଯେତେବେଳେ $<v_i, v_j> = 0, i \neq j$ ଏବଂ $i, j = 1, 2, 3$

ଏହିପ୍ରକାରରେ, ଆମେ n ଭେକ୍ଟର ସମୂହ ର ଏକ ଲାମ୍ବୀୟ ସେଟ୍ $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ ତିଆରି କରିପାରିବା ।

$w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$ ନିଆଯାଉ

ତେବେ $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, V ରେ ଏକ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ସେଟ ହେବ ।

ଯେହେତୁ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶରେ ଭେକ୍ଟରମାନଙ୍କର ଏକ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସେଟ୍, ତେଣୁ $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ରୈଖିକଭାବେ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅଟେ ଅଧିକନ୍ତୁ $[V] = n]$ ଏହିପରି ଭାବେ $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, V ର ଏକ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ଆଧାର ପ୍ରସ୍ତୁତ କରେ ।

କେତେକ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ

ଉଦାହରଣ 5.34 ଗ୍ରାମ-ସ୍କିମିଡ ଲାମ୍ବିକୀକରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (-1, 1, 0)$ ଏବଂ $u_3 = (1, 2, 1)$ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ R^3 ର ଆଧାରକୁ ରୂପାନ୍ତରକର ।

i. ଲମ୍ବୀୟ ଆଧାର (v_1, v_2, v_3)କୁ ରୂପାନ୍ତର କର ।

ii. ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ଆଧାର (w_1, w_2, w_3) କୁ ରୂପାନ୍ତର କର ।

ସମାଧାନ: i. ମନେକର $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (-1, 1, 0)$ ଏବଂ $u_3 = (1, 2, 1)$

$\therefore \quad \| u_1 \|^2 = 3, \| u_2 \|^2 = 2, \| u_3 \|^2 = 6$

ତେବେ $\quad v_1 = u_1 = (1, 1, 1)$

ଏବଂ $\quad <u_2, v_1> = 0, <u_3, u_1> = 4, <u_3, u_2> = 1$

ବ୍ୟାଖ୍ୟା କର $\quad v_2 = u_2 - \frac{<u_2, v_1> v_1}{\| v_1 \|^2} = u_2 - 0$

$v_2 = u_2 = (-1, 1, 0)$

ଏବଂ $\quad v_3 = u_3 - \frac{<u_3, v_1> v_1}{\| v_1 \|^2} - \frac{<u_3, v_2> v_2}{\| v_2 \|^2}$

$= u_3 - \frac{4}{3} u_1 - \frac{u_2}{2} \qquad [\because v_1 = u_1, v_2 = u_2]$

$= (1, 2, 1) - \frac{4}{3}(1, 1, 1) - \frac{1}{2}(-1, 1, 0)$

$= \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$

ତେଣୁ ଲମ୍ବୀୟ ଆଧାର $\left\{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$ ହେବ

ii. $\quad \| v_1 \| = \| u_1 \| = \sqrt{3}$

$\| v_2 \| = \| u_2 \| = \sqrt{2}$

$\| v_3 \| = \sqrt{<v_3, v_3>} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$

ତେଣୁ, ଅର୍ଥନର୍ମାଲ ଆଧାର $\{w_1, w_2, w_3\}$ ହେବ ।

$$\left\{\frac{v_1}{\| v_1 \|}, \frac{v_2}{\| v_2 \|}, \frac{v_3}{\| v_3 \|}\right\} = \left\{\frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}, \frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)}{1/\sqrt{6}}\right\}$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\sqrt{6}, \sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$$

ଉଦାହରଣ 5.35 ମନେକର R ରେ ଘାତ ≤ 2 ର R[x] ର ପଲିନୋମିଆଲ V ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ। V ରେ ଏକ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣ ଫଳ ସେଶ ଏପରି ଭାବେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଛିଯେ, ଯେପରିକି

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

ଯଦି $\{1, x, x^2\}$, V ର ଏକ ଆଧାର ହୁଏ, R ରେ V ର ଏକ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: ଏଠାରେ $\{1, x, x^2\}$, V ର ଏକ ଆଧାର ଅଟେ ।

ମନେକର $u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2$

ମନେକର R ରେ V ର ଏକ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ଆଧାର ପାଇବା ପାଇଁ, ଆମେ ଗ୍ରାମ-ସ୍କିମିଡ ଲାମ୍ବିକୀକରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପ୍ରୟୋଗ କରୁ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1\rangle = \int_0^1 1.1\, dx = [x]_0^1 = 1$

ଏହିପରି ଭାବେ $\|u_2\|^2 = \langle u_2, u_2\rangle = \int x\, x\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$\|u_3\|^2 = \langle u_3, u_3\rangle = \int_0^1 x^2 . x^2\, dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$

$v_1 = u_1$ ନିଆଯାଉ

∴ $v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1$

$$= x - \frac{\left[\int_0^1 x.1\, dx\right]}{1} = x - \left[\frac{1}{2}\right] = x - \frac{1}{2}$$

ଏହିପରିଭାବେ $\|v_2\|^2 = \langle v_2, v_2\rangle$

$$= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx = \frac{1}{12}$$

ଏବଂ $v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle v_1}{\|v_1\|^2} - \frac{\langle u_3, v_2\rangle v_2}{\|v_2\|^2}$

$$= = x^2 - \frac{\left[\int_0^1 x^2.1\, dx\right].1}{1} - \frac{\left[\int_0^1 x^2.\left(x - \frac{1}{2}\right) dx\right]\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{12}} = \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

ଏବଂ $\|v_3\|^2 = \langle v_3, v_3\rangle$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) dx$$

=

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{4}{3}.\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}.\frac{x^2}{2} + \frac{x}{36}\right]_0^1 = \frac{1}{180}$$

ତେଣୁ $w_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{1} = 1,\ w_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right), w_3 = \frac{v_3}{||v_3||} = 3\sqrt{20}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$

ତେଣୁ, ଆବଶ୍ୟକୀୟ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ଆଧାର

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \left\{1, \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right), 3\sqrt{20}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}.$$

ପ୍ରଶ୍ନମାଳା 5.4

1. (1, 0, 1), (1, 0, –1) ଏବଂ (0, 3, 4) ଦ୍ୱାରା ପ୍ରସ୍ତୁତ ହୋଇଥିବା R^3 ର ମାନକ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ଭିତ୍ତିକ ଏକ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

2 ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}$ ଏବଂ $\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}$ ଭେକ୍ଟର ଦ୍ୱୟ ଲମ୍ବୀୟ ଅଟନ୍ତି ।

3. ମନେକର ଘାତ ≤ 2 ରେ ପଲିନୋମିଆଲ R[x] ର, R ରେ ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ V ଅଟେ । V ରେ ଏକ ଅନ୍ତହର୍ଗୁଣଫଳ ଏହିପରିଭାବେ ସଂଜ୍ଞାଯୁକ୍ତ କର ଯେପରିକି $\langle f(x), g(x)\rangle = \int f(x)\, g(x)\, dx$ ଯେଉଁଠାରେ $f(x), g(x) \in V$ ଗ୍ରାମ-ସ୍କିମିଡ ଲାମ୍ବିକୀକରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପ୍ରୟୋଗ କରି Vର ଏକ ଲମ୍ବୀୟ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4 ସେଟ୍ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (2, 1, 4)$ ଏବଂ $u_3 = (4, 5, 6)$ ରୁ ଏକ ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ସେଟ୍ ଗଠନ କର ।

5. k ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କର ଯେପରିକି ନିମ୍ନୋକ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶ ଏକ ଅର୍ନ୍ତଗୁଣଫଳ ହେବ ।

$$(u, v) = u_1v_1 - 3u_1v_2 - 3u_2v_1 + ku_2v_2$$

$u = (u_1, v_1)$ ଏବଂ $v = (u_2, v_2)$ in R^2

6. ଏକ ଭେକ୍ଟର $V = (x, y, z) \in R^3$ ରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି V ମାନକ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ଭିତ୍ତିକ (1, 0, 0) ଓ (–1, 2, 0) ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେବ।

7. ଏଭଳି ଏକ ଭେକ୍ଟର V = (x, ୟ, ଜେଡ୍)$\in R^3$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି V ,ମାନକ ଅନ୍ତଃଗୁଣନ ଅନୁସାରେ (1, 0, 0) ଏବଂ (–1, 2, 0) ପ୍ରତି V ଲମ୍ବ ହେବ

8. ମନେକର u = (1 + i, i, –1), v = (1 + 2i, 1 – i, 2i), <u, v> ଏବଂ <v, u> ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କର ।
<u, v>, <v, u> ସହ ସମତୁଲ କି ? ଏହା ପରୀକ୍ଷାକର

i. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ ii. $\langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle = 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle$

iii $\langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle = 2\mathrm{Im}\langle u, v\rangle$

ଉତ୍ତର ମାଳା

1. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),(0,1,0)\right\}$

3. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}x,\sqrt{\frac{5}{8}}\left(3x^2-1\right)\right\}$

4. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{93}},\frac{-5}{\sqrt{93}},\frac{8}{\sqrt{93}}\right),\left(\frac{7}{\sqrt{62}},\frac{-2}{\sqrt{62}},\frac{-3}{\sqrt{62}}\right)\right\}$

5. $k > 9$

6. $(0, 0, z), z \in R$

7. $\langle u, v \rangle = 2 + 2i$, $\langle v, u \rangle = 2 - 2i$

- **ଆକର୍ଷଣୀୟ ତଥ୍ୟ**
- ରୈଖିକ ବୀଜଗଣିତ ର ଭାଷାରେ ବିଶେଷ ଆପେକ୍ଷିକତାର ଅବକଳନ ଅଧିକ ସ୍ୱାଭାବିକ ଅଟେ | ପ୍ରକୃତରେ, ଆଇନଷ୍ଟାଇନଙ୍କ ଦ୍ୱିତୀୟ ତଥ୍ୟ ଭିତ୍ତିକି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଦର୍ଶାଇଥାଏ ଯେ ଆଲୋକ ଲରେଣ୍ଟଜ୍ ରୂପାନ୍ତରର ଏକ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର । ଏହି ଦସ୍ତାବିଜ ପୂର୍ଣ୍ଣ ଉତ୍ପତ୍ତି ବାବଦରେ ବିସ୍ତୃତ ଭାବେରେ ବର୍ଣ୍ଣନାକରେ https://people.math.rochester.edu/faculty/chaessig/students/Adams(S10).pdf
- ସ୍ପେକ୍ଟ୍ରାଲ୍ କ୍ଲଷ୍ଟରିଂ: ଏହା ଉଦ୍ଭିଦ ଓ ଜୀବବିଜ୍ଞାନ,ମେଡିକାଲ ଇମେଜିଙ୍ଗ,ବ୍ୟବସାୟ ଓ ମାର୍କେଟିଂ, ଫେସବୁକ୍‌ରେ କ୍ଷେତ୍ରଗୁଡିକ ମଧ୍ୟରେ ସଂଯୋଗକୁ ବୁଝିବା,କିମ୍ବା ଅପରାଧ ବିଜ୍ଞାନ, ଆଧୁନିକ ଡାଟା ବିଶ୍ଳେଷଣର କ୍ଲଷ୍ଟରିଂ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଂଶ । ଏହା କୋଳାହଳପୂର୍ଣ୍ଣ ଡାଟା ସେଟ୍‌ରେ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଉପଗୋଷ୍ଠୀ କିମ୍ବା ପ୍ରତିରୂପ ପାଇବାକୁ ଅନୁମତି ଦେଇଥାଏ । ସ୍ପେକ୍ଟ୍ରାଲ କ୍ଲଷ୍ଟରିଂ ଏହିଭଳି ଏକ ପଦ୍ଧତି ଯାହା ଏକ ନେଟ୍‌ୱାର୍କ ଗ୍ରାଫର ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରେ । ଏପରିକି, ଲାପଲାସିଆନ୍ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ଦ୍ୱିତୀୟ ସର୍ବନିମ୍ନ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟର ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ଆମକୁ ଏକ ନେଟ୍‌ୱାର୍କର ଦୁଇଟି ସର୍ବୋଚ କ୍ଲଷ୍ଟର ଖୋଜିବାକୁ ଅନୁମତି ଦେଇଥାଏ ।
- ମାତ୍ରୀୟତା ହ୍ରାସ/ପିସିଏ: ମୂଖ୍ୟ ଉପାଦାନ A′ A ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଅନୁରୂପ ଅଟେ ,ଏବଂ ଏହା ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ ଅତିସମତଳ ଉପରେ ସର୍ବନିମ୍ନ ବର୍ଗ ଅଭିକ୍ଷେପଣ କରିଥାଏ, ଏବଂ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଅତିସମତଳ ର ଅକ୍ଷରେ ପରିଣତ ହୁଏ । ମେସିନ ଲର୍ଣ୍ଣିଙ୍ଗ ଓ ଡାଟା ବିଶ୍ଳେଷଣରେ ମାତ୍ରୀୟତା ହ୍ରାସ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଉପଯୋଗୀ, ଯେହେତୁ ଏହା ଜଣକୁ ଏହିକଥା ବୁଝିବାକୁ ଅନୁମତି ଦିଏ କି ଡାଟାରେ ଅଧିକାଶଂ ଭିନ୍ନତା କେଉଁଠାରୁ ଆସିଥାଏ ।
- ସହଯୋଗାତ୍ମକ ପୂର୍ବାନୁମାନ ପାଇଁ ନିମ୍ନ ରାଙ୍କ ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ: - ନେଟଫ୍ଲିକ୍ସ ପୂର୍ବାନୁମାନ କରେ କି ଏପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନଦେଖିଥିବା ଏକ ଚଳଚିତ୍ର ପାଇଁ ତୁମେ କେଉଁ ମୂଲ୍ୟାୟନ ଦେବ। ଏହା svd କୁ ଉପଯୋଗ କରେ ଓ A′Aର ସର୍ବନିମ୍ନ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କରିଦେଇଥାଏ ।
- ଗୁଗୁଲ୍ ପେଜ୍ ରାଙ୍କ ଆଲଗୋରିଦମ୍: ଇଣ୍ଟରନେଟ୍ ଗ୍ରାଫର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଦେଖାଏ ଯେ ପୃଷ୍ଠାଗୁଡିକ କିପରି ରାଙ୍କ ହୋଇଛି ।

ଭିଡିଓ ସଂଯୋଗ

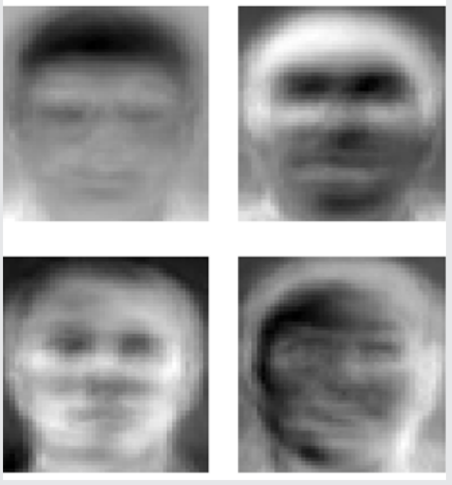
ଆନ୍ତଃ ଗୁଣନ ଏବଂ ଲମ୍ବ କୋଣୀୟତା

ଗ୍ରାମ-ସ୍କିମିଡ ଲାମ୍ବିକୀ କରଣ

- **ବାସ୍ତବ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ**

- ସଂକ୍ରାମକ ରୋଗ କିପରି ବ୍ୟାପିଥାଏ, ଏହାର ଅଧ୍ୟୟନରେ ମୌଳିକ ପୁନଃଉତ୍ପାଦନ ସଂଖ୍ୟା (Ro) ଏକ ମୂଳ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ । ଯଦି ଏକ ସଂକ୍ରମିତ ବ୍ୟକ୍ତିକୁ ସଂପୂର୍ଣ୍ଣଭାବେ ଏକ ସଂବେଦନଶୀଳ ଲୋକମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ରଖିଦିଆଯାଏ । ତେବେ (Ro) ହେଉଛି ଲୋକମାଙ୍କର ହାରାହାରି ସଂଖ୍ୟା ଯାହାକି ଜଣେ ସାଧାରଣ ସଂକ୍ରମିତ ବ୍ୟକ୍ତି ସଂକ୍ରମଣ ହେବା ସଂକ୍ରମଣର ସୃଷ୍ଟିସମୟ, tg ହେଉଛି, ଜଣଙ୍କ ଠାରୁ ଅନ୍ୟ ଜଣଙ୍କୁ ସଂକ୍ରମିତ ହେବା ପର୍ଯନ୍ତ । ଏକ ବିଷମ ଜନସଂଖ୍ୟାରେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ପିଢୀର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ବ୍ୟଖ୍ୟା କରେ ଯେକି tg ସମୟ ବିତିଯିବା ପରେ, ଜନସଂଖ୍ୟାର କେତେଜଣ ବ୍ୟକ୍ତି ସଂକ୍ରମିତ ହେବେ । ତେବେ, ପରବର୍ତ୍ତୀ ପିଢୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଆଇଗନ ମୁଲ୍ୟ Ro । ଏହିପରି ଭାବେ କୋରୋନା ଭୁତାଣୁ ର ସଂକ୍ରମଣ କ୍ଷମତା ଗଣନା କରାଯାଇଛି।

- ପ୍ରତିବିମ୍ବ ପ୍ରକ୍ରିୟାକରଣରେ,ପ୍ରକ୍ରିୟାକୃତ ମୁଖର ପ୍ରତିବିମ୍ବ ଭେକ୍ଟର ଭାବରେ ଦେଖାଯାଇପାରେ,ଯାହାର ଉପାଦାନ ଗୁଡିକ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପିକ୍ସେଲର ଉଜ୍ଜଳତା ପିକ୍ସେଲ ମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା ହେଉଛି, ଏହି ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶର ମାତ୍ରା । ମୁଖର ସାମାନ୍ୟକୃତ ଚିତ୍ରର ଏକ ବଡ ସେଟ ସହିତ ଜଡିତ କୋଭାରିଆନ୍ସ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟରକୁ ଆଇଗନ ଫେସ କୁହାଯାଏ । ଏହା ମୂଖ୍ୟ ଉପାଦାନ ବିଶ୍ଳେଷଣର ଏକ ଉଦାହରଣ ଅଟେ ।ଏହା ଯେକୌଣସି ମୁହଁର ପ୍ରତିବିମ୍ବକୁ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେତେକର ଏକ ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ପାଇଁ ବହୁତ ଉପଯୋଗୀ ଅଟେ । ବାୟେମେଟ୍ରିକସର ମୁଖ ଚିହ୍ନିବା ଶାଖାରେ, ଆଇଗନ ଫେସ୍ ଚିହ୍ନଟ ପାଇଁ ମୁଖର ଡାଟା ସଂକୋଚନ କରିବାକୁ ଏକ ମାଧ୍ୟମ ପ୍ରଦାନ କରେ । ହାତର ଇଶାରାକୁ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରୁଥିବା ଆଇଗନ୍ ଦୃଷ୍ଟି ସିଷ୍ଟମ ସମ୍ବର୍ଦ୍ଧିତ ଗବେଷଣା ମଧ୍ୟ କରାଯାଇଛି ।



- ଏହି ଧାରଣା ସଦୃସ, ଆଇଗନଧ୍ୱନି ଏକ ଭାଷାରେ ଶବ୍ଦ ପରି , ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଉଚ୍ଚାରଣର ମାନବ ଉଚ୍ଚାରଣ ସମୟରେ ହେଉଥିବା ପରିବର୍ତ୍ତନଶୀଳତାର ସାମାନ୍ୟା ଦିଗକୁ ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କରେ । ଏହିପରି ଆଇଗନ ଧ୍ୱନିର ଏକ ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରେ ଆଧାର କରି ଶବ୍ଦର ଏକ ନୂତନ ଧ୍ୱନି ଉଚ୍ଚାରଣ ସୃଷ୍ଟି କରାଯାଇପାରିବ । ଏହି ଧାରଣାଗୁଡିକ ସ୍ପିକର ଅନୁକୂଳନ ପାଇଁ   ସ୍ୱୟଂଚାଳିତ ବାକ ଚିହ୍ନଟ ପ୍ରାଣାଳୀରେ ଉପଯୋଗୀ ହୋଇଥାଏ ।

ସମାହିତ କଠିନ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

ଉଦାହରଣ 1 ମନେକର 5×5ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

ଏହାର କେବଳ ଏକମାତ୍ର ବାସ୍ତାବ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟଅଛି । ତେବେ A ର ସେହି ବାସ୍ତବ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ: ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5$ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା

$$\begin{vmatrix} 15-\lambda & 15-\lambda & 15-\lambda & 15-\lambda & 15-\lambda \\ 5 & 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(15 - l) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(15 - \lambda)$ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $= 0$

$\Rightarrow \quad 15 - \lambda = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda = 15$

$\therefore$ 15, A ର ବାସ୍ତବ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ।

ଅନ୍ୟଏକ ଉପାୟ :

ଯଦି ସମସ୍ତ ଧାଡି ବା ସ୍ତମ୍ଭର ଯୋଗଫଳ ସମାନ ହୁଏ ,ତେବେ ସେହି ଯୋଗଫଳ ଉକ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସରେ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ହୋଇଥାଏ।

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର , ଧାଡିମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି $= 15$

A ର ବାସ୍ତବ ଅଇଗନ ମୂଲ୍ୟ 15 ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 2 ଦତ୍ତ ଅଛି $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ଏବଂI $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ତେବେ A^3 ର ମୂଲ୍ୟ କ'ଣ ହେବ ?

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ: $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$[A - lI] = 0$$

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad (-5 - \lambda)(-\lambda) + 6 = 0$

$\Rightarrow \quad 5\lambda + \lambda^2 + 6 = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$

ଯେହେତୁ , ପ୍ରତ୍ୟେକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ନିଜର ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରିଥାନ୍ତି (କେଲେ –ହାମିଲଟନ୍ ଉପପାଦ୍ୟ)

$\therefore \quad A^2 + 5A + 6I = 0$

$\Rightarrow \quad A^2 = -5A - 6I \qquad ...(1)$

ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱରେ A ଗୁଣନ କରି , ଆମେ ପାଇବା ,

$$A^3 = -5A^2 - 6AI$$

$$A^3 = -5(-5A - 6I) - 6AI \text{ [ସମୀକରଣରୁ (1)]}$$

$A^3 = \quad 25A + 30I - 6AI$

$$A^3 = 19 + 30I$$

ଉଦାହରଣ 3 ଏକ ବାସ୍ତବ 4×4 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A, ସମୀକରଣ $A^2 = I$ କୁ ସିଦ୍ଧ କରେ ଯେଉଁଠିକି λ, ଏକ 4×4 ଏକକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ I । A ର ଧନାତ୍ମକ ଅଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ A ,ସମୀକରଣ $A^2 = I$. କୁ ସିଦ୍ଧ କରେ ,

A ଏକ ଇନଭଲୁଟାରୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ,ଏବଂ ଇନଭଲୁଟାରୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ± 1 ଅଟେ ।

ତେଣୁ , A ର ଧନାତ୍ମକ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ $= 1$

ଉଦାହରଣ 4: ମନେକର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ଯେଉଁଠିକି a ଏବଂ b ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା , ଏବଂ $b \neq 0$

a A ର ସମସ୍ତ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

b. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ପ୍ରତି ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ଆଇଗନ ସ୍ପେଶ୍ $E\lambda$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

c. ଏକ ଅଣସିଙ୍ଗୁଲାର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ S ଏବଂ ଏକ କର୍ଣ୍ଣୀମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ D ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ କର ଯେପରିକି $S^{-1}AS = D$ ।

ସମାଧାନ : a. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମୀକରଣ

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (a-\lambda)^2 + b^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (a-\lambda)^2 = -b^2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = a \pm bi$$

ତେଣୁ , ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ $l = a + bi, a - bi$

b. . ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ $l = a + bi$ ଭିତ୍ତିକ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର

$$[A - (a+bi)I]X = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a-(a+bi) & -b \\ b & a-(a+bi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -bi & -b \\ b & -bi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -bix_1 - bx_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -ix_1$$

$$bx_1 - bix_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = ix_2$$

ସମୀକରଣ ସମୂହ ର ସାଧାରଣ ସମାଧାନ,

$$x_1 = ix_2$$

ତେଣୁ $E_{a+ib} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ $l = a - bi$ ଭିତ୍ତିକ ଆଇଗନ୍ ସ୍ପେଶ୍,

$$[A - (a-ib)I]X = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a-(a-ib) & -b \\ b & a-(a-ib) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} bi & -b \\ b & bi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad bix_1 - bx_2 = 0 \qquad x_2 = ix_1$$
$$bx_1 + bix_2 = 0 \qquad x_1 = -ix_2$$

ସମୀକରଣ ସମୂହ ର ସାଧାରଣ ସମାଧାନ $x_2 = ix_1$

$$E_{a-ib} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଭିତ୍ତିକ ଆଇଗନ୍ ସ୍ପେଶ୍

c. ବର୍ତ୍ତମାନ, $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ ଦ୍ୱୟ ରୈଖିକଭାବେ ସ୍ୱତନ୍ତ ଏବଂ ବିସ୍ତୃତି C^2 ତେଣୁ, C^2 ପାଇଁ ଆଇଗନ ଆଧାର ଗଠନ କର ।

$$\therefore \quad S = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$
$$|S| = i^2 - 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$$
$$\therefore \qquad S^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\qquad D = S^{-1} AS$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$
$$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} ai-b & -bi-a \\ -a+bi & b+ai \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} ai^2-bi-bi-a & ai-b-bi^2-ai \\ -ai+bi^2+b+ai & -a+bi+bi+ai^2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} -2(a+bi) & 0 \\ 0 & -2(a-bi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{bmatrix}$$

ଯାହାକି ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ a + bi ଏବଂ a – bi ଥିବା ଏକ କର୍ଣ୍ଣୀମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ।

ଉଦାହରଣ 5 ମନେକର Aଏବଂ B ଦ୍ୱୟ , $n \times n$ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ । ମନେକର Aଏବଂ Bର ସମାନ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ ଏବଂ ତତସହିତ ସମାନ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ଅଛନ୍ତି, ଯାହାକି ରୈଖିକ ଭାବେ ସ୍ୱତନ୍ତ । ତେବେ A = B।

ସମାଧାନ: ମନେକର A ଏବଂ B ଦ୍ୱୟଙ୍କର n ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ଅଛନ୍ତି ଏବଂ ସେମାନେ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ । ଯଦି ଆମେ $S = [X_1, X_2, \ldots, X_n]$. ନେବାତେବେ S ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ ଏବଂ ଆମର ଅଛି ,

$S^{-1} AS = D$ ଏବଂ $S^{-1} BS = D$

ଯେଉଁଠି D କର୍ଣ୍ଣୀମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହାର କର୍ଣ୍ଣ ଉପାଦାନ ଗୁଡିକ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ,।

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ଏହା ଦର୍ଶାଏ $S^{-1}AS = D = S^{-1}BS$

ତେଣୁ $A = B.$

ଉଦାହରଣ 6: ମନେକର Aର, ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ 1 ଓ 3 ଅନୁରୂପ ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ଯଥାକ୍ରମେ u ଓ v ପ୍ରମାଣ କରଯେ u + v, ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ନୁହେଁ ।

b. ମନେକର A ଓ B ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ଯେପରିକି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଧାଡିର ଯୋଗଫଳ 1 ଓ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ B ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଧାଡିର ଯୋଗଫଳ 2 , ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ AB ର ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ 2 ହେବ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Aର, ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 1 ଓ 3 ଅନୁରୂପ ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ଯଥାକ୍ରମେ. uଓ v

ତେଣୁ $Au = 1u$ [ସଂଜ୍ଞା $AX = \lambda X$]

$Av = 3v$

$\therefore$ $A(u + v) = Au + Av$

$\Rightarrow$ $= 1u + 3v$

ତେଣୁ, (u + v), ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ନୁହେଁ।

b. ନିଜେ ଚେଷ୍ଟାକର ।

ଉଦାହରଣ 7 ମନେକର A ଏକ 3 × 3 ବାସ୍ତବ ଅଣ- କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = A^{-1}$ ଦର୍ଶାଅଯେତ $tr(A) = -det(A) = \pm 1$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ $A^{-1} = A \Rightarrow A^2 = I$

ତେଣୁ:A^2 ର ସମସ୍ତ ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ 1

ଆଉମଧ୍ୟ

$\therefore$ $A^2 - I = 0$

କିମ୍ବା $(A - I)(A + I) = 0$

ତେଣୁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, Aର ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ +1 ଓ -1 ।

ଯେହେତୁ, A^2 ର ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ, Aର ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟର ବର୍ଗ ସହ ସମାନ,

ତେଣୁ, Aର ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ ହେବ +1 କିମ୍ବା -1 ।

ତେଣୁ, ତୃତୀୟ ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ +1 କିମ୍ବା –1 ହୋଇପାରେ ।

ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ, ଏହାର ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟର ଗୁଣଫଳ ସହିତ ସମାନ

ତେଣୁ, ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ±1 ହୋଇପାରେ।

ଯଦି ତୃତୀୟ ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ $tr(A) = 1, det(A) = -1$

ଯଦି ତୃତୀୟ ଅଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ -1 $tr(A) = -1, det(A) = 1$

ତେଣୁ $tr(A) = -1, det(A) = \pm 1.$

ସାରାଂଶ

1. ମନେକର କ୍ଷେତ୍ର Fରେ, A ଏକ n-ଅର୍ଡର ର ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ଯଦି ଏଠାରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ଅଣ-ଶୂନ୍ୟ ସ୍ତମ୍ଭ ଭେକ୍ଟର $X \in F_n$ ଯେପରି $AX = \lambda X$, କେବେ $\lambda \in F$ ପାଇଁ,ତେବେ X ଅନୁରୂପ, λ କୁ A ର ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର କୁହାଯାଏ ଏବଂ λ କୁ X ଅନୁରୂପ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Aର ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।
2. ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟର ସମଷ୍ଟି = Trace (A)
3. $n \times n$ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ ହେବ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି Aର n ସଂଖ୍ୟକ ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ଅଛି ।
4. ପ୍ରତ୍ୟେକ ସସୀମ ମାତ୍ରା ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ୍ ର ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ଆଧାର ଅଛି ।
5. ଏକ ଭେକ୍ଟର $u \in V$ କୁ $v \in V$ ପ୍ରତି ଲାମ୍ବୀୟ କୁହାଯାଏ ଯଦି $\langle u, v \rangle = 0$
6. ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର u , v କୁ ଅର୍ଥୋନିର୍ମାଲ କୁହାଯିବ ଯଦି (i) $\langle u, v \rangle = 0$ (ii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭେକ୍ଟର u ଓ v ର ନର୍ମ 1 ହେବା ଉଚିତ୍ ।

ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନମାଳା

1. ମନେକର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ କୁ $P + Q$ ଦ୍ୱାରା ପରିପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ, ଯେଉଁଠାରେ P ଏକ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଓ Q ଏକ ବିଷମ-ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ , ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସଠିକ୍ \

   a. $Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 3/2 & 0 \end{bmatrix}$ c. $Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ d. $Q = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 \\ 3/2 & 0 \end{bmatrix}$

2. ଏକ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ର ସ୍ତମ୍ଭ ରୂପ

   a. ଲମ୍ବ କୋଣୀୟ ଭେକ୍ଟର ର ସେଟ୍ b. ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ଭେକ୍ଟର ସେଟ୍
   c. ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସେଟ୍ d. ଉପରୋକ୍ତ ସମସ୍ତ

3. dim V = n ପାଇଁ ଯଦି $T : V \to V$ ଏକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର ଓ T ର n ସଂଖ୍ୟକ ପୃଥକ ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ ଅଛି,ତେବେ

   a. T ନିଶ୍ଚିତ୍ ରୂପେ ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ b. T ନିଶ୍ଚିତ୍ ରୂପେ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ
   c. T ନିଶ୍ଚିତ ରୁପେ ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ ଓ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ d. T କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ ନୁହେଁ

4. ମନେକର R^2 ରେ T, ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ । ଓ V ରେ T ଏକ ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ ଏପରି ଭାବେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଛି: $T(x, y) = (x + y, y)$ ତେବେ, T ର ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ହେଉଛି

   a. $1 - 3x + x^2$ b. $2 - 2x$ c. $1 - 2x + x^2$ d. $1 + x^2$

5. ମନେକର $T : C^3 \to C^3$ ଏପରି ଭାବେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ହୋଇଛି $T(x, y, z) = (x + y + z, -x - y, -x - z)$ ଏବଂ ମାନକ ଅର୍ଡର ଆଧାର ଭିତ୍ତିକ M ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ । M ର ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ

   a. −1, i, −i b. 1, i, −i c. 1, i, i d. −1, −i, −i

6. ଏକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ M ର. ଆଇଗନନ୍ ମୂଲ୍ୟ 1 ଓ 4 ଅନୁରୂପ ଯଥାକ୍ରମେ ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର $(1, -1)^T$ ଓ $(2]\ 1)^T$ ତେବେ M ହେଉଛି

a. $\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

7. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, ତେବେ ମୋଡାଲ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ P ହେଉଛି ।

a. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$

8. ଯଦି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ର ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ମୂଳ λ_1 ଓ λ_2, ତେବେ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ର ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ମୂଳ ହେଉଛି ।

a. $\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2$ b. $2\lambda_1$ ଏବଂ $2\lambda_2$ c. $\frac{1}{\lambda_1}$ ଏବଂ $\frac{1}{\lambda_2}$ d. $\lambda_1 + \lambda_2$ ଏବଂ $|\lambda_1 - \lambda_2|$

9. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଶୂନ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ?

a. $A^2 - A - 5I$ b. $A^2 + A - 5I$ c. $A^2 + A - I$ d. $A^2 - 3A + 5I$

10. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ର ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ

a. 1, 4 b. −1, 2 c. 0, 5 d. 2, −5

11. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ର ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ।

a. $[1\ \ -2\ \ 0\ \ 0]^T$ b. $[0\ \ 0\ \ 1\ \ 0]^T$ c. $[1\ \ 0\ \ 0\ \ -2]^T$ d. $[1\ \ -1\ \ 2\ \ 1]^T$

12. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ର ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ଏପରି ଭାବରେ ଲେଖାଯାଇଛି $\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ ଓ $\begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$, a + b ର ମୂଲ୍ୟ କଣ?

a. 0 b. 1/2 c. 1 d. 4

13. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ର ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ହେଉଛି

a. $[-1\ \ 1\ \ 1]^T$ b. $[1\ \ 2\ \ 1]^T$ c. $[1\ \ -1\ \ 2]^T$ d. $[2\ \ 1\ \ -1]^T$

14. ମନେକର ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x & y \end{bmatrix}$ ଯଦି A ର ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ 4 ଓ 8 ତେବେ

a. x = 4, y = 10 b. x = 5, y = 8 c. x = –3, y = 9 d. x = –4, y = 10

15. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ପାଇଁ, ଆଇଗନମୂଲ୍ୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ 3 ହେଲେ ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ହେଉଛି

a. 2, –5 b. 3, –5 c. 2, 5 d. 3, 5

16 ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,ତେବେ A ର ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ ହେଉଛି

a. 2, 1, 0 b. 2, (1 + i), (1 – i) c. 2, –1, –1 d. 1, –1, 0

17. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ ନୁହେଁ

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

18. ଭେକ୍ଟର (–2, 3, 7) ର ନର୍ମ କେତେ?

a. $\sqrt{60}$ b. $\sqrt{62}$ c. 7 d. $\sqrt{78}$

19. ମନେକର $u = (a_1, a_2)$ ଏବଂ $v = (b_1, b_2)$ ର ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ସଦସ୍ୟ , ତେଣୁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି $R^2(R)$ ରେ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ ନୁହେଁ ।

a. $\langle u, v\rangle = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 4a_2b_2$ b. $\langle u, v\rangle = a_1b_1 + a_2b_2$

c. $\langle u, v\rangle = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$ d. $\langle u, v\rangle = a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + 5a_2b_2$

ଉତ୍ତର ମାଳା

1. c	2. d	3. b	4. c
5. a	6. d	7. b	8. c
9. c	10. c	11. b	12. b
13. b	14. d	15. d	16. c
17. c	18. b	19. c	

ଅସମାହିତ କଠିନ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

1. a, b ଓ c ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଠାରେ (1, 0, –1) ଓ (0, 1, –1) ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ ୪ & 3 & 2 \\ 3 & ୫ & ୮ \end{bmatrix}$ ର ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର

2. P, D ଓ A ସମ ଅର୍ଡର ର ବର୍ଗ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ଯେପରିକି P ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ, D କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ $D = PAP^{-1}$ ଯଦି $A^n = 0$ କେତେକ $n \in N$ ପାଇଁ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ A = 0

3. ମନେକର A ଏକ n × n ବାସ୍ତବ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହାର n ଗୋଟି ପୃଥକ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଅଛି, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ P ରହିବ ଯେପରିକି AP = PD ଯେଉଁଠାରେ 'D ଏକ ବାସ୍ତବ କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ |

4. ସମସ୍ତ 2×2 ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ କୁ ଏହି $\begin{bmatrix} 1/3 & x \\ y & z \end{bmatrix}$ ରୂପରେ ପ୍ରଦର୍ଶନ କର।

5. ଏକ 3 × 3 ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ P ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହା ନିମ୍ନ ପ୍ରଦତ୍ତ ଧାଡିର ଗୁଣିତକ ହେବ ।

   a. (1, 2, 3) ଓ (0, –2, 3)   b.   (1, 3, 1) ଓ (1, 0, –1)

6. ମନେକର A ଏକ ବାସ୍ତବ ବିଷମ-ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଅର୍ଥାତ୍ $A^T = -A$, ନିମ୍ନଲିଖିତ କଥନକୁ ପ୍ରମାଣ କର।

a. ବାସ୍ତବ ବିଷମ-ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ 0 କିମ୍ବା ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ କାଳ୍ପନିକ ସଂଖ୍ୟା |

b. A ର ରାଙ୍କ ଯୁଗ୍ମ ।

7. ଯଦି A, $M_{n \times n}(F)$ ରେ n ପୃଥକ ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ ଅଛି, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ A କର୍ଣ୍ଣୀକରଣୀୟ।

8. ପ୍ରମାଣ କରଯେ ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ ଅନୁରୂପ ଦୁଇଟି ପୃଥକ ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ସର୍ବଦା ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳ।

9. ଦତ୍ତ 2 × 2 ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} ୪ & ୫-୪ \\ 0 & ୫ \end{bmatrix}$ ପାଇଁ

a. A ର ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

b. A ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ, ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

c. ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ Aକୁ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ କର।

d. କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ ର ଫଳାଫଳ ବ୍ୟବହାର କରି, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଧନାତ୍ମକ A^k କୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ମନେକର ସେଟ୍ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ରୈଖିକ ନ୍ର୍ଭିରଶୀଳ ଗ୍ରାମ-ସ୍କିମିଡ ଲାମ୍ବିକୀକରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା, ଏହା ଉପରେ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ କଣ ଘଟେ ।

11. ମନେକର $W = (1, -2, -1, 3)$ R^4 ରେ ଏକ ଭେକ୍ଟର, ତେବେ

. a. $W^{\perp}$ ପାଇଁ ଲମ୍ବୀୟ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

b. $W^{\perp}$ ପାଇଁ ଅର୍ଥୋନିର୍ମାଲ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ମନେକର $M = M_{2 \times 2}$ ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ $< A, B > = tr(B^T A)$. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଲମ୍ବୀୟ ଉପାଦାନ ପାଇଁ ଲମ୍ବୀୟ ଆଧାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଠାରେ a. କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ b. ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ

ଉତ୍ତର ମାଳା

1. [a = 2, b = 4, c = 4]

4. $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{bmatrix}$ ଯେଉଁଠାରେ $a = \frac{1}{3}$ ଏବଂ $b = \frac{\sqrt{8}}{3}$

5. a. $\left[\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}; 0, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{13}}; \frac{12}{\sqrt{157}}, \frac{-3}{\sqrt{157}}, \frac{-2}{\sqrt{157}}\right]$

   b. $\left[\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}; \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{-2}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}\right]$

9. ଯେତେବେଳେ $a \neq b$

   a. a, b

   b. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

   d. $A^k = \begin{bmatrix} a^k & b^k - a^k \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$

   ଯେତେବେଳେ a = b

   a. a, a

   b. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, x \neq 0, y \neq 0, x, y \in C$

   c. $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

   d. $A^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$

10. ଯଦି V_1 ହେଉଛି ପୂର୍ବର ବିସ୍ତୃତିରେ ପ୍ରଥମ ଭେକ୍ଟର, ତେବେ ଲାମ୍ବିକୀ କରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ସଂପୃକ୍ତ ଭେକ୍ଟର ଶୂନ୍ୟ ହେବ।

11. a. $u_1 = (0, 0, 3, 1)$, $u_2 = (0, 5, -1, 3)$, $u_3 = (-14, -2, -1, 3)$

    b. $\frac{u_1}{\sqrt{10}}, \frac{u_2}{\sqrt{35}}, \frac{u_3}{\sqrt{210}}$

12. a. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

    b. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ପ୍ରକଳ୍ପ/କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ / ବ୍ୟାହାରିକ

ପ୍ରକଳ୍ପ: କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ Aର ଘାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ସାହାଯ୍ୟ କରେ , ଅର୍ଥାତ୍ Aର ଘାତ n,ଯେଉଁଠାରେ n ଏକ ସାଧାରଣ ପୂର୍ଣ୍ଣାଙ୍କ । ଏକ ଉଦାହରଣ ସାହାଯ୍ୟରେ ଗାଣିତିକ ଭାବରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କର |

କାର୍ଯ୍ୟକଳାପ: କିପରି ଏକ ରୈଖିକ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ସମୂହ dx/dt=x, ଯେଉଁଠାରେ x ଏକ m x m କର୍ଣ୍ଣୀ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ, ଯାହାର ଉପାଦାନଗୁଡିକ ଧ୍ରୁବକର ସମାଧାନ କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା ହୋଇପାରିବ ବୁଝାଅ ?

ବ୍ୟବହାରିକ: MATLAB ବ୍ୟବହାରିକ କରି ଘାତ ପଦ୍ଧତି (ମାନକିକରଣ ସହ) ଦ୍ୱାରା ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ $A \in R_{nxn}$ ର ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ ଏବଂ ଆଇଗନ୍ ଭେକ୍ଟର ଗଣନା କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ କର।

ଅଧିକ ଜାଣନ୍ତୁ

1. ଯଦି R ରେ A, ଏକ (2 × 2) ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ det (A + I) = 1 + Det (A) ତେବେ, ଆମେ ଉପନୀତ ହେବା ଯେ,

   a. Det (A) = 0   b A = 0   c. Tr (A) = 0   d. A ଅଣ ସିଙ୍ଗୁଲାର

2. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ତେବେ A^9 ଗଣନା କର ।

   a. 511A + 510I   b 309A + 104I   c. 154A + 155I   d. exp. (9A)

3. ମନେକର V ଏକ, ବାସ୍ତବ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ର ଏକ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେସ୍ ଯାହାର ଯାଓହାର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ 2, ଏକ ରୈଖିକ ଅପରେଟର ବ୍ୟାଖ୍ୟା କର ଯେପରିକି T : V → V ପାଇଁ $T(x) = \sum_{j=0}^{i} x^j, i = 0, 1, 2$ ଆଇଗନ୍ ମୂଲ୍ୟ 1 ଅନୁରୂପ, ଆଇଗନ୍ ସ୍ପେସ୍ T^{-1}ର ମାତ୍ରା ହେଉଛି,

   a. 4   b. 3   c. 2.   d. 1

4. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ତେବେ A^{50} ର ମୂଲ୍ୟ

   a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 48 & 1 & 0 \\ 48 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 25 & 1 & 0 \\ 25 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 24 & 1 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ଉତ୍ତରମାଳା

1. c   2. a   3. d   4. c

ସହାୟକ ଓ ପରାମର୍ଶ ମୂଳକ ପଠନ

1. *Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.*
2. *Dettman, J.W. (1974). Introduction to Linear Algebra and Differential Equations, McGraw Hill, Kogakusha.*
3. *Garg, Reena (2019). Engineering Mathematics-I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.*
4. *Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers.*
5. *Herstein, I.N. (1993). Topics in Algebra, Wiley Eastern.*
6. *Hohn, E.Franz. (1964). Elementary Matrix Algebra, Macmillan Company, NewYork.*
7. *Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition, Narosa.*
8. *Philip, Franklin. (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. NewYork.*
9. *Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.*
10. *Ram, Babu. Engineering Mathematics, Pearson.*
11. *Thomas, G.B. and Finney, R.L.(1992). Calculus and Analytic Geometry, Addision-Wesley, Reading, MA.*

CO ଏବଂ PO ପ୍ରାପ୍ତି ସାରଣୀ

ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ସମାପ୍ତ ହେବାପରେ, ଏହି ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ପାଇଁ ପାଠ୍ୟକ୍ରମର ଫଳାଫଳ, ପ୍ରୋଗ୍ରାନ ଫଳାଫଳ ସହିତ ମ୍ୟାପ୍ ହୋଇପାରିବ ଏବଂ ବ୍ୟବଧାନକୁ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରିବାପାଇଁ POର ପ୍ରାପ୍ତି ପାଇଁ ଏକ ସହସମ୍ବନ୍ଧ ସୃଷ୍ଟି କରାଯାଇପାରିବ। PO ହାସଲ କରିବାରେ ବ୍ୟବଧାନର ସଠିକ ବିଶ୍ଳେଷଣ ପରେ ଏହି ବ୍ୟବଧାନକୁ ଦୂର କରିବାପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ପଦକ୍ଷେପ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଇପାରେ।

CO (CO) ଏବଂ PO ପ୍ରାପ୍ତି ସାରଣୀ

ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଫଳାଫଳ	ପ୍ରୋଗ୍ରାମ ଫଳାଫଳର ପ୍ରାପ୍ତି *(1- ଦୁର୍ବଳ ସହସମ୍ବନ୍ଧ; 2- ମଧ୍ୟମ ସହସମ୍ବନ୍ଧ; 3- ଦୃଢ ସହସମ୍ବନ୍ଧ)*											
	PO-1	PO-2	PO-3	PO-4	PO-5	PO-6	PO-7	PO-8	PO-9	PO-10	PO-11	PO-12
CO-1												
CO-2												
CO-3												
CO-4												
CO-5												
CO-6												

ବ୍ୟବଧାନ ବିଶ୍ଳେଷଣ ପାଇଁ ଉପରୋକ୍ତ ଟେବୁଲ (ସାରଣୀ)ରେ ଭରାଯାଇଥିବା ତଥ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇପାରିବ।

ଅନୁକ୍ରମଣିକା

ପରମ ଅଭିସରଣ, 54
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯୋଗ, 179
ଭେକ୍ଟରର ଯୋଗ 183
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଡଜଏଣ୍ଟ 200
ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 195
ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍‌ର ଆଧାର 284
ବିଟା ଫଳନ 60
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର କାନନିକାଲ ରୂପ 211
କୋଶୀଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ 111
କୋଶୀ ସ୍ୱାଜ ଅସମତା 364
ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର, 3, 13
ବୃତ୍ତର ବକ୍ରତା 3, 13
କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର 198
ସ୍ତମ୍ଭ- ଇକେଲନ୍ ରୂପ 186
ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା 46
କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ 236
କ୍ରାନ୍ତିକ ବିନ୍ଦୁ 150
ବକ୍ରତା 2
ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳନ 33
କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ 353, 354
ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍‌ର ମାତ୍ରା 284
ଅନୁରୂପ ସୂତ୍ର 68
ଆଇଗନ ଆଧାର 328
ଆଇଗନ୍ ସ୍ପେଶ୍ 328
ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ, 325, 326
ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର 325, 326
ପ୍ରାଥମିକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 185
ଏନ୍‌ଭଲପ୍, 17
କେନ୍ଦ୍ରଜ, 15
କଳନ ଗଣିତର ପ୍ରଥମ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ, 35
ଗାମା ଫଳନ 55
ଗସ୍ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି 239, 248
ଗସ୍- ଜୋର୍ଡାନ ପଦ୍ଧତି 243, 251
ଗ୍ରାମ-ସ୍କିମିଡ ଲାମ୍ବିକୀ କରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା 367
ସମଘାତୀ ସମୀକରଣ 232
ଏକକ ରୂପାନ୍ତରଣ 290
ଅସଂଗତ ସମାକଳନ 42
ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ 126
ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ୍ 359
ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ 183
ମ୍ୟାଟିକ୍ସର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ 202
ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ, 302
ଇନ୍‌ଭୋଲ୍ୟୁଟ 15
ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର କର୍ଣ୍ଣେଲ 304
ଲୋପିଟାଲଙ୍କ ନିୟମ 126
ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ 106
ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ 277
ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳତା, 274
ରୈଖିକ ଫଳନ 290
ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ରତା 274
ରୈଖିକ ମ୍ୟାପ 295
ରୈଖିକ ବିସ୍ତୃତି 281
ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ 222
ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ 290
ମ୍ୟାକଲେରିନଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ 118
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 173
ଗରିଷ୍ଠ 148
ଲଘିଷ୍ଠ 148
ମାଇନର 198
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୁଣଫଳ 180
ଅସମାଙ୍ଗୀ ସମୂହ 223
ଭେକ୍ଟରର ମାନକ 361
ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ୍ 304
ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 348
ଲମ୍ବୀୟ ଭେକ୍ଟର 366
ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ଭେକ୍ଟର 366
ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ଗୁଣଫଳ 300
ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 3
ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ବ୍ୟାପ୍ତି 304
ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ରାଙ୍କ ଓ ନଲିଟି 304
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କ 206
ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ 99

ଧାଡି-ଇକେଲନ୍ ରୂପ 185
କଳନ ଗଣିତର ଦ୍ୱିତୀୟ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ 36
ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 344
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବିୟୋଗ 179
ଭେକ୍ଟରର ବିୟୋଗ 183
ଘନାକୃତି ପରିକ୍ରମଣର ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 76
ସିଲଭେଷ୍ଟରଙ୍କ ନିୟମ 305
ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ 344
ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ 116
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରକାର 173
ଭେକ୍ଟର 182
ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ 268
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସେ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍ 269
ଘନାକୃତି ପରିକ୍ରମଣର ଘଣଫଳ 76
ଶୂନ୍ୟକ ରୂପାନ୍ତରଣ 290

ପରିଭାଷା

ପରମ ଅଭିସରଣ	Absolute convergence
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ ଯୋଗ	Addition of matrices
ଭେକ୍ଟରର ଯୋଗ	Addition of vector
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଆଡଜଏଣ୍ଟ	Adjoint of a matrix
ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ	Area of triangle
ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍‌ର ଆଧାର	Basis of a vector space
ବିଟା ଫଳନ	Beta function
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର କାନନିକାଲ ରୂପ	Canonical form of a matrix
କୋଶୀଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ	Cauchy's Mean Value theorem
କୋଶୀ ସ୍ୱାଜ ଅସମତା	Cauchy's Schwarz's inequality
ବକ୍ରତା କେନ୍ଦ୍ର	Centre of curvature
ବୃତ୍ତର ବକ୍ରତା	Circle of curvature
କୋ-ଫ୍ୟାକ୍ଟର	Cofactor
ସ୍ତମ୍ଭ- ଇକେଲନ୍ ରୂପ	Column-echeleon form
ତୁଳନାତ୍ମକ ପରୀକ୍ଷା	Comparison test
କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ	Cramer's rule
କ୍ରାନ୍ତିକ ବିନ୍ଦୁ	Critical point
ବକ୍ରତା	Curvature
ସୀମାଯୁକ୍ତ ସମାକଳନ	Definite integral
କର୍ଣ୍ଣୀକରଣ	Diagonalization
ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍‌ର ମାତ୍ରା	Dimension of a vector space
ଅନୁରୂପ ସୂତ୍ର	Duplication formula
ଆଇଗନ ଆଧାର	Eigen bases
ଆଇଗନ୍ ସ୍ପେଶ୍	Eigen space
ଆଇଗନ ମୂଲ୍ୟ	Eigen values
ଆଇଗନ ଭେକ୍ଟର	Eigen vectors
ପ୍ରାଥମିକ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ	Elementary matrix
ଏନ୍‌ଭଲପ୍	Envelope
କେନ୍ଦ୍ରଜ	Evolute
କଳନ ଗଣିତର ପ୍ରଥମ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ	First Fundamental theorem of calculus
ଗାମା ଫଳନ	Gamma function
ଗସ୍ ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି	Gauss elimination method
ଗସ୍- ଜୋଡାନ ପଦ୍ଧତି	Gauss Jordan method
ଗ୍ରାମ-ସ୍କିମିଡ ଲାମ୍ବିକୀ କରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା	Gram-Schmidt orthogonalization process
ସମଘାତୀ ସମୀକରଣ	Homogeneous equations
ଏକକ ରୂପାନ୍ତରଣ	Identity transformation
ଅସଂଗତ ସମାକଳନ	Improper integral
ଅନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରୂପ	Indeterminate form
ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ ସ୍ପେଶ୍	Inner product space
ଅନ୍ତର୍ଗୁଣଫଳ	Inner product
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ	Inverse of a matrix
ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ	Inverse of linear transformation
ଇନ୍‌ଭୋଲ୍ୟୁଟ	Involute

ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର କର୍ଣ୍ଣେଲ	Kernel of L.T.
ଲୋପିତାଲଙ୍କ ନିୟମ	L'Hospital's rule
ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ	Lagrange's Mean value theorem
ରୈଖିକ ସଂଯୋଗ	Linear combination
ରୈଖିକ ନିର୍ଭରଶୀଳତା	Linear dependence
ରୈଖିକ ଫଳନ	Linear functional
ରୈଖିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ରତା	Linear independence
ରୈଖିକ ମ୍ୟାପ	Linear map
ରୈଖିକ ବିସ୍ତୃତି	Linear span
ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ସମୂହ	Linear system of equations
ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣ	Linear transformations
ମ୍ୟାକଲେରିନଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ	Maclaurin's theorem
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ	Matrix
ଗରିଷ୍ଠ	Maxima
ଲଘିଷ୍ଠ	Minima
ମାଇନର	Minors
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ଗୁଣଫଳ	Multiplication of matrices
ଅସମାଙ୍ଗୀ ସମୂହ	Non-homogeneous system
ଭେକ୍ଟରର ମାନକ	Norm of a vector
ଶୂନ୍ୟ ସ୍ପେଶ୍	Null space
ଲମ୍ବୀୟ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ	Orthogonal matrix
ଲମ୍ବୀୟ ଭେକ୍ଟର	Orthogonal vector
ଅର୍ଥୋନର୍ମାଲ ଭେକ୍ଟର	Orthonormal vector
ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ଗୁଣଫଳ	Product of linear transformation
ବକ୍ରତା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ	Radius of curvature
ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ବ୍ୟାପ୍ତି	Range of L.T.
ରୈଖିକ ରୂପାନ୍ତରଣର ରାଙ୍କ ଓ ନଲିଟି	Rank and nullity of L.T.
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ରାଙ୍କ	Rank of a matrix
ରୋଲଙ୍କ ପ୍ରମେୟ	Rolle's theorem
ଧାଡି-ଇକେଲନ୍ ରୂପ	Row-echeleon form
କଳନ ଗଣିତର ଦ୍ୱିତୀୟ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ	Second Fundamental theorem of calculus
ବିଷମ ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ	Skew-symmetric matrix
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ବିୟୋଗ	Subtraction of matrices
ଭେକ୍ଟରର ବିୟୋଗ	Subtraction of vector
ଘନାକୃତି ପରିକ୍ରମଣର ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ	Surface area of solid of revolution
ସିଲଭେଷ୍ଟରଙ୍କ ନିୟମ	Sylvester's law
ସମମିତ ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସ	Symmetric matrix
ଟେଲରଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ	Taylor's theorem
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରକାର	Types of matrix
ଭେକ୍ଟର	Vector
ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍	Vector space
ମ୍ୟାଟ୍ରିକ୍ସେ ଭେକ୍ଟର ସ୍ପେଶ୍	Vectors in matrices
ଘନାକୃତି ପରିକ୍ରମଣର ଘଣଫଳ	Volume of solid of revolution
ଶୂନ୍ୟକ ରୂପାନ୍ତରଣ	Zero transformation

ଗଣିତ – ୧

କଳନ ଏବଂ ରୈଖିକ ବୀଜଗଣିତ

କମ୍ପ୍ୟୁଟର ଏବଂ ଇଂଜିନିୟରିଂ ବିଭାଗପାଇଁ

ପ୍ରଫେସର କିଶୋର କୁମାର ମିଶ୍ର ବର୍ତ୍ତମାନ ଗାନ୍ଧୀ ଇନିଷ୍ଟିଚ୍ୟୁଟ ଅଫ ଟେକ୍ନୋଲୋଜିକାଲ ଆଡଭାନ୍ସମେଣ୍ଟ ସ୍ୱୟଂଶାସିତ ବୈଷୟିକ ମହାବିଦ୍ୟାଳୟର ଗଣିତ ବିଭାଗର ମୁଖ୍ୟ ତଥା ପରୀକ୍ଷା ନିୟନ୍ତ୍ରକ ଭାବରେ କାର୍ଯ୍ୟରତ। ସେ ଉତ୍କଳ ବିଶ୍ୱବିଦ୍ୟାଳୟରୁ ସ୍ନାତକୋତ୍ତର ଡିଗ୍ରୀ ଓ ପିଏଚଡି ଡିଗ୍ରୀ ହାସଲ କରିଛନ୍ତି। ସେ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାପାଇଁ ପୁସ୍ତକ ଓ ପରିଭାଷା ପ୍ରସ୍ତୁତି, ପୁସ୍ତକ ସମୀକ୍ଷା ସହିତ ବିଭିନ୍ନ ଗବେଷଣା କାର୍ଯ୍ୟରେ ନିୟୋଜିତ ଅଛନ୍ତି। ସେ ଓଡ଼ିଶା ମାଥେମେଟିକାଲ ସୋସାଇଟିର ଜଣେ ସଦସ୍ୟ। ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କୁ ଗଣିତର ସରଳ ରୂପ ସହ ଅବଗତ କରାଇବା ସହିତ ଗଣିତକୁ ଲୋକପ୍ରିୟ କରିବାପାଇଁ ଓଡିଆ ଭାଷାରେ ବହୁ ଉପାଦେୟ ଆଲେଖ୍ୟ ବିଭିନ୍ନ ପତ୍ରପତ୍ରିକାରେ ପ୍ରକାଶଲାଭ କରିଛି।

ପ୍ରଫେସର ବିଷ୍ଣୁ ପ୍ରସନ୍ନ ଆଚାର୍ଯ୍ୟ ଉତ୍କଳ ବିଶ୍ୱବିଦ୍ୟାଳୟର ଅବସରପ୍ରାପ୍ତ ପ୍ରଫେସର। ଗଣିତ ଅଧ୍ୟାପନା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦୀର୍ଘ ୪୦ବର୍ଷର ଅଭିଜ୍ଞତା ରହିଥିବାବେଳେ ସରକାରଙ୍କ ବିଭିନ୍ନ ଶିକ୍ଷା କମିଟିର ସଦସ୍ୟ ରହିବା ସହିତ ଉଚ୍ଚବିଦ୍ୟାଳୟରୁ ବିଶ୍ୱବିଦ୍ୟାଳୟ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାପାଇଁ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ପ୍ରସ୍ତୁତି ଓ ପୁସ୍ତକ ଓ ପରିଭାଷା ପ୍ରସ୍ତୁତି, ପୁସ୍ତକ ସମୀକ୍ଷା କାର୍ଯ୍ୟରେ ନିଜକୁ ନିୟୋଜିତ କରିଆସିଛନ୍ତି। ତାଙ୍କର ଶତାଧିକ ଗବେଷଣା ନିବନ୍ଧ ଜାତୀୟ ଓ ଆନ୍ତର୍ଜାତୀୟ ସ୍ତରର ପତ୍ରପତ୍ରିକାରେ ପ୍ରକାଶିତ ଓ ଉଚ୍ଚ ପ୍ରଶଂସିତ।

ଡକ୍ଟର ସୁବ୍ରତ କୁମାର ପୃଷ୍ଟି ସଦସ୍ୟ ସଚିବ, ଓଡିଆ ଅଧ୍ୟୟନ ଓ ଗବେଷଣା ସଂସ୍ଥା, ଭୁବନେଶ୍ୱରରେ କାର୍ଯ୍ୟରତ। ଓଡିଆ ଭାଷାର ଏକନିଷ୍ଠ ଗବେଷକ ଭାବରେ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପରିଚୟ ସୃଷ୍ଟି କରିଛନ୍ତି। ଓଡିଆ ଭାଷା ୫୦୦ନୁହେଁ, ବରଂ ୫୦୦୦ବର୍ଷ ତଳର ଭାଷା ବୋଲି ସେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ସହିତ ଶାସ୍ତ୍ରୀୟତାପାଇଁ ନିଜସ୍ୱ ଉଦ୍ୟମରେ ଗବେଷଣା ସନ୍ଦର୍ଭ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରି ଉଭୟ ସରକାରି ଓ ବେସରକାରି କମିଟିକୁ ପ୍ରଦାନ କରିଥିଲେ। ଓଡିଆ ଭାଷାର ଶାସ୍ତ୍ରୀୟ ମାନ୍ୟତା, ଓଡିଆ ବିଶ୍ୱବିଦ୍ୟାଳୟ ସ୍ଥାପନା, ଓଡିଆରେ ସରକାରି କାମ, ଓଡିଆରେ ଶିକ୍ଷା ଓ ଓଡିଶାରେ ନିଯୁକ୍ତି ଭଳି ବହୁ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ କାର୍ଯ୍ୟ ହେଉଛି ଏହାଙ୍କ ମାନସ ସନ୍ତାନ। ତାଙ୍କର ପ୍ରାୟ ୩୦ରୁ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ପୁସ୍ତକ ତଥା ୫୦ରୁ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ଗବେଷଣା ନିବନ୍ଧ ଜାତୀୟ ଓ ଆନ୍ତର୍ଜାତୀୟ ସ୍ତରର ପତ୍ରପତ୍ରିକାରେ ପ୍ରକାଶିତ। ପ୍ରତିବର୍ଷ ଜାତୀୟ ଭାଷା ସମ୍ମିଳନୀ ଆୟୋଜନ କରି ଆନ୍ତର୍ଜାତିକ ସ୍ତରରେ ଓଡିଆ ଭାଷାର ନୂଆ ଦିଗ ଉପରେ ଆଲୋକପାତ କରିବାରେ ତାଙ୍କର ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଭୂମିକା ରହିଛି। ନିଜର ଗବେଷଣା କାର୍ଯ୍ୟପାଇଁ ଯୁବ ଭାଷା ଗବେଷକ ଭାବରେ ସେ ଭାରତର ମହାମହିମ ରାଷ୍ଟ୍ରପତିଙ୍କଠାରୁ ସମ୍ମାନଜନକ **ମହର୍ଷି ବାଦରାୟଣ ବ୍ୟାସ ସମ୍ମାନ** ଗ୍ରହଣ କରିବାପାଇଁ ମନୋନୀତ ହୋଇଛନ୍ତି।

ଡକ୍ଟର ଲୋକନାଥ ସେଠୀ ବରିଷ୍ଠ ପ୍ରାଧ୍ୟାପକ, ଓଡ଼ିଆ ଭାଷା ସାହିତ୍ୟ ବିଭାଗ, ପିପିଲି ମହାବିଦ୍ୟାଳୟ, ପିପିଲି, ପୁରୀ। " ସ୍ୱାଧୀନତା ପରବର୍ତ୍ତୀ ଓଡ଼ିଆ କବିତା ଓ କବି ଶରତ ଚନ୍ଦ୍ର ପ୍ରଧାନ " ଶୀର୍ଷକ ଗବେଷଣାତ୍ମକ ନିବନ୍ଧ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରି ସେ ଉତ୍କଳ ବିଶ୍ୱବିଦ୍ୟାଳୟରୁ Ph. D ଉପାଧି ପାଇଛନ୍ତି। ୨୦ବର୍ଷ ଧରି ଓଡ଼ିଶାର ବିଭିନ୍ନ ମହାବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଅଧ୍ୟାପନା ସହିତ ସାହିତ୍ୟ ସାଧନାରେ ନିଜକୁ ଉତ୍ସର୍ଗ କରିଛନ୍ତି । ନିକଟରେ ତାଙ୍କର ତିନୋଟି ସମାଲୋଚନାମୂଳକ ପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶଲାଭ କରି ସାରସ୍ୱତ ଦିଗକୁ ଅଧିକ ଶକ୍ତିଶାଳୀ କରିପାରିଛି।

ମୁଖ୍ୟ ବିଶେଷତ୍ୱ :

- ପାଠ୍ୟକ୍ରମର ଫଳାଫଳ, ପ୍ରୋଗ୍ରାମ ଫଳାଫଳ ଏବଂ ୟୁନିଟ୍ ଫଳାଫଳର ମ୍ୟାପିଙ୍ଗ୍ ସହିତ ବହିର ବିଷୟବସ୍ତୁ।
- ଆକର୍ଷଣୀୟ ତଥ୍ୟ, ଇ-ଉସପାଇଁ QR କୋଡ୍, ମିନି ପ୍ରୋଜେକ୍ଟ, ନମୁନା ସ୍ପେସିଫିକେସନ୍ ଟେବୁଲ୍ ଇତ୍ୟାଦି ପ୍ରଦାନ ।
- ବହିରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଛାତ୍ର ଏବଂ ଶିକ୍ଷକକୈନ୍ଦ୍ରିକ ସନ୍ତୁଳିତ ଏବଂ କ୍ରମିକ ଢଙ୍ଗରେ ବିଷୟ ସାମଗ୍ରୀ।
- ବିଷୟଗୁଡ଼ିକର ବୋଧଗମ୍ୟତାପାଇଁ ଚିତ୍ର, ସାରଣୀ ଏବଂ ଗାଣିତିକ ସମୀକରଣ।
- ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଧ୍ୟାୟ ପରେ ଛାତ୍ରମାନଙ୍କ ଅଭ୍ୟାସପାଇଁ ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନ, ବହୁ ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଶ୍ନ ଏବଂ ଦୀର୍ଘ ଉତ୍ତର ଅଭ୍ୟାସ ପ୍ରଶ୍ନ ଦିଆଯାଇଛି।
- ମୌଳିକ ନୀତିଗୁଡିକର ଶୀଘ୍ର ସଂଶୋଧନପାଇଁ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକର ବିସ୍ତୃତ ତଥ୍ୟ।

ISBN 978-93-91638-30-6

Also available as an ebook

Published by: Institute of Odia Studies and Research,
3R9, BJB Nagar, Bhubaneswar,
ଓଡିଆ ଅଧ୍ୟୟନ ଓ ଗବେଷଣା ସଂସ୍ଥା, ୩ଆର୯, ବିଜେବି ନଗର ଭୁବନେଶ୍ୱର, ଓଡିଶା